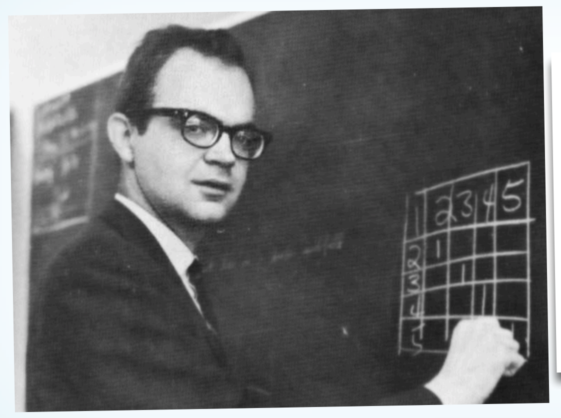
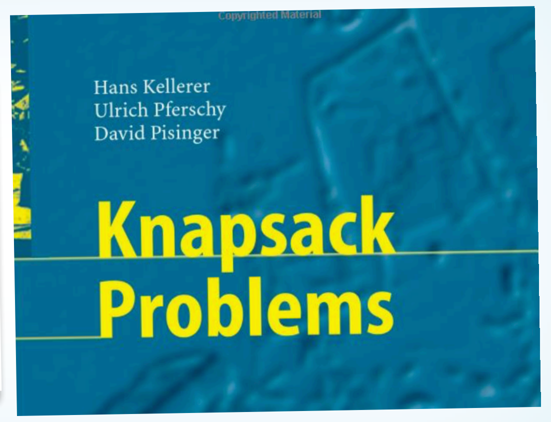


$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le c, \\
& x_j = 0 \text{ or } 1, \qquad j = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
$$




# 1 Einführung: Knapsack-Probleme

*Algorithmen und Datenstrukturen 2*
*Sommer 2020*

Prof. Dr. Sándor Fekete

# Teilaufgaben?!

# Teilaufgaben?!

**Problem 1.3** ( Fractional Knapsack).

**Gegeben:**

- *n Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* $z_i > 0$ *Gewinn* $p_i > 0$
- *Größenschranke* $Z$

**Gesucht:**

*Für jedes Objekt ein Wert*

$$x_i \in [0, 1]$$

*sodass*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

# Teilaufgaben?!

**Problem 1.3** ( Fractional Knapsack).

***Gegeben:***

- *n Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* $z_i > 0$ *Gewinn* $p_i > 0$
- *Größenschranke Z*

***Gesucht:***

*Für jedes Objekt ein Wert*

$$\boxed{x_i \in [0, 1]}$$

*sodass*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

# Teilaufgaben?!

# Teilaufgaben?!

$$\boxed{\text{nach Wert } \left(\frac{z_i}{p_i}\right) \text{ sortieren:}}$$

# Teilaufgaben?!

$\boxed{\text{nach Wert } \left(\frac{z_i}{p_i}\right) \text{ sortieren:}}$

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

# Teilaufgaben?!

$\boxed{\text{nach Wert } \left(\frac{z_i}{p_i}\right) \text{ sortieren:}}$

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i$$

# Teilaufgaben?!

$\boxed{\text{nach Wert } \left(\frac{z_i}{p_i}\right) \text{ sortieren:}}$

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 4$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 4$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 4$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 4$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 12$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 9$$

# Teilaufgaben?!

$\boxed{\text{nach Wert } \left(\frac{z_i}{p_i}\right) \text{ sortieren:}}$

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 12$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 9$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 28$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 19$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 28$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 19$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 48$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 28$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 48$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 28$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 56$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 30$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 56$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 30$$

# Teilaufgaben?!

$\boxed{\text{nach Wert } \left(\frac{z_i}{p_i}\right) \text{ sortieren:}}$

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

# Teilaufgaben?!

$\boxed{\text{nach Wert } \left(\frac{z_i}{p_i}\right) \text{ sortieren:}}$

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

$x_{15}$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 40 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

$x_{15}$

# Teilaufgaben?!

**nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:**

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 24 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

$x_{15}$

# Teilaufgaben?!

$\boxed{\text{nach Wert } \left(\frac{z_i}{p_i}\right) \text{ sortieren:}}$

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | **24** | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

$x_{15}$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | **24** | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 10 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

$x_{15} = 0{,}6$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 24 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 6 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

$x_{15} = 0{,}6$

# Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 24 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 6 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$$

$x_{15} = 0{,}6$

# Algorithmus

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** *(Greedy-Algorithmus)*

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** *(Greedy-Algorithmus)*

---

***Eingabe:*** $z_i, \ldots, z_n, Z, p_i, \ldots, p_n$

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** *(Greedy-Algorithmus)*

---

***Eingabe:*** $z_i, \ldots, z_n, Z, p_i, \ldots, p_n$

***Ausgabe:*** $x_i, \ldots, x_n \in [0, 1]$

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** *(Greedy-Algorithmus)*

---

***Eingabe:*** $z_i, \ldots, z_n, Z, p_i, \ldots, p_n$

***Ausgabe:*** $x_i, \ldots, x_n \in [0, 1]$

*mit*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** *(Greedy-Algorithmus)*

---

***Eingabe:*** $z_i, \dots, z_n, Z, p_i, \dots, p_n$

***Ausgabe:*** $x_i, \dots, x_n \in [0, 1]$

*mit*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** *(Greedy-Algorithmus)*

---

***Eingabe:*** $z_i, ..., z_n, Z, p_i, ..., p_n$

***Ausgabe:*** $x_i, ..., x_n \in [0, 1]$

*mit*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

1: *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** *(Greedy-Algorithmus)*

---

***Eingabe:*** $z_i, \ldots, z_n, Z, p_i, \ldots, p_n$

***Ausgabe:*** $x_i, \ldots, x_n \in [0, 1]$

*mit*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

*1:* *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*

*Dies ergibt die Permutation* $\pi(1), \ldots, \pi(n)$.

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** *(Greedy-Algorithmus)*

---

***Eingabe:*** $z_i, ..., z_n, Z, p_i, ..., p_n$

***Ausgabe:*** $x_i, ..., x_n \in [0, 1]$

*mit*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

1: *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*
*Dies ergibt die Permutation* $\pi(1), ..., \pi(n)$.
*Setze* $j = 1$.

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** *(Greedy-Algorithmus)*

---

***Eingabe:*** $z_i, ..., z_n, Z, p_i, ..., p_n$

***Ausgabe:*** $x_i, ..., x_n \in [0, 1]$

*mit*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

1: *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*
*Dies ergibt die Permutation* $\pi(1), ..., \pi(n)$.
*Setze* $j = 1$.

2: ***while*** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ ***do***

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** *(Greedy-Algorithmus)*

---

***Eingabe:*** $z_i, ..., z_n, Z, p_i, ..., p_n$
***Ausgabe:*** $x_i, ..., x_n \in [0, 1]$

*mit*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

1: *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*
*Dies ergibt die Permutation* $\pi(1), ..., \pi(n)$.
*Setze* $j = 1$.
2: ***while*** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ ***do***
3: $x_{\pi(j)} := 1$

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** *(Greedy-Algorithmus)*

---

***Eingabe:*** $z_i, ..., z_n, Z, p_i, ..., p_n$

***Ausgabe:*** $x_i, ..., x_n \in [0, 1]$

*mit*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

1: *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*
*Dies ergibt die Permutation* $\pi(1), ..., \pi(n)$.
*Setze* $j = 1$.
2: ***while*** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ ***do***
3: $x_{\pi(j)} := 1$
4: $j := j + 1$

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** *(Greedy-Algorithmus)*

---

***Eingabe:*** $z_i, ..., z_n, Z, p_i, ..., p_n$

***Ausgabe:*** $x_i, ..., x_n \in [0, 1]$

*mit*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

1: *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*
*Dies ergibt die Permutation* $\pi(1), ..., \pi(n)$.
*Setze* $j = 1$.
2: ***while*** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ ***do***
3: $\quad x_{\pi(j)} := 1$
4: $\quad j := j + 1$
5: *Setze* $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

# Algorithmus

**Algorithmus 1.4.** *(Greedy-Algorithmus)*

---

***Eingabe:*** $z_i, \dots, z_n, Z, p_i, \dots, p_n$

***Ausgabe:*** $x_i, \dots, x_n \in [0, 1]$

*mit*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \le Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

*Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*
*Dies ergibt die Permutation* $\pi(1), \dots, \pi(n)$.
*Setze* $j = 1$.
***while*** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \le Z)$ ***do***
    $x_{\pi(j)} := 1$
    $j := j + 1$
*Setze* $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
***return***

---

# Das klappt immer!

# Das klappt immer!

**Satz 1.5.** *Algorithmus* $\boxed{1.4}$ *liefert eine optimale Lösung für Problem* $\boxed{1.3}$*.*

# Das klappt immer!

**Satz 1.5.** *Algorithmus 1.4 liefert eine optimale Lösung für Problem 1.3.*

**Beweis:**

# Das klappt immer!

**Satz 1.5.** *Algorithmus* $\boxed{1.4}$ *liefert eine optimale Lösung für Problem* $\boxed{1.3}$*.*

**Beweis:**

O.B.d.A. sei $\sum_{i=1}^{n} z_{\pi(i)} > Z$ - sonst nimmt man einfach alles.

# Das klappt immer!

**Satz 1.5.** *Algorithmus* $\boxed{1.4}$ *liefert eine optimale Lösung für Problem* $\boxed{1.3}$.

**Beweis:**
O.B.d.A. sei $\sum_{i=1}^{n} z_{\pi(i)} > Z$ - sonst nimmt man einfach alles.

**(1)** Wir bekommen eine zulässige Lösung.

# Das klappt immer!

**Satz 1.5.** *Algorithmus* $\boxed{1.4}$ *liefert eine optimale Lösung für Problem* $\boxed{1.3}$.

**Beweis:**

O.B.d.A. sei $\sum_{i=1}^{n} z_{\pi(i)} > Z$ - sonst nimmt man einfach alles.

**(1)** Wir bekommen eine zulässige Lösung.

**(2)** Wir bekommen eine optimale Lösung.

# (1) Zulässigkeit

# (1) Zulässigkeit

$$
\begin{array}{l}
\textit{Setze } j = 1. \\
\textbf{\textit{while}} \ (\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z) \ \textbf{\textit{do}} \\
\qquad x_{\pi(j)} := 1 \\
\qquad j := j + 1 \\
\textit{Setze } x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}} \\
\textbf{\textit{return}}
\end{array}
$$

# (1) Zulässigkeit

*Setze* $j = 1$.
**while** $\left(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z\right)$ **do**
    $x_{\pi(j)} := 1$
    $j := j + 1$
*Setze* $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
**return**

# (1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
**while** $\left(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z\right)$ **do**
  $x_{\pi(j)} := 1$
  $j := j + 1$
Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
**return**

Sei $j^*$ der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

# (1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.

**while** $\left(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z\right)$ **do**

$\quad x_{\pi(j)} := 1$

$\quad j := j + 1$

Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

**return**

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | **24** | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | **6** | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei $j^*$ der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

# (1) Zulässigkeit

*Setze* $j = 1$.
**while** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
$\quad x_{\pi(j)} := 1$
$\quad j := j + 1$
*Setze* $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
**return**

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 24 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 6 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei $j^*$ der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist

# (1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
2: **while** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
3: $\quad x_{\pi(j)} := 1$
4: $\quad j := j+1$
5: Setze $x_{\pi(j)} := \frac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
6: **return**

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 24 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 6 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei $j^*$ der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$

# (1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
**while** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
$\quad x_{\pi(j)} := 1$
$\quad j := j + 1$
Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
**return**

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 24 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 6 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei $j^*$ der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und

# (1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
**while** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
  $x_{\pi(j)} := 1$
  $j := j + 1$
Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
**return**

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | **24** | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | **6** | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei $j^*$ der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und $\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

# (1) Zulässigkeit

> *Setze* $j = 1$.
> ***while*** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ ***do***
> $\quad x_{\pi(j)} := 1$
> $\quad j := j + 1$
> *Setze* $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
> ***return***

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | **24** | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | **6** | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i$ **= 120**

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ **= 46**

$x_{15}$ **= 0,6**

Sei $j^*$ der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und $\displaystyle\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

Also ist

# (1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
2: **while** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
3: $x_{\pi(j)} := 1$
4: $j := j + 1$
5: Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
6: **return**

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 24 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 6 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei $j^*$ der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und $\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

Also ist $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(j^*-1)} = 1$

# (1) Zulässigkeit

*Setze* $j = 1.$

**while** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**

  $x_{\pi(j)} := 1$

  $j := j + 1$

*Setze* $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

**return**

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 24 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 6 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei $j^*$ der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und $\displaystyle\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

Also ist $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(j^*-1)} = 1$ und

# (1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
**while** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
    $x_{\pi(j)} := 1$
    $j := j + 1$
Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
**return**

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 24 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 6 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei $j^*$ der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und $\displaystyle\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

Also ist $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(j^*-1)} = 1$ und $x_{\pi(j^*)} \in [0, 1[$

# (1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
**while** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
  $x_{\pi(j)} := 1$
  $j := j + 1$
Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
**return**

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 24 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 6 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$

$x_{15} = 0{,}6$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$

Sei $j^*$ der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und $\displaystyle\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

Also ist $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(j^*-1)} = 1$ und $x_{\pi(j^*)} \in [0, 1[$ und

# (1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
**while** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \le Z)$ **do**
    $x_{\pi(j)} := 1$
    $j := j + 1$
Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
**return**

| $i$ | 6 | 4 | 13 | 12 | 9 | 3 | 15 | 8 | 16 | 10 | 1 | 14 | 5 | 11 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 4 | 8 | 16 | 20 | 8 | 40 | 24 | 40 | 24 | 32 | 20 | 20 | 16 | 28 | 32 | 32 |
| $p_i$ | 4 | 5 | 10 | 9 | 2 | 10 | 6 | 9 | 4 | 5 | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 2 |

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei $j^*$ der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \le Z$ und $\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

Also ist $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(j^*-1)} = 1$ und $x_{\pi(j^*)} \in [0,1[$ und $\sum_{i=1}^{j^*} x_{\pi(i)} z_{\pi(i)} = Z$

# (2) Optimalität

# (2) Optimalität

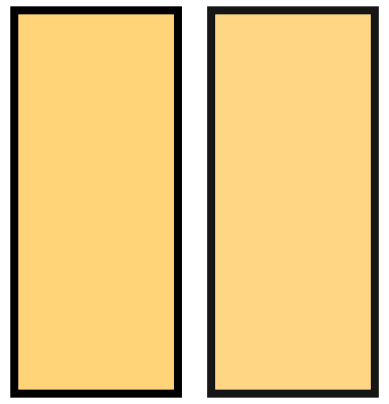
$$\frac{p_i}{z_i}$$

# (2) Optimalität

$\frac{p_i}{z_i}$

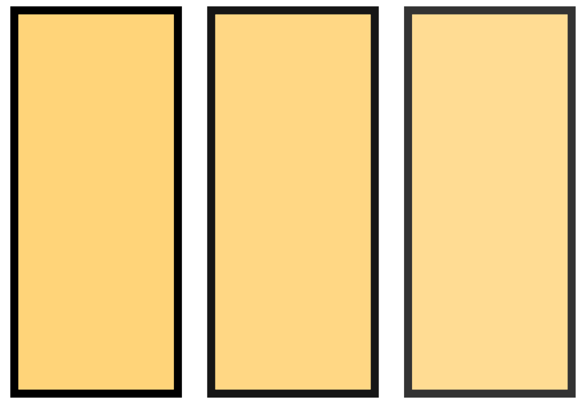
# (2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



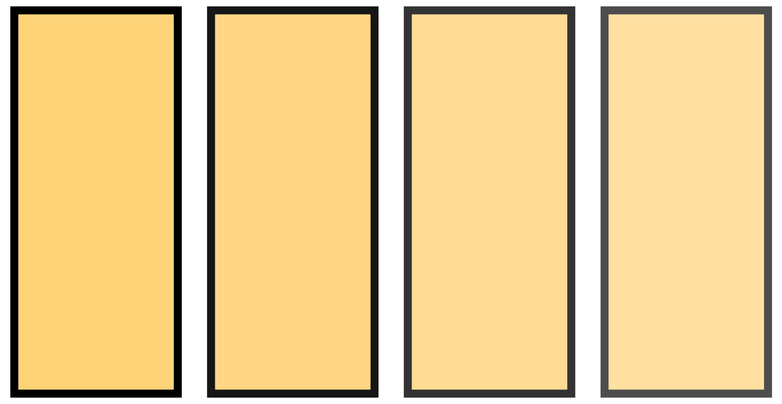
# (2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



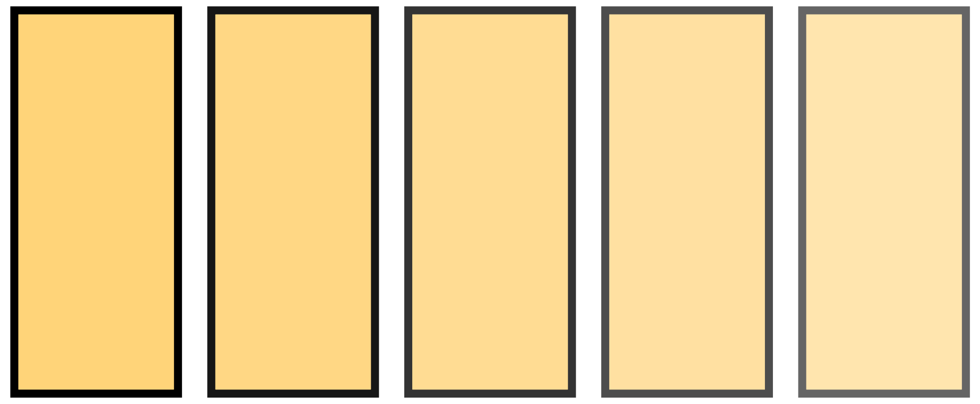
# (2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



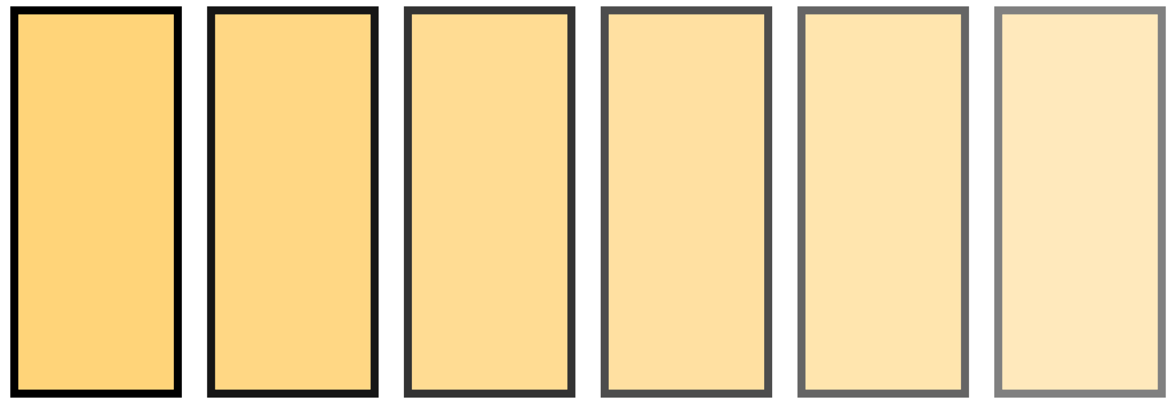
# (2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



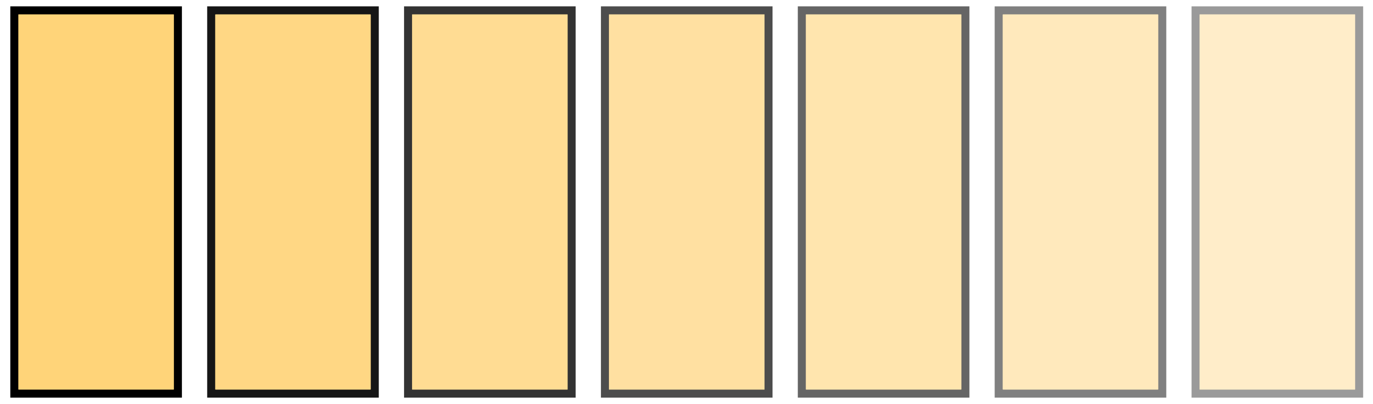
# (2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



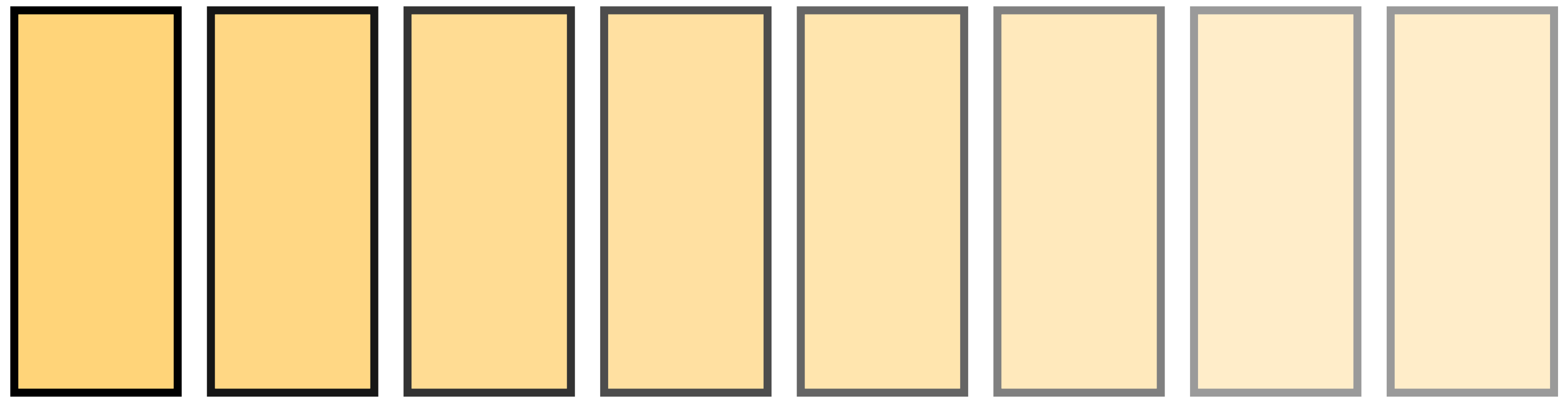
# (2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



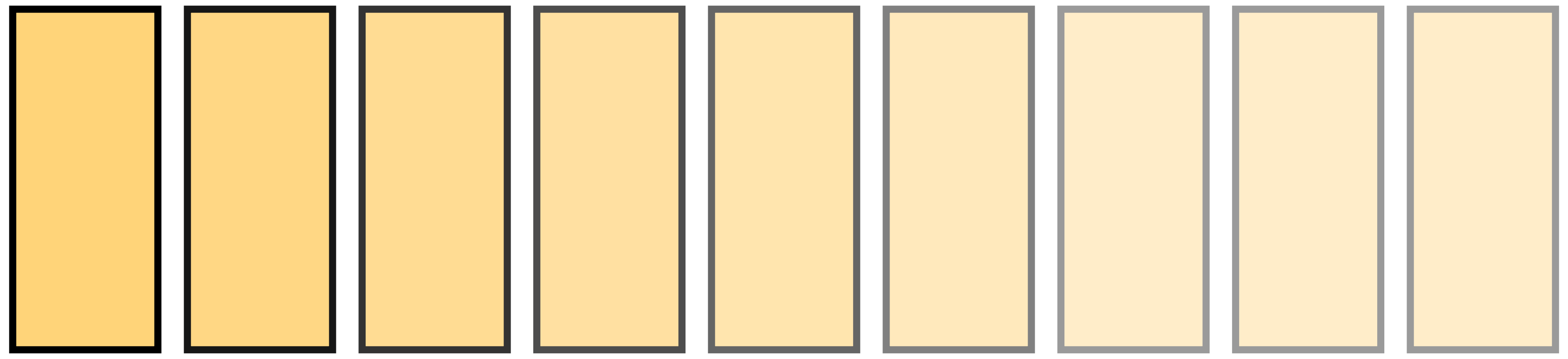
# (2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



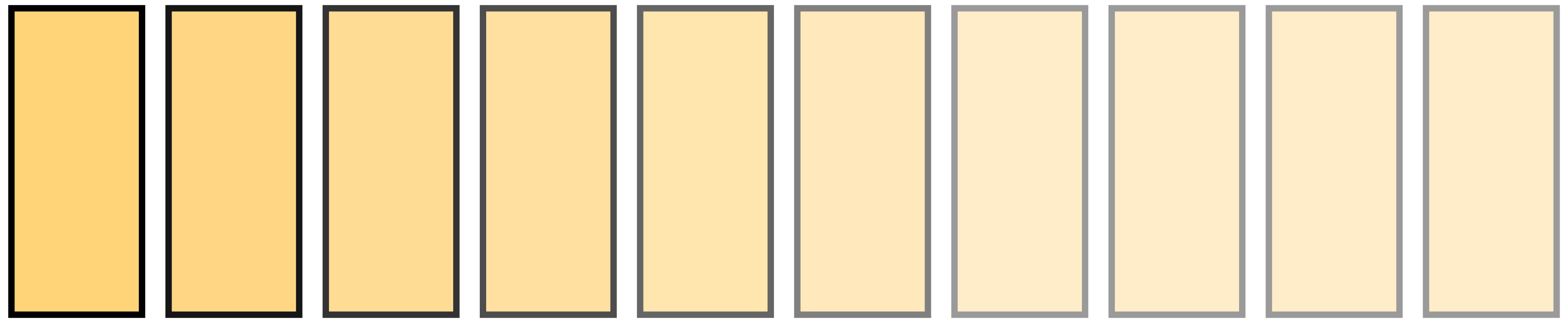
# (2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



# (2) Optimalität

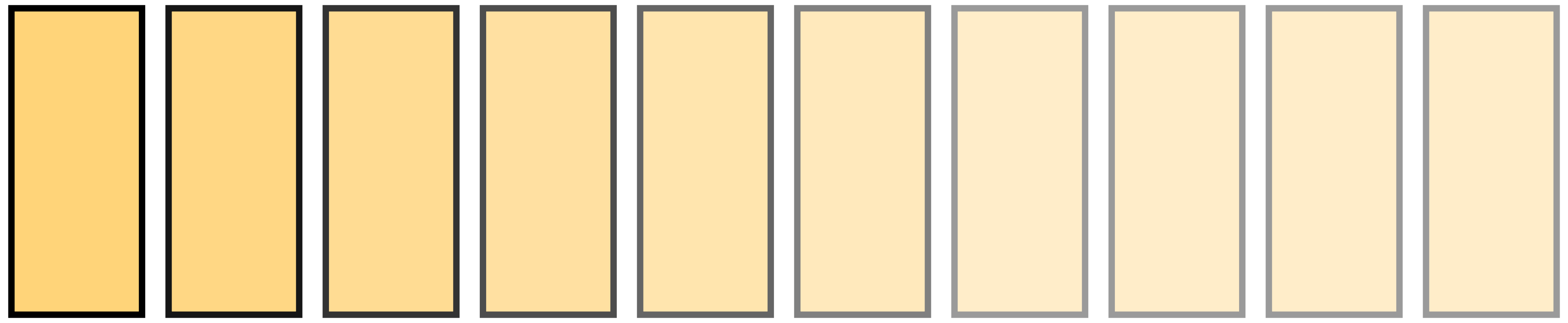
$$\frac{p_i}{z_i}$$



# (2) Optimalität

$x$

$\frac{p_i}{z_i}$



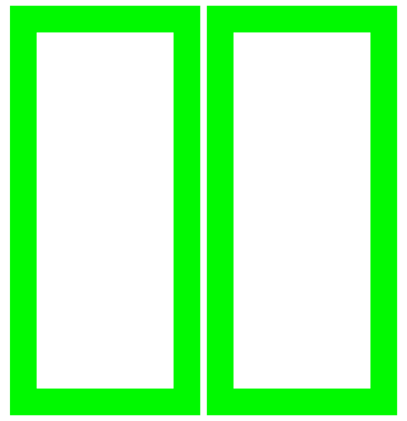
# (2) Optimalität

$x$

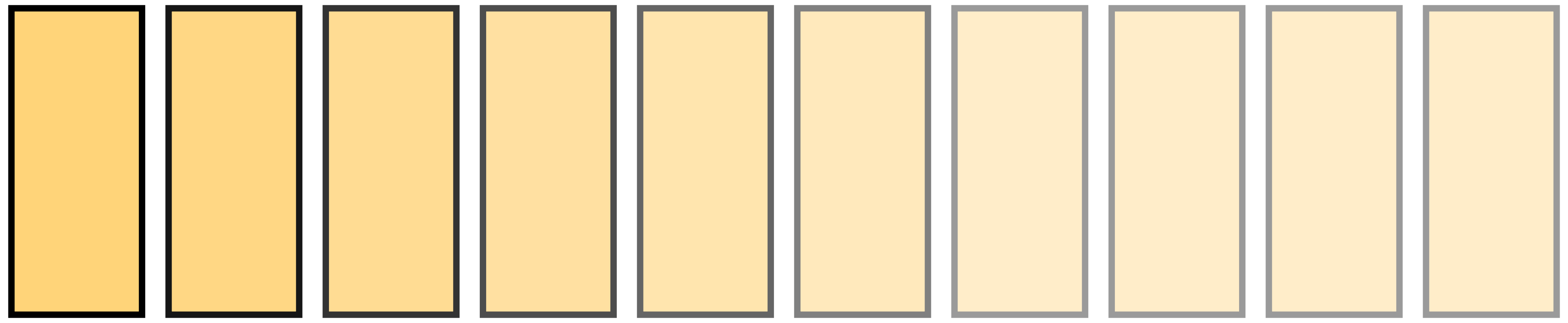
$\frac{p_i}{z_i}$

# (2) Optimalität

$x$

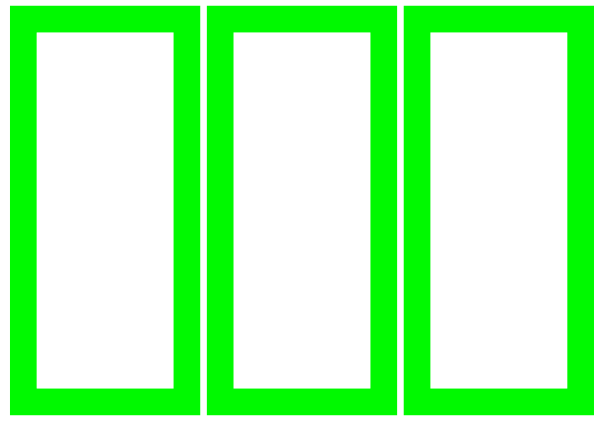


$\frac{p_i}{z_i}$

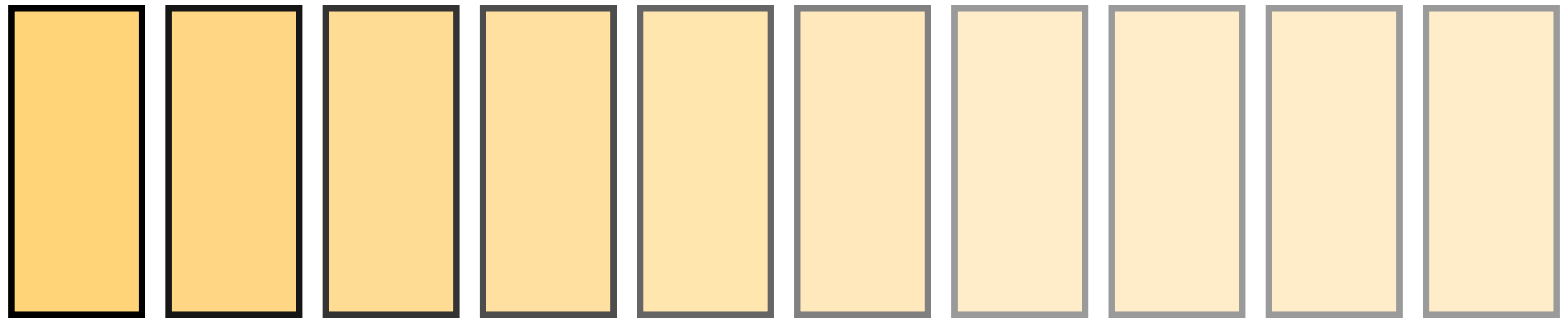


# (2) Optimalität

$x$



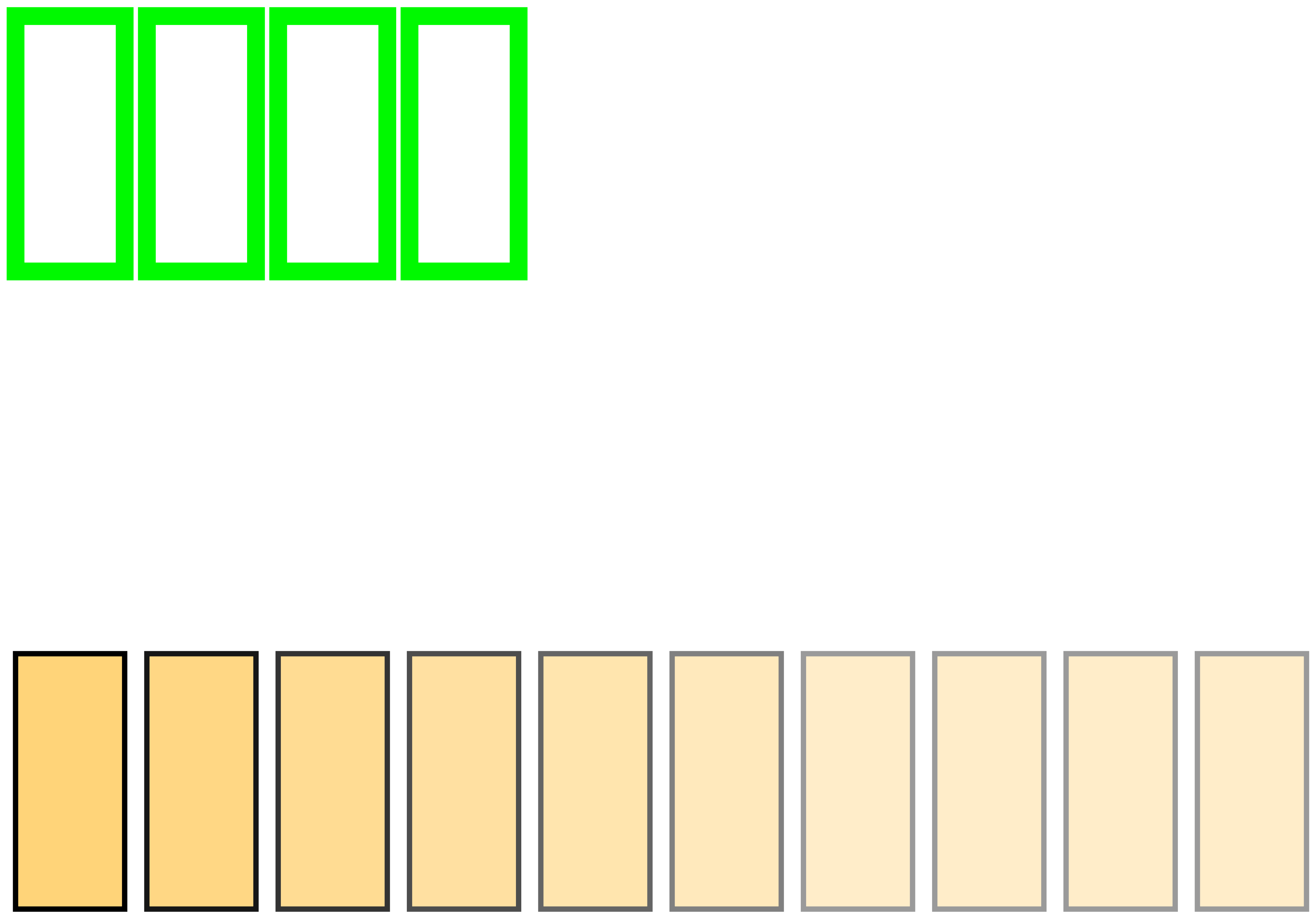
$\frac{p_i}{z_i}$



# (2) Optimalität

$x$

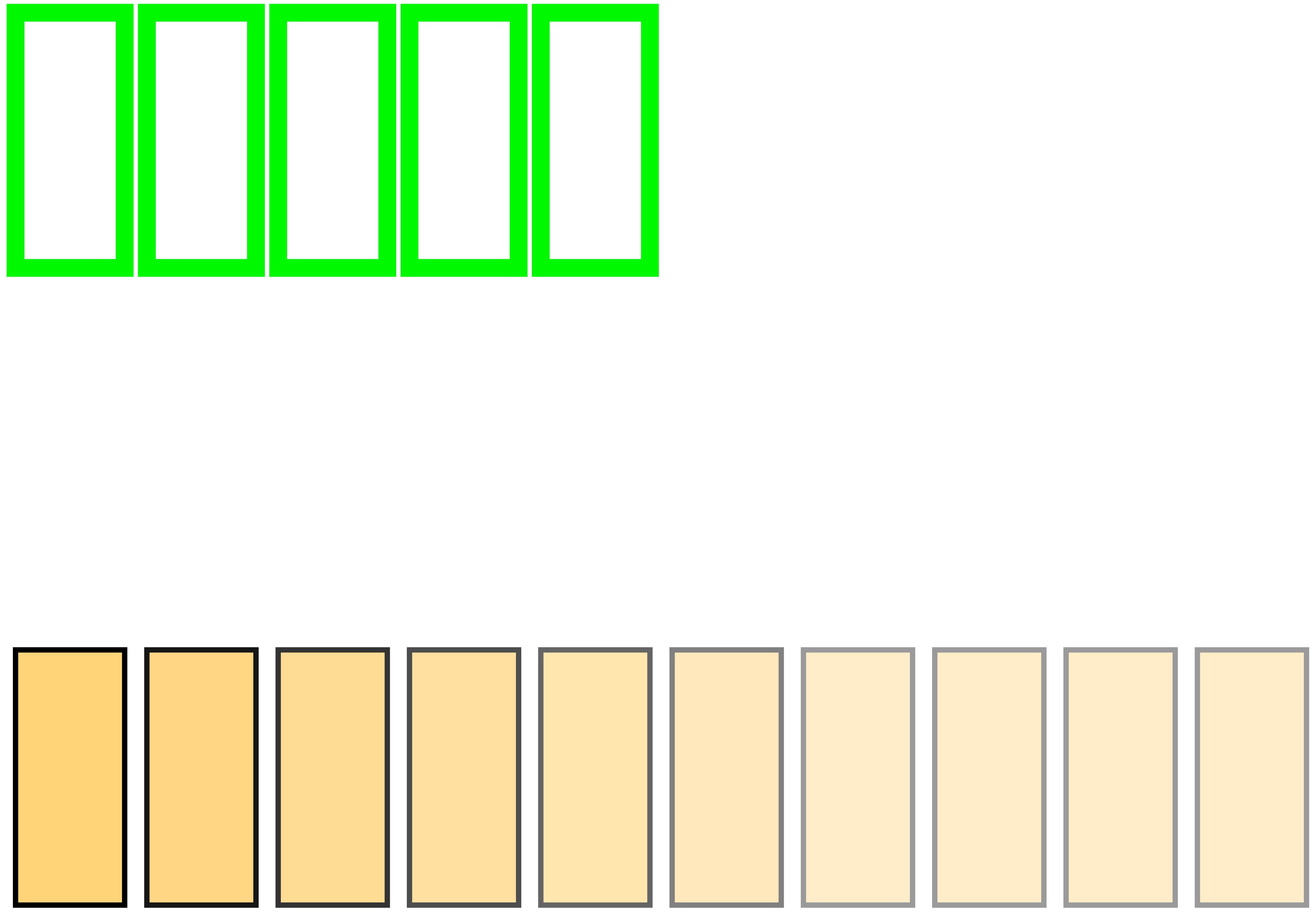
$\frac{p_i}{z_i}$



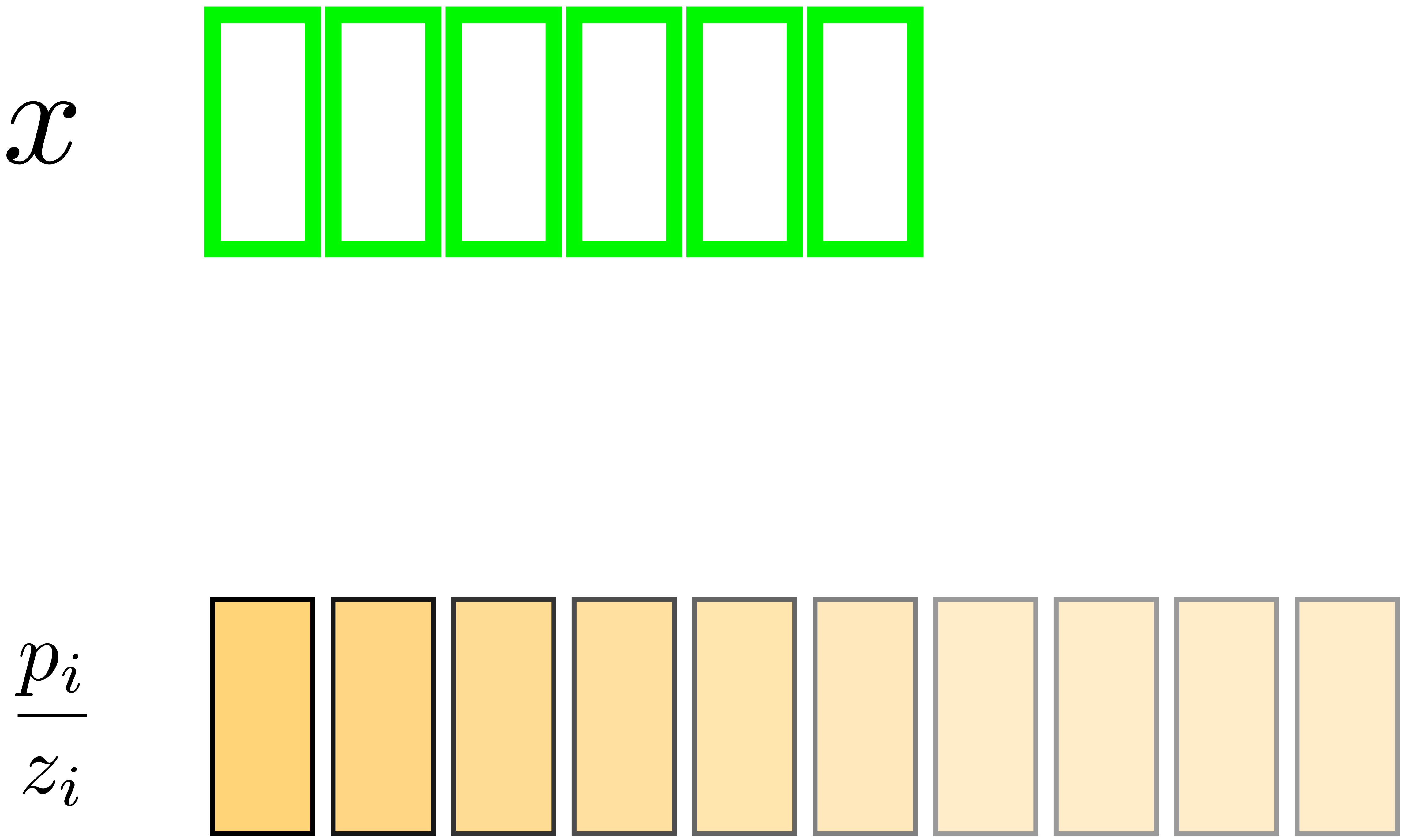
# (2) Optimalität

$x$

$\frac{p_i}{z_i}$

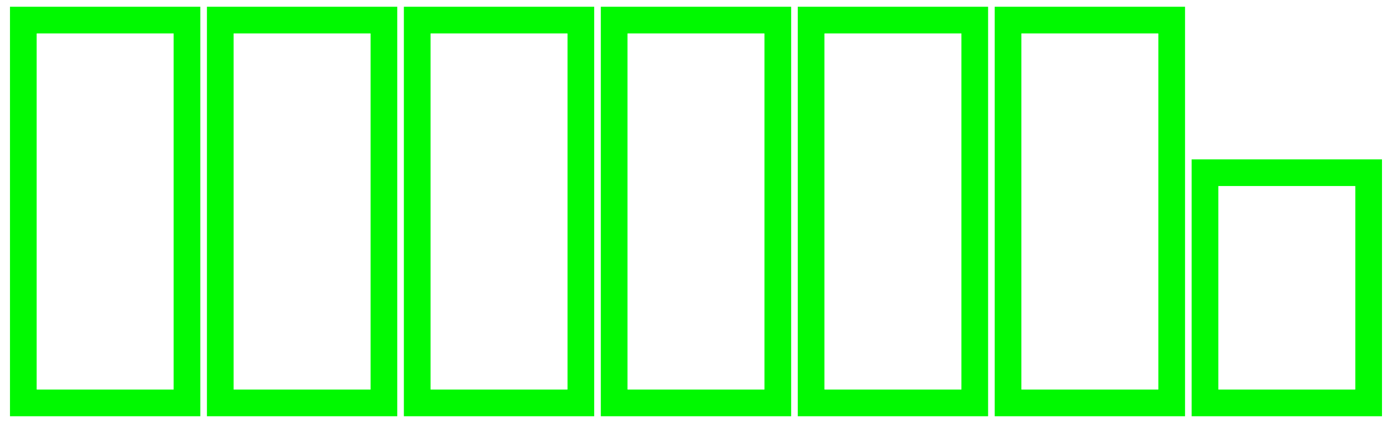


# (2) Optimalität

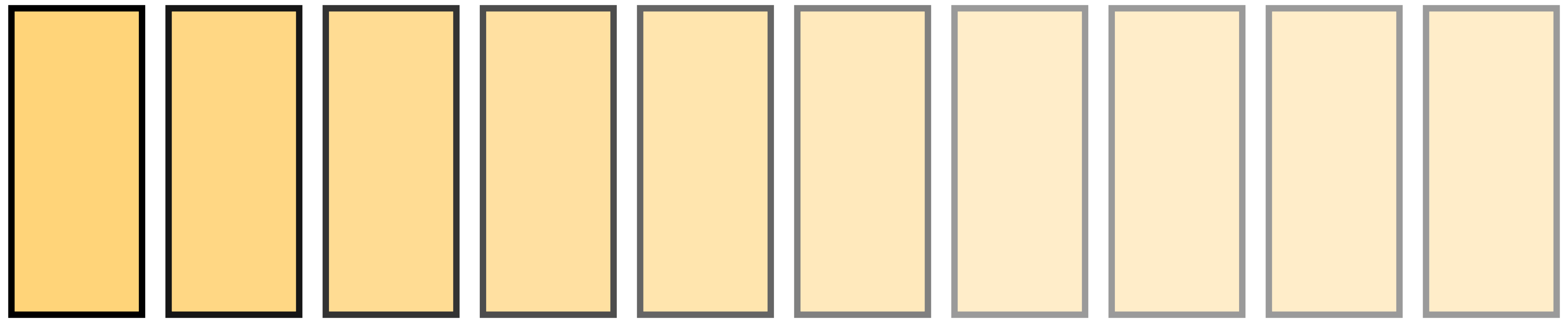


# (2) Optimalität

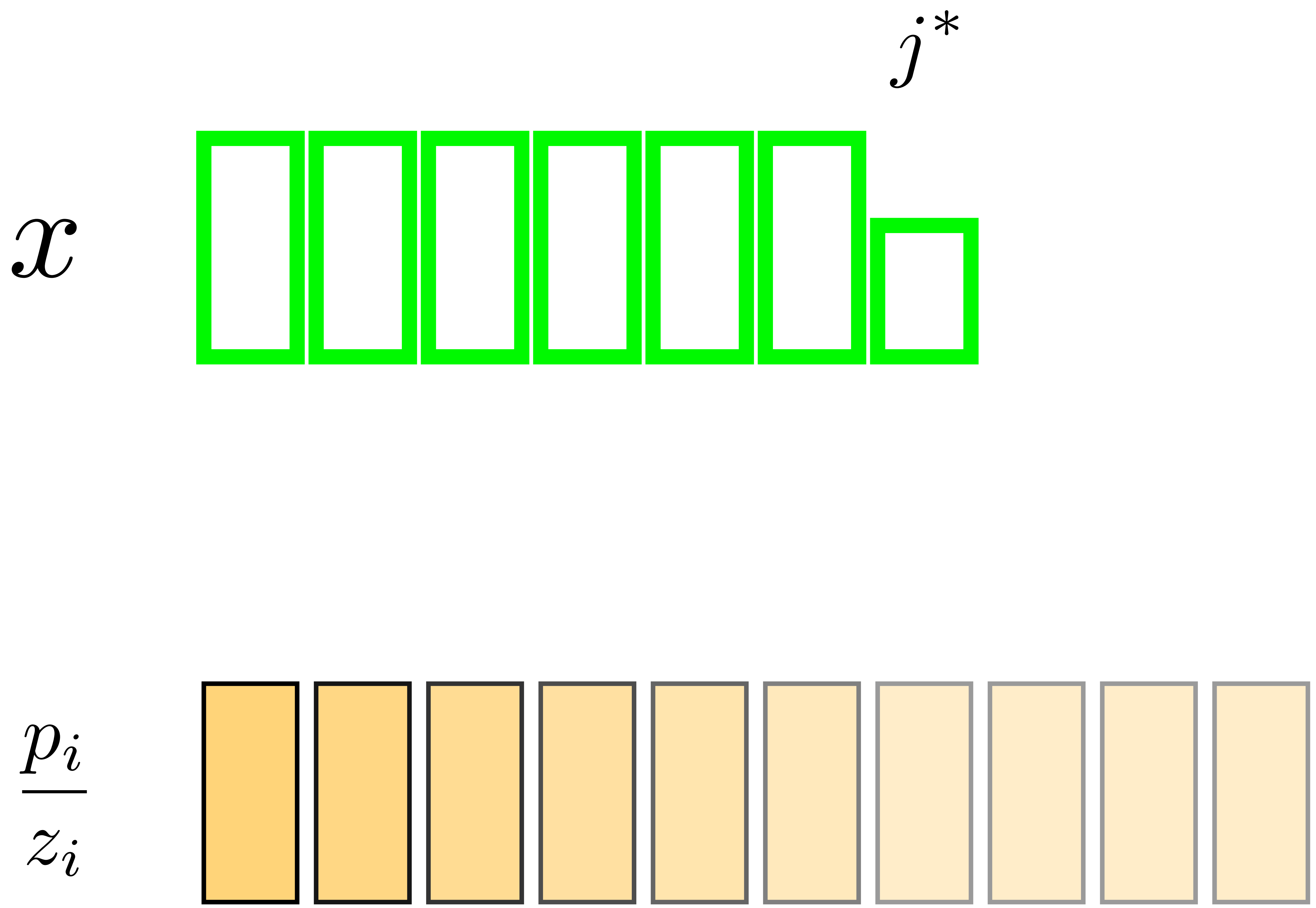
$x$



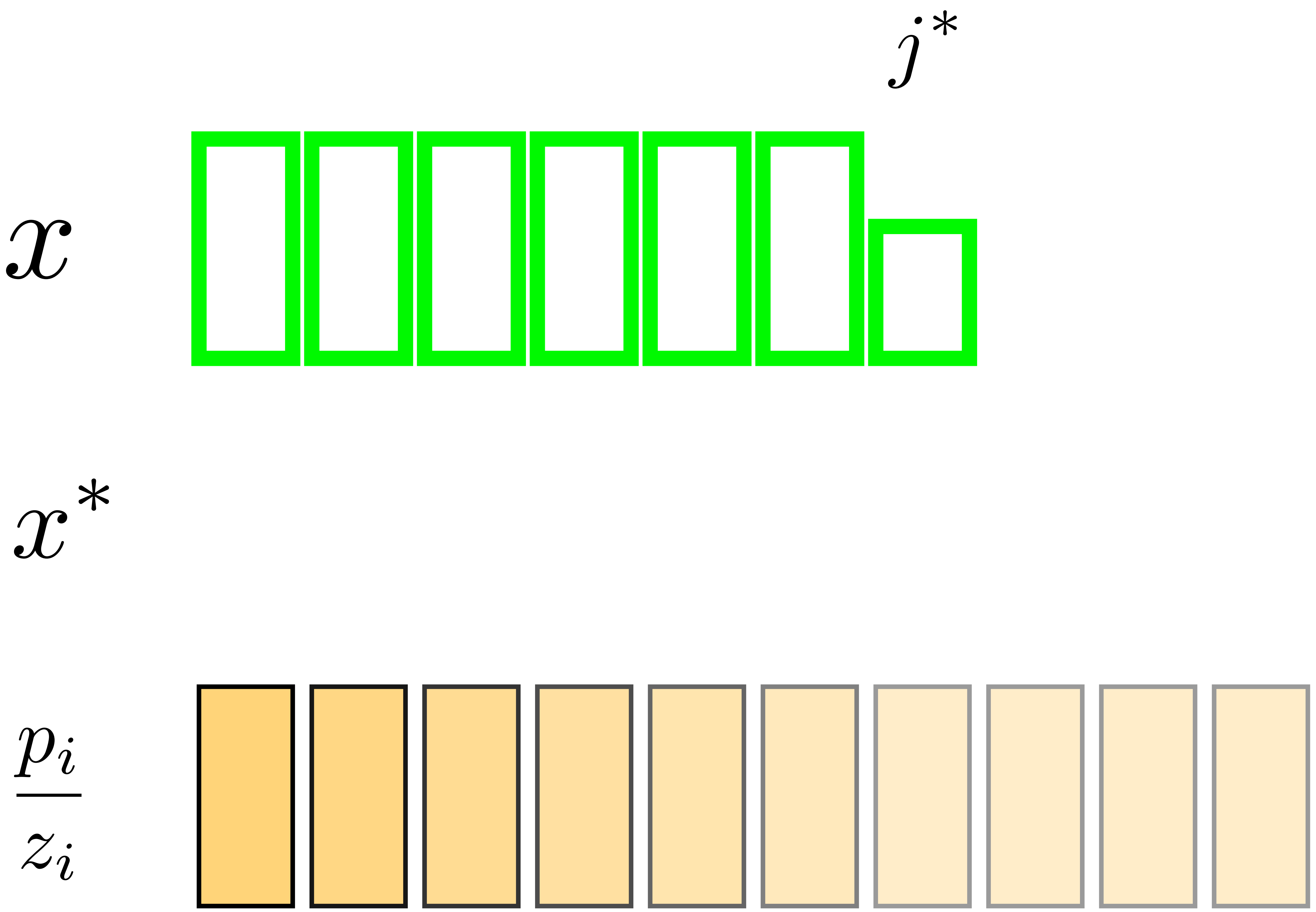
$\frac{p_i}{z_i}$



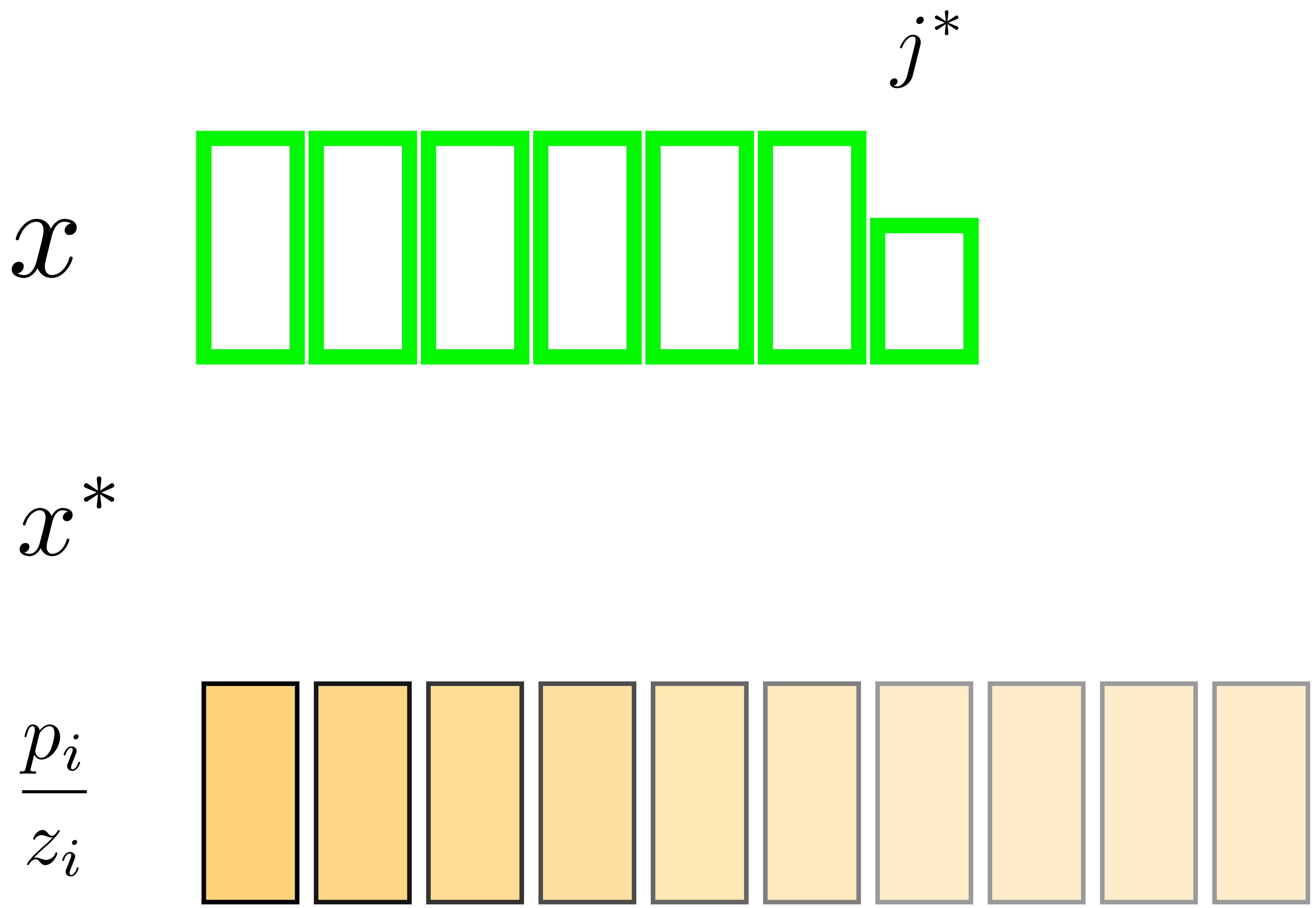
# (2) Optimalität



# (2) Optimalität

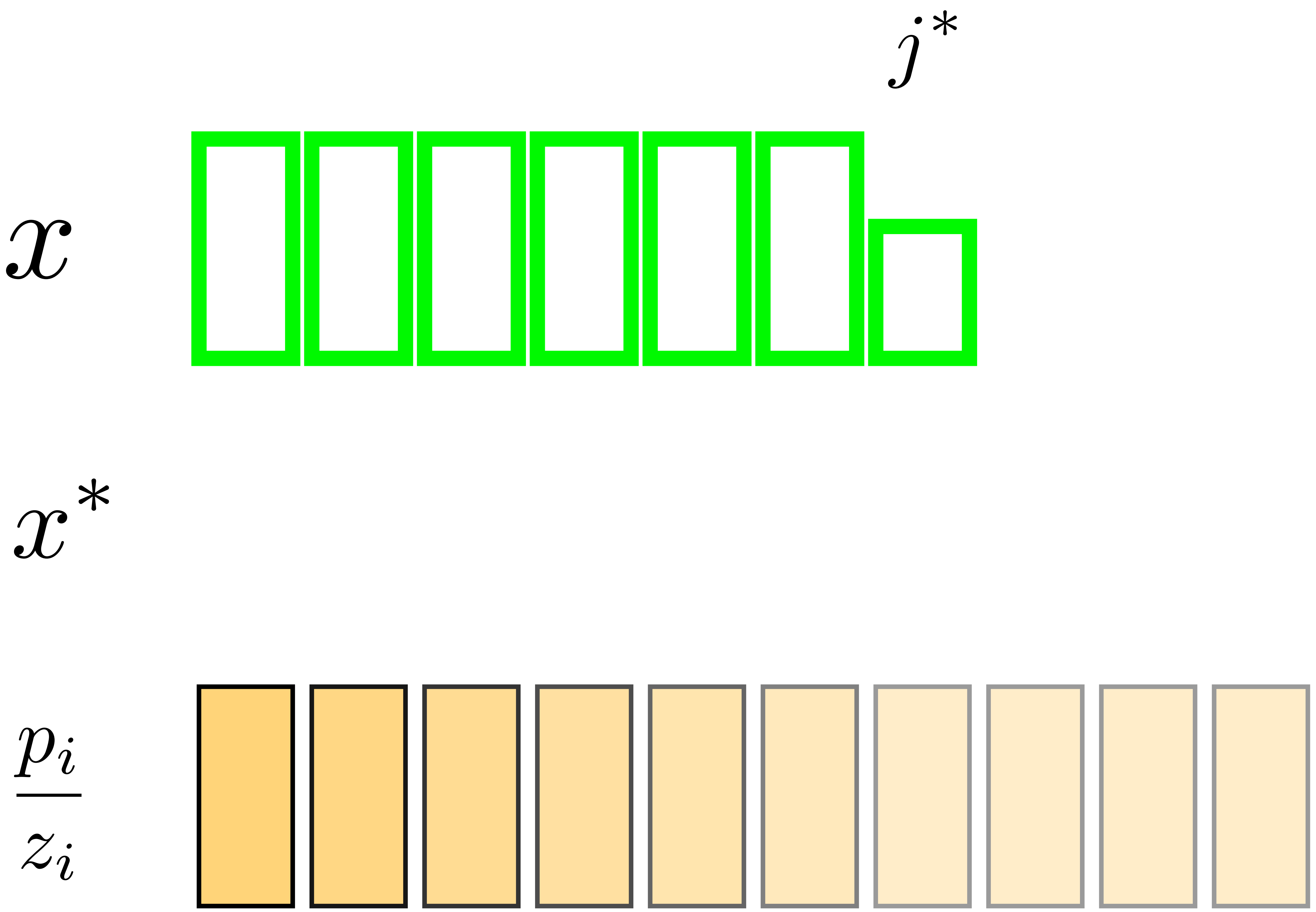


# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

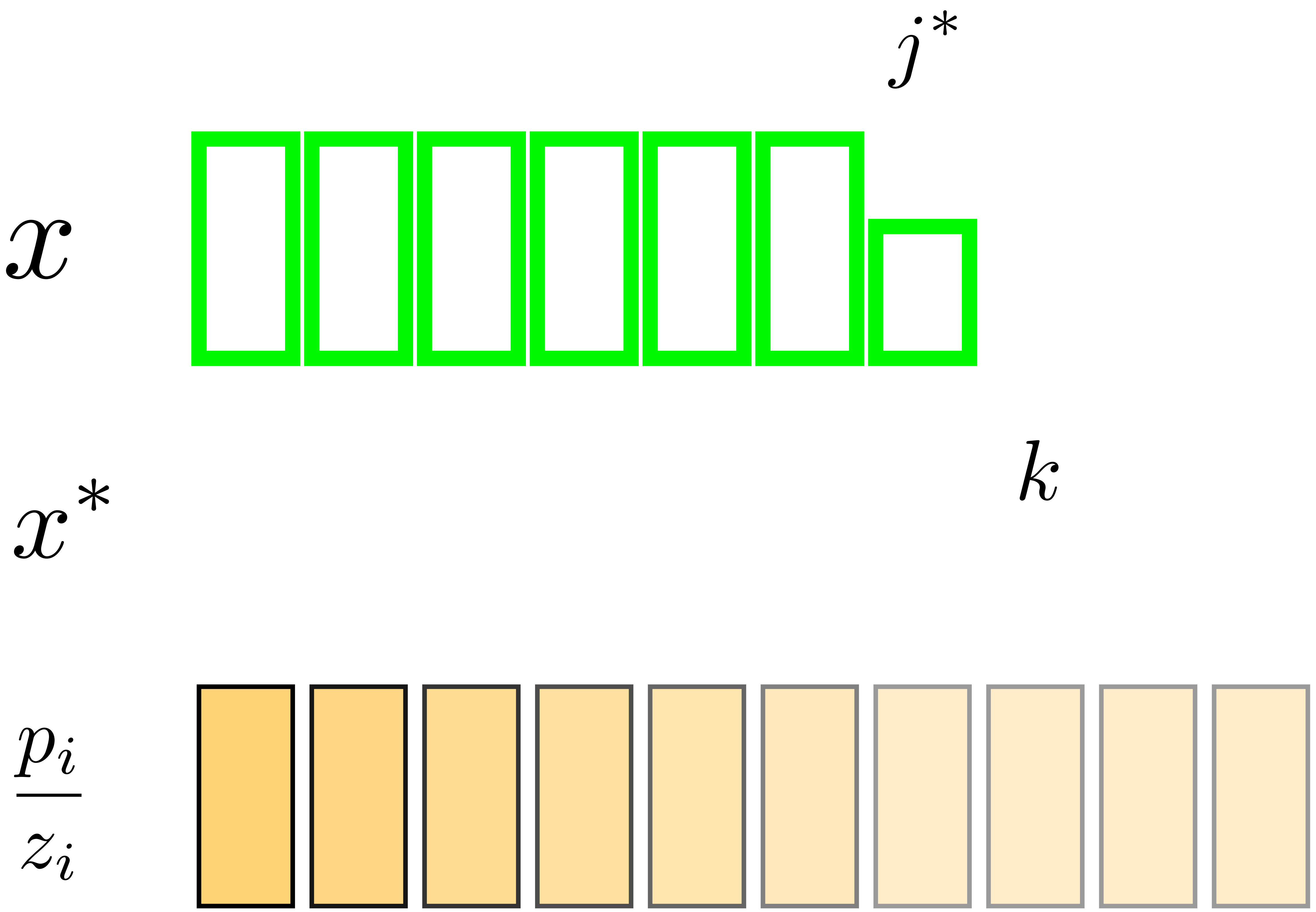
# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

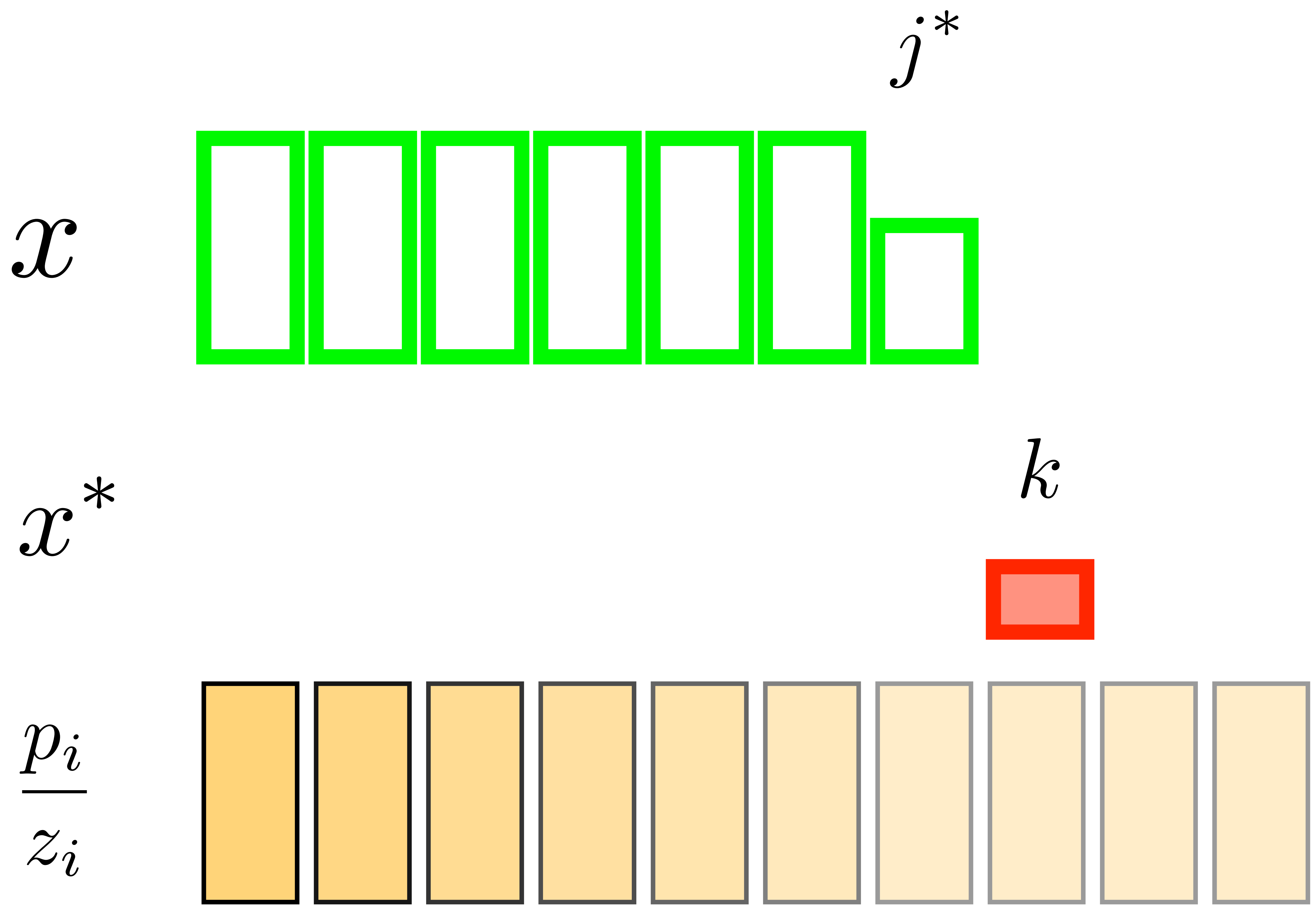
# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

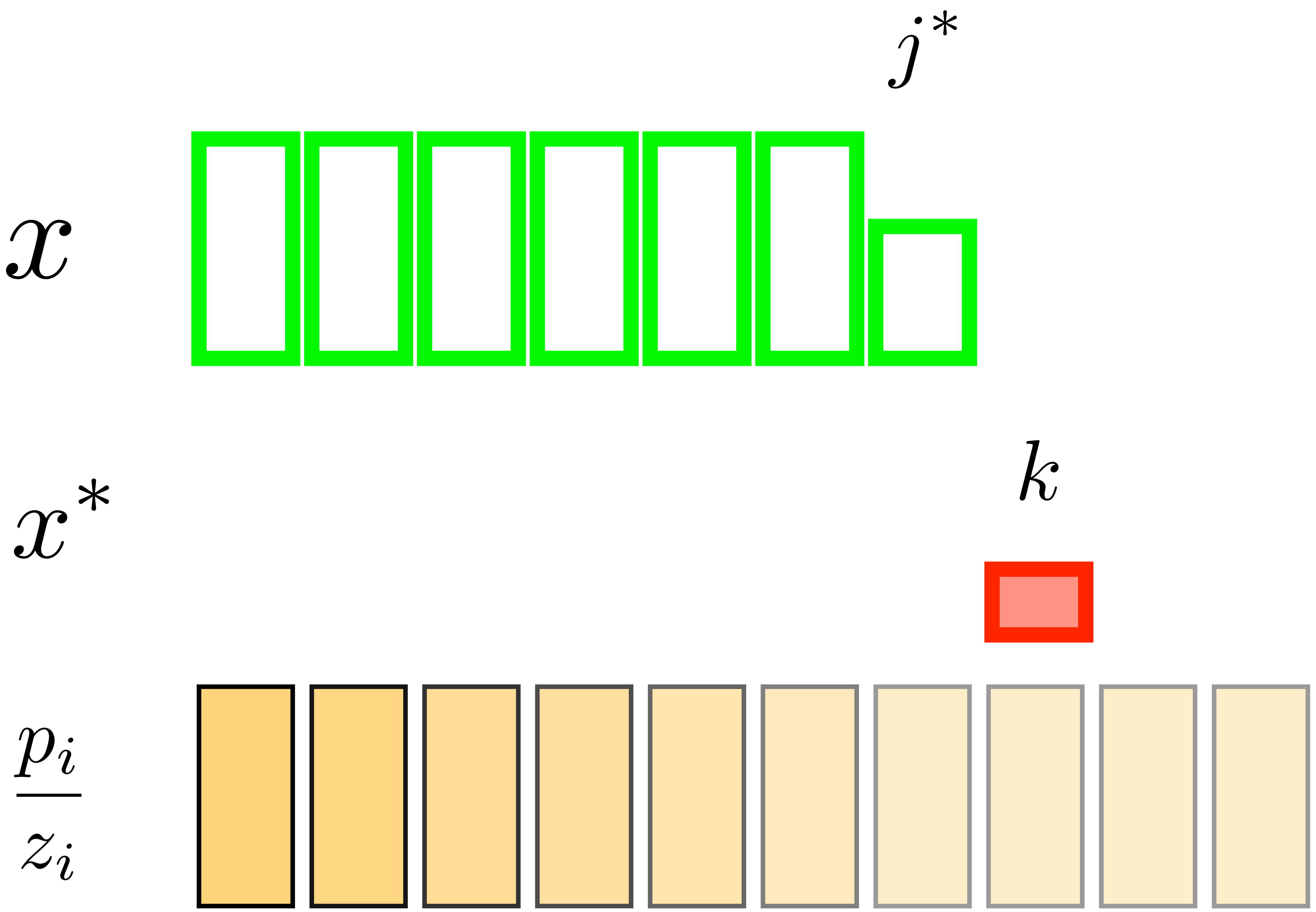
# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

# (2) Optimalität

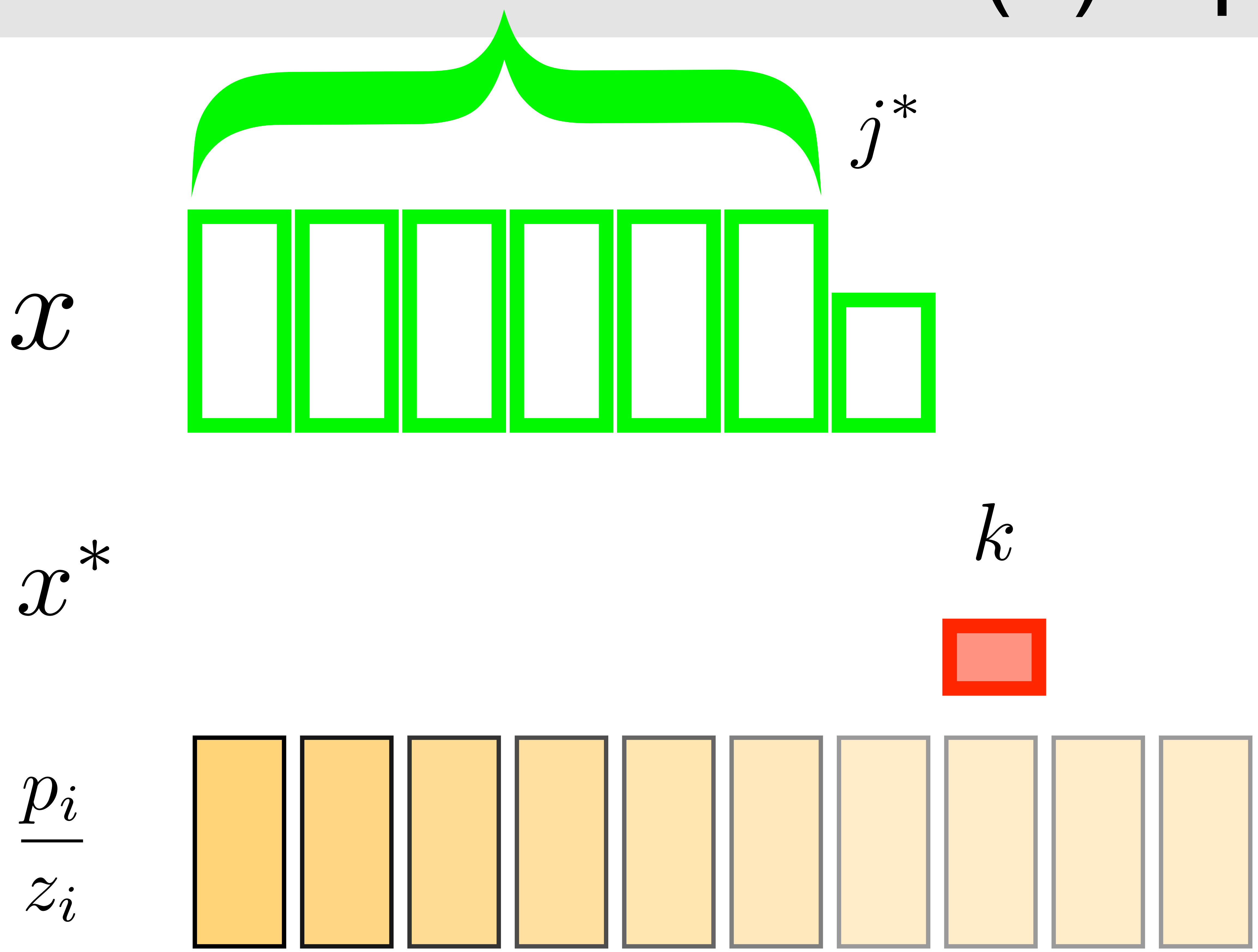



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

# (2) Optimalität

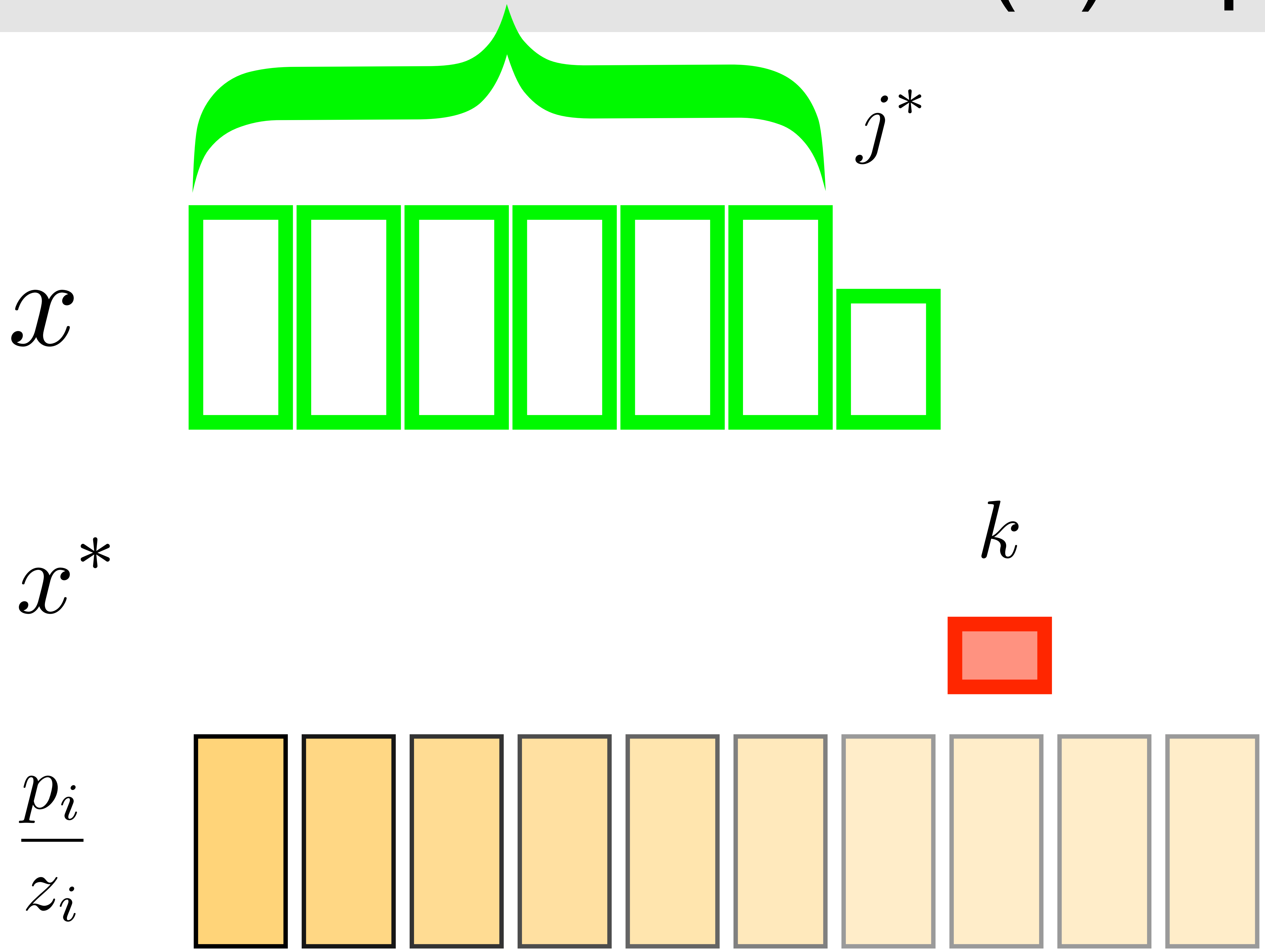



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

# (2) Optimalität



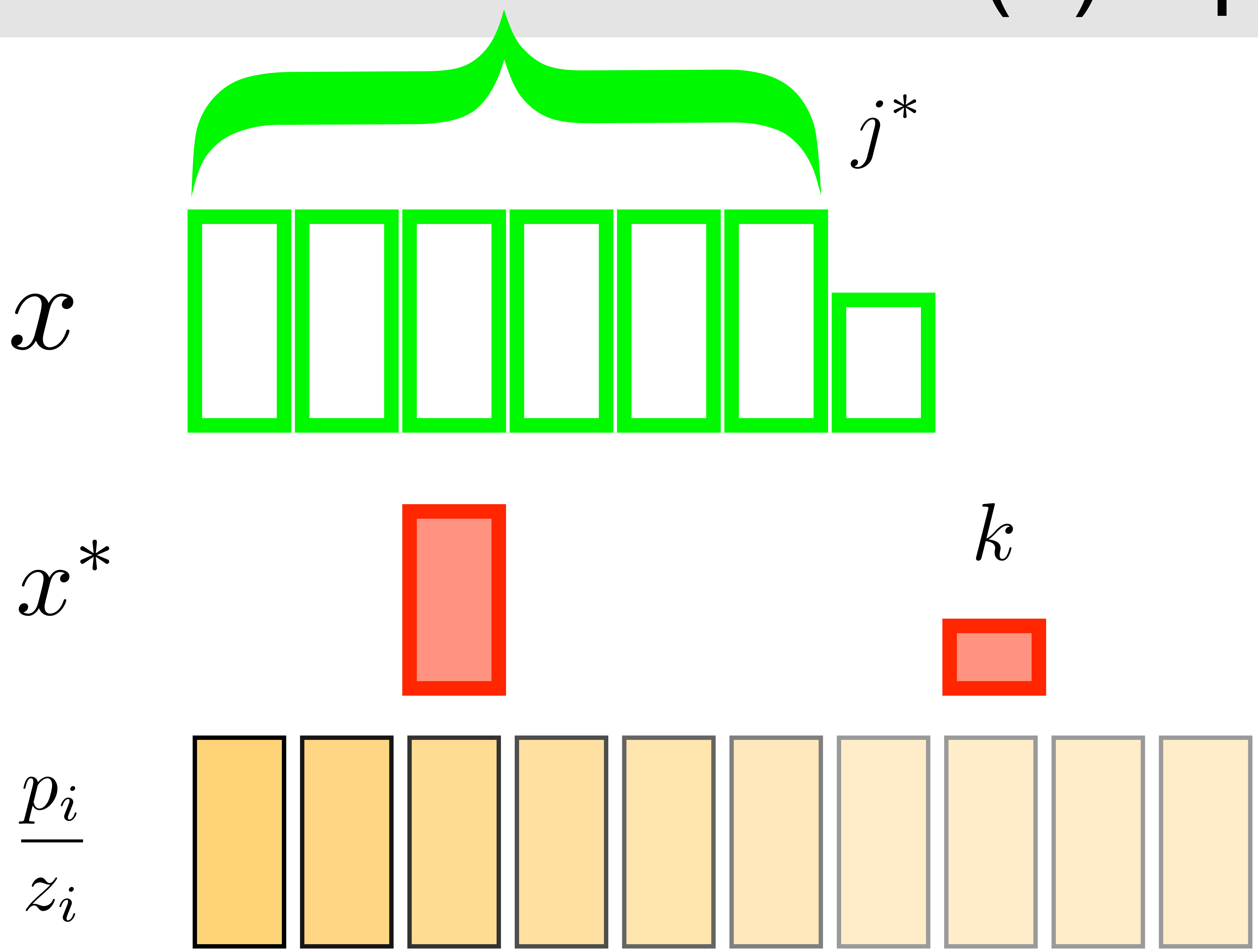

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

# (2) Optimalität



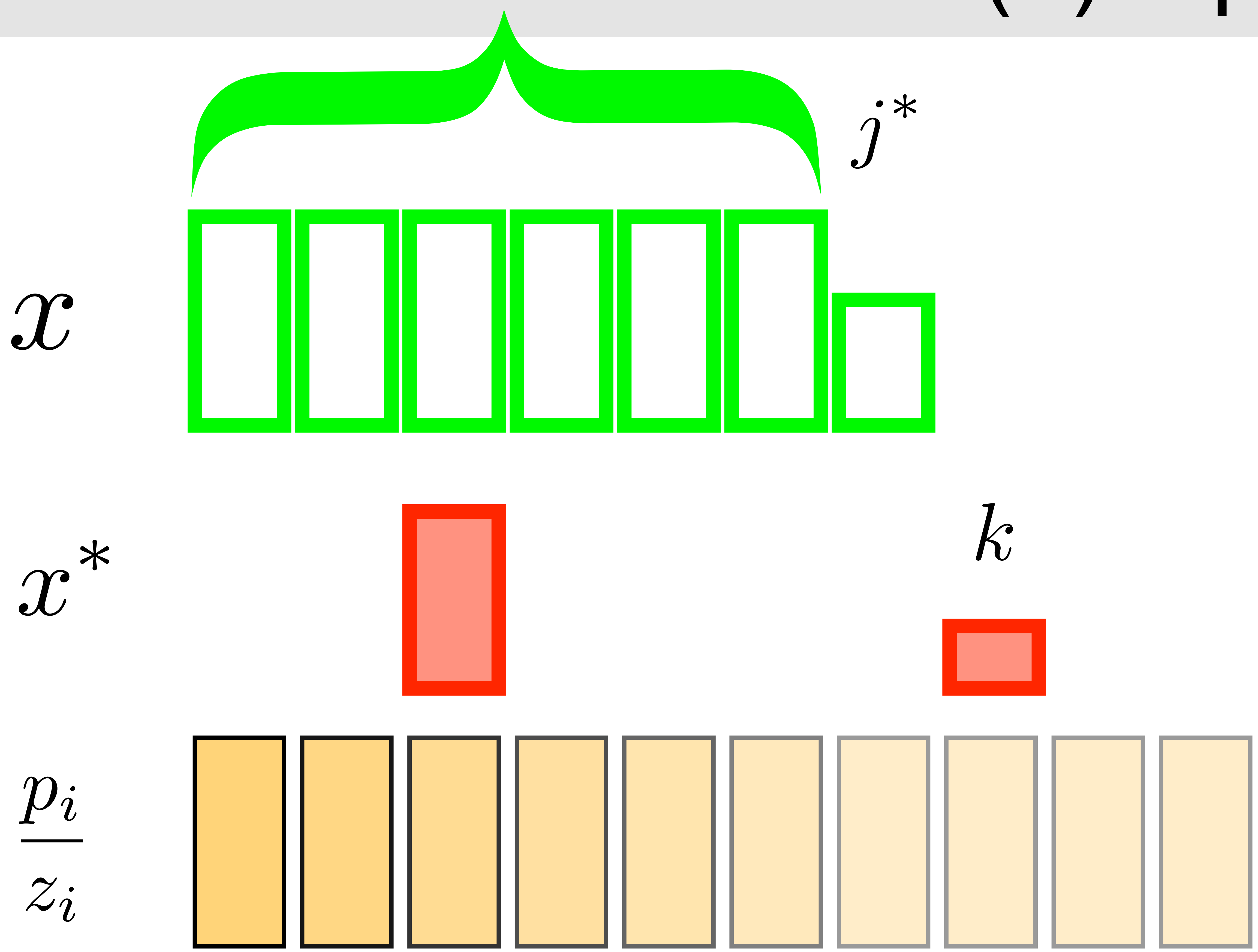

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \ \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \ x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \ \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \ x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

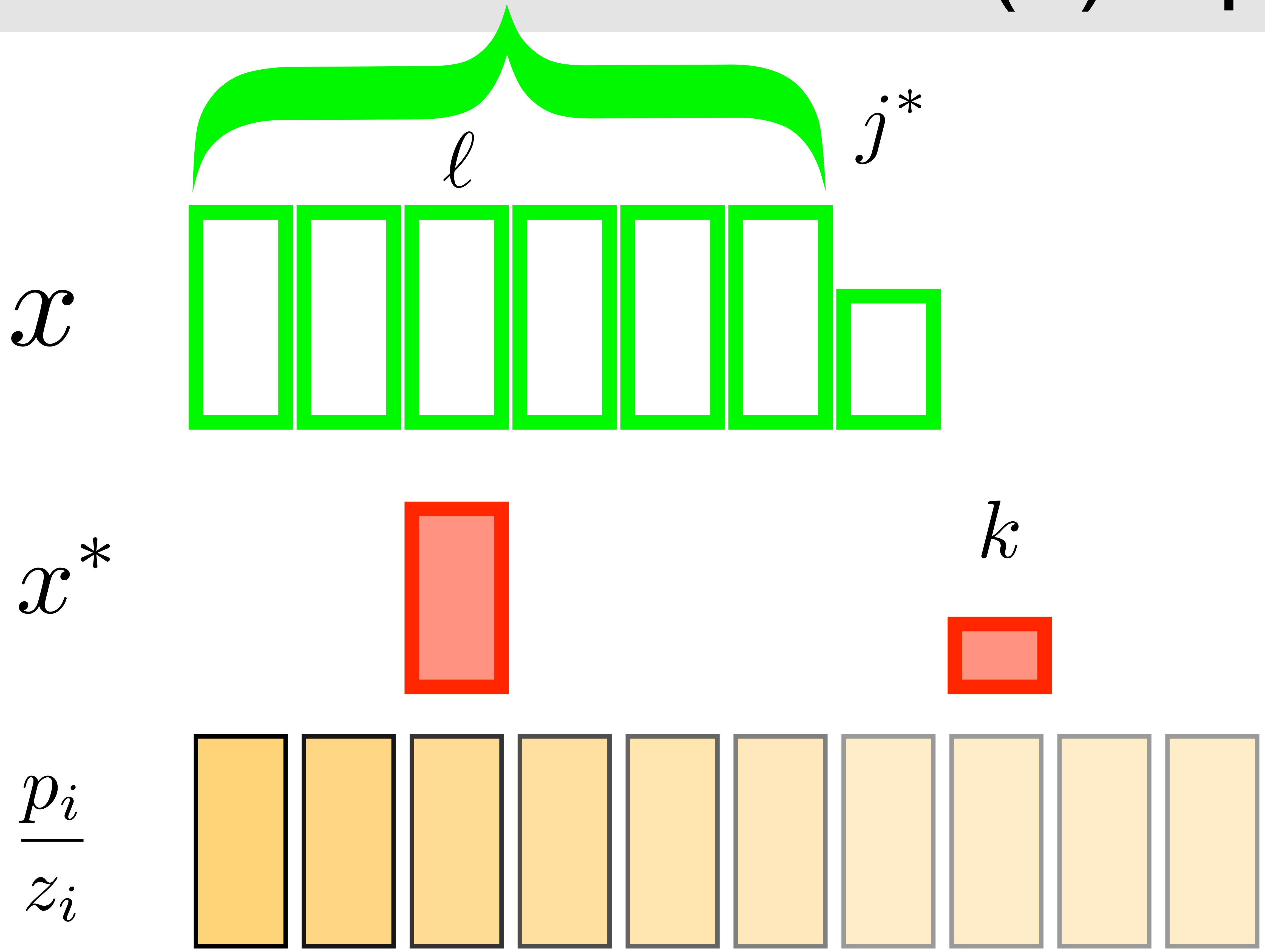
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \ \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \ x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \ \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \ x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \ \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \ x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

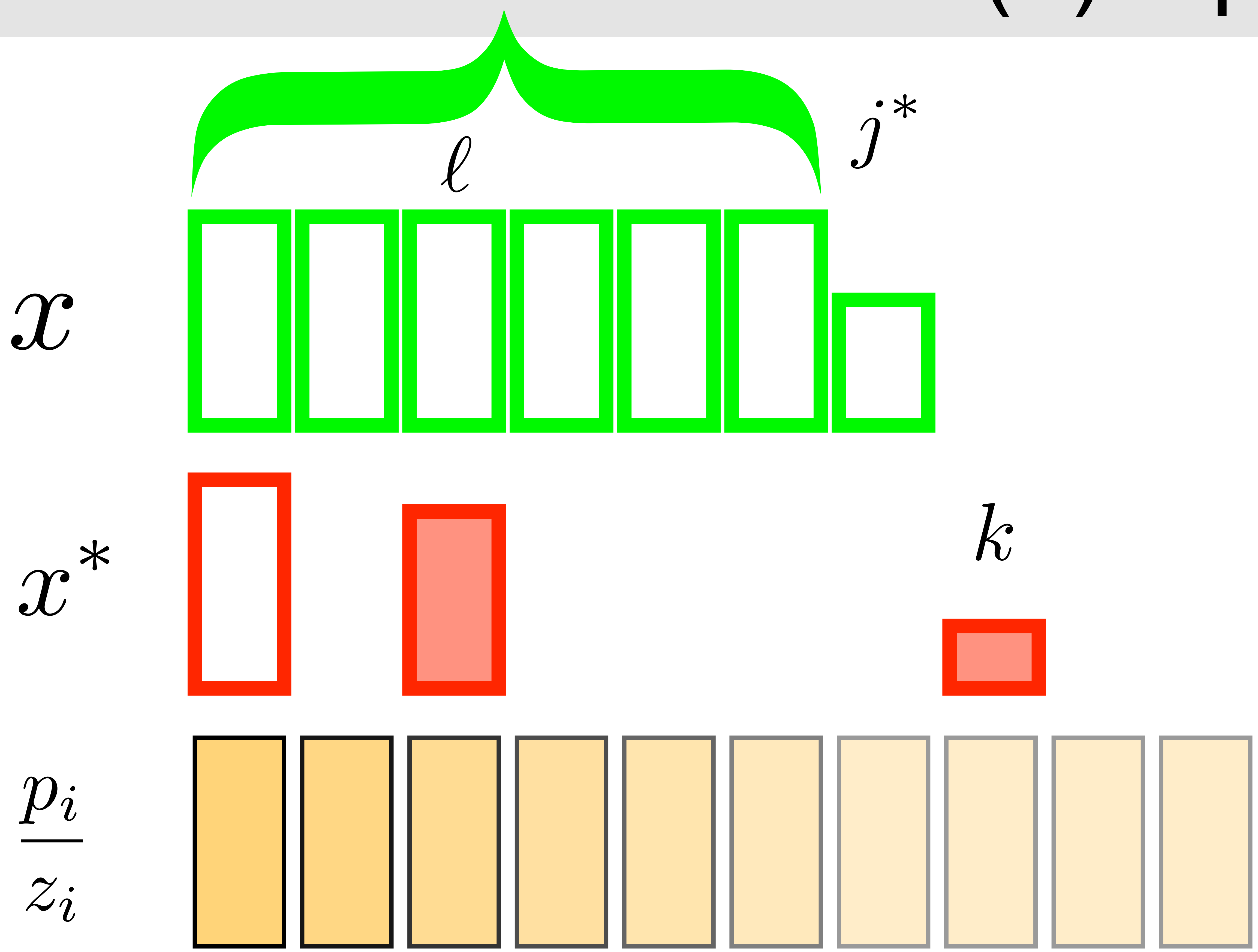
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

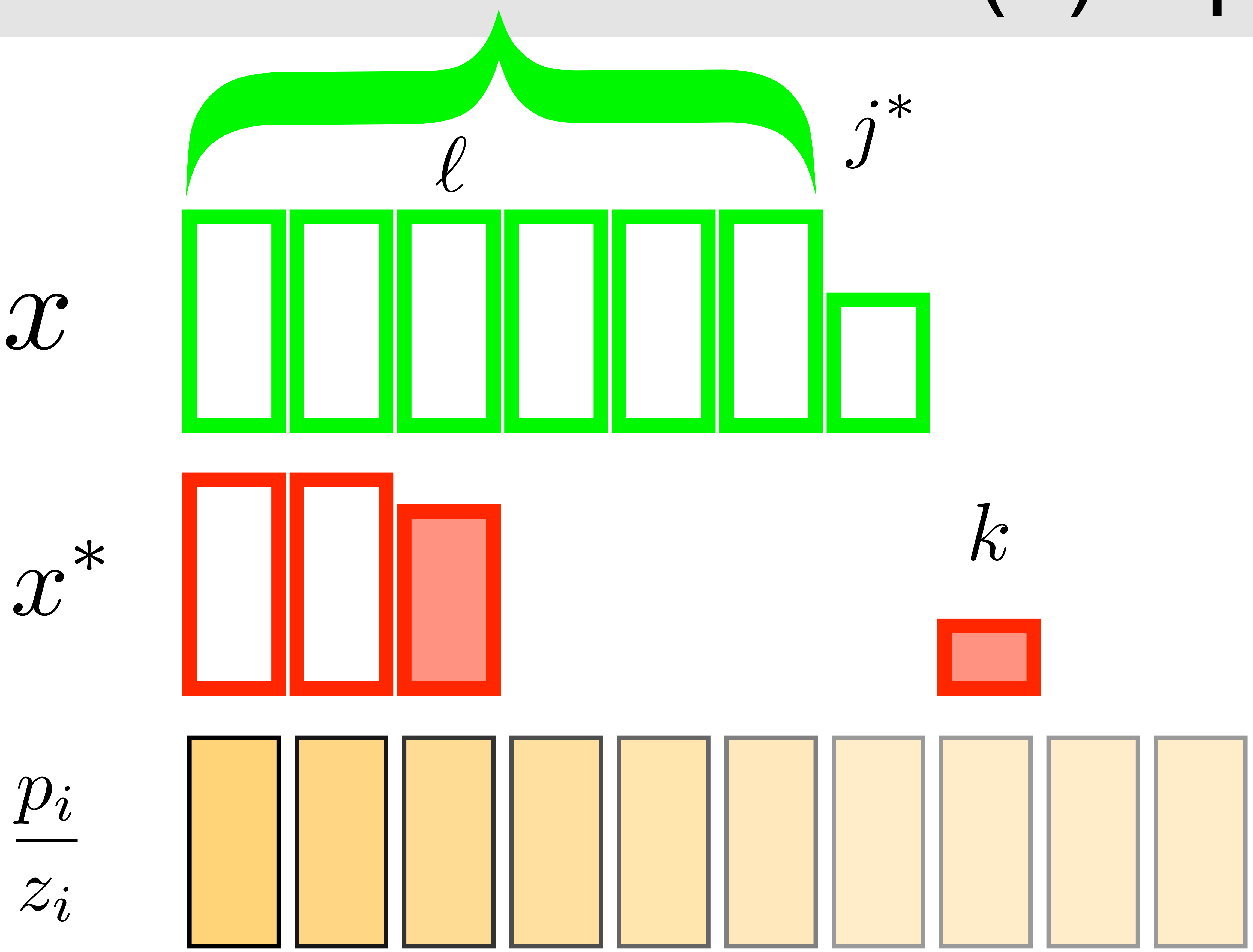
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \ \exists\ k \in \{1, \ldots, n\} : \ x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \ \exists\ k \in \{j^*, \ldots, n\} : \ x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \ \exists\ \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \ x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

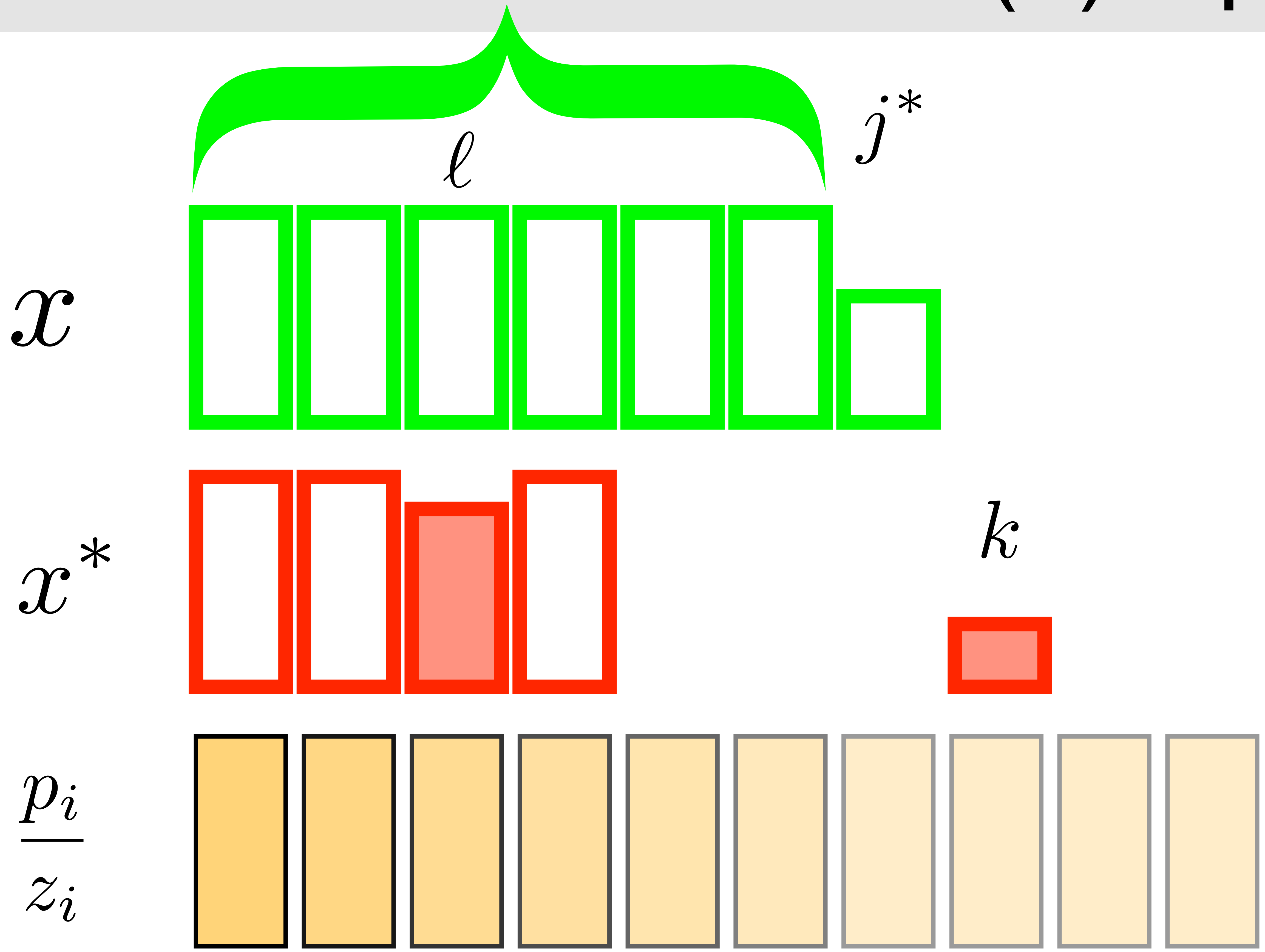
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

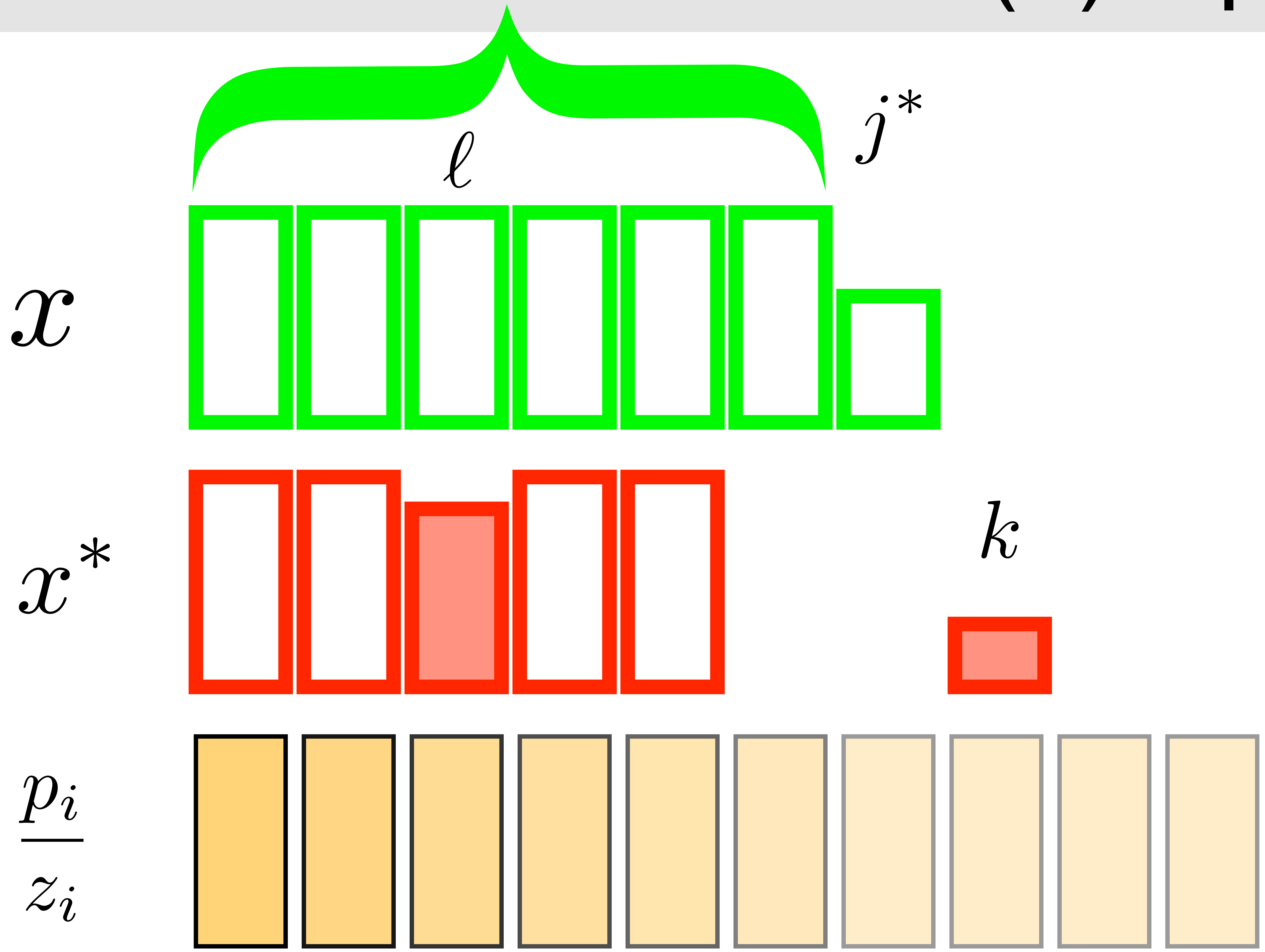
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

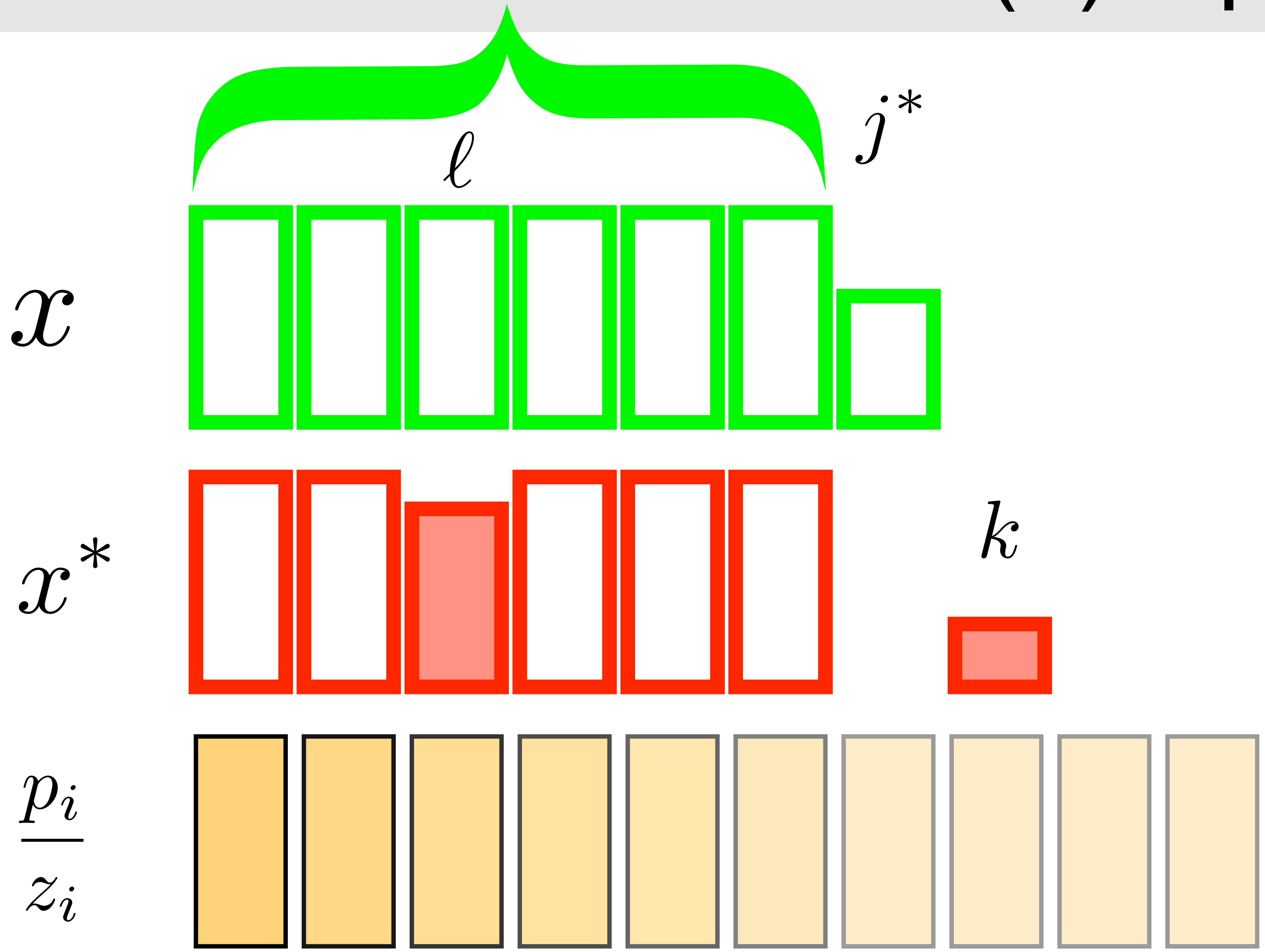
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

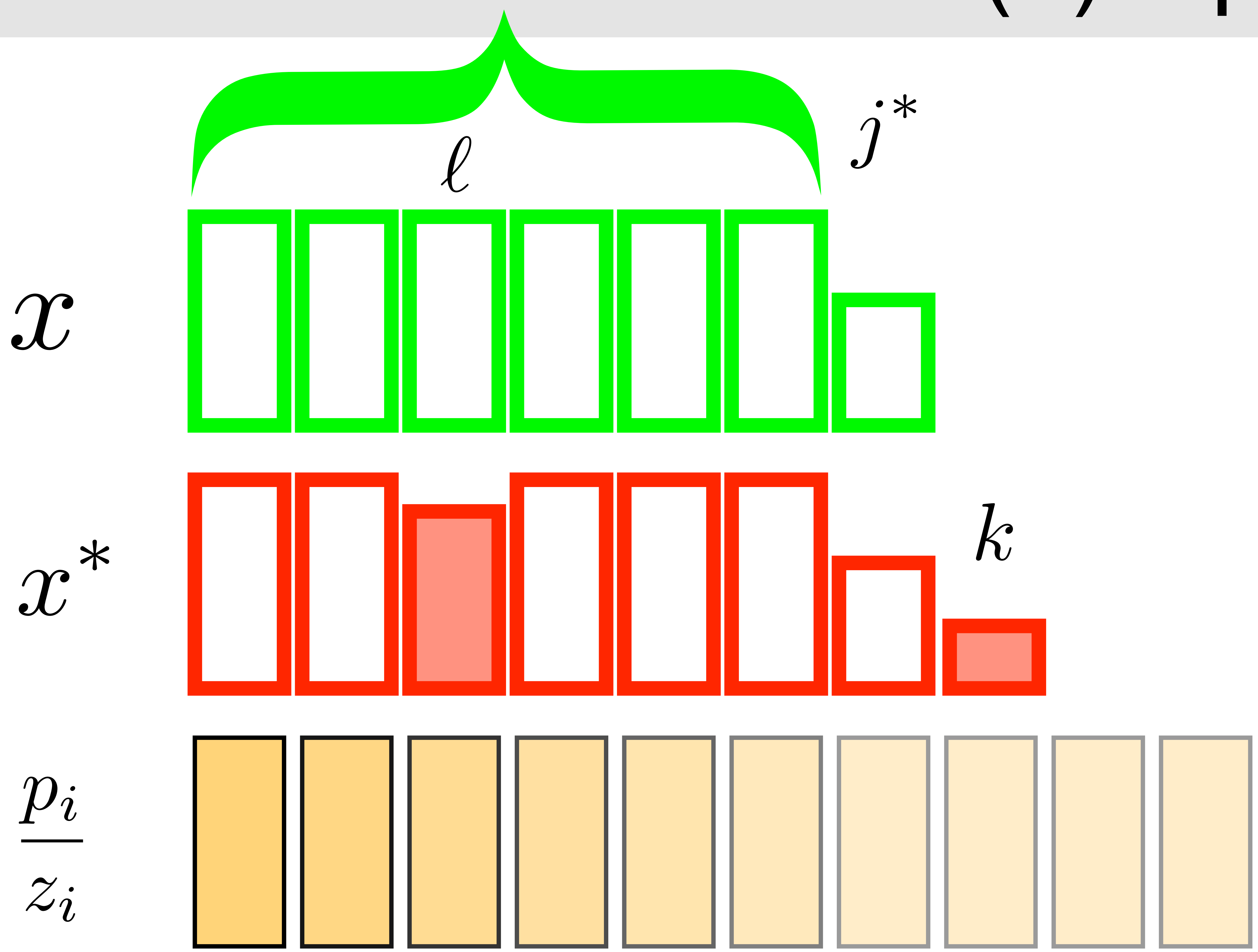
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

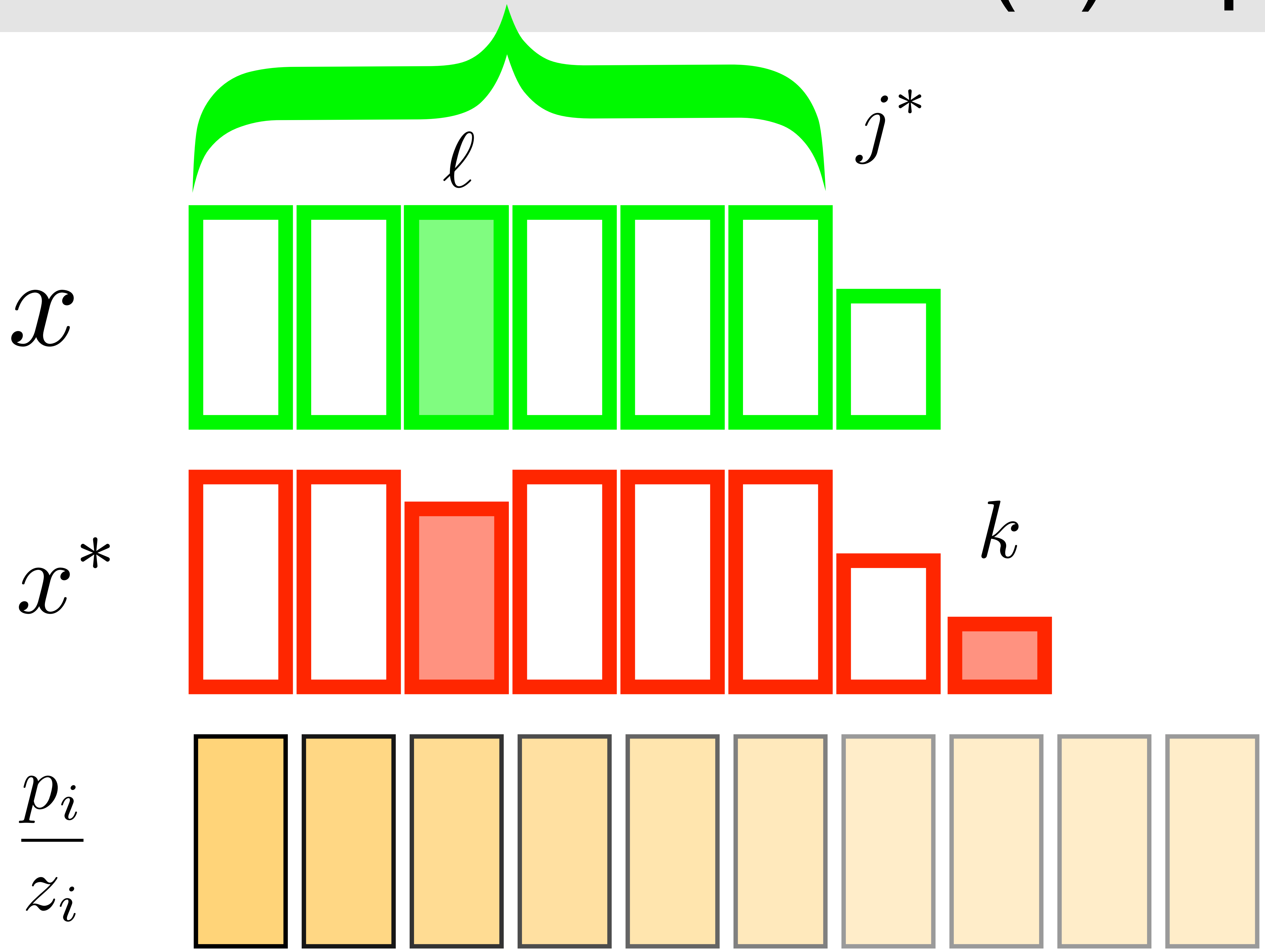
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \dots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \dots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \dots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

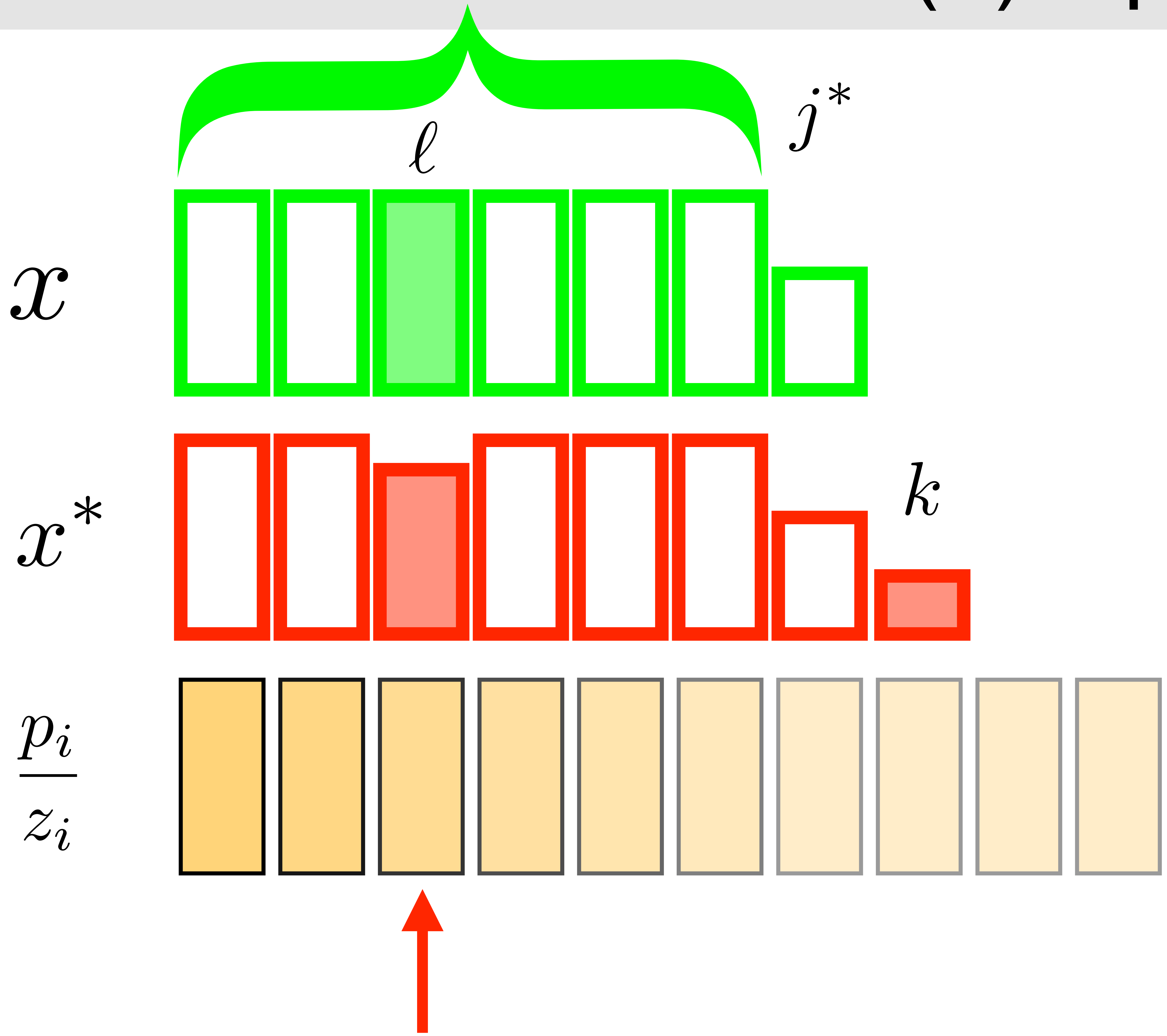
$$p_i > 0$$

$$\implies \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\implies \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\implies \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

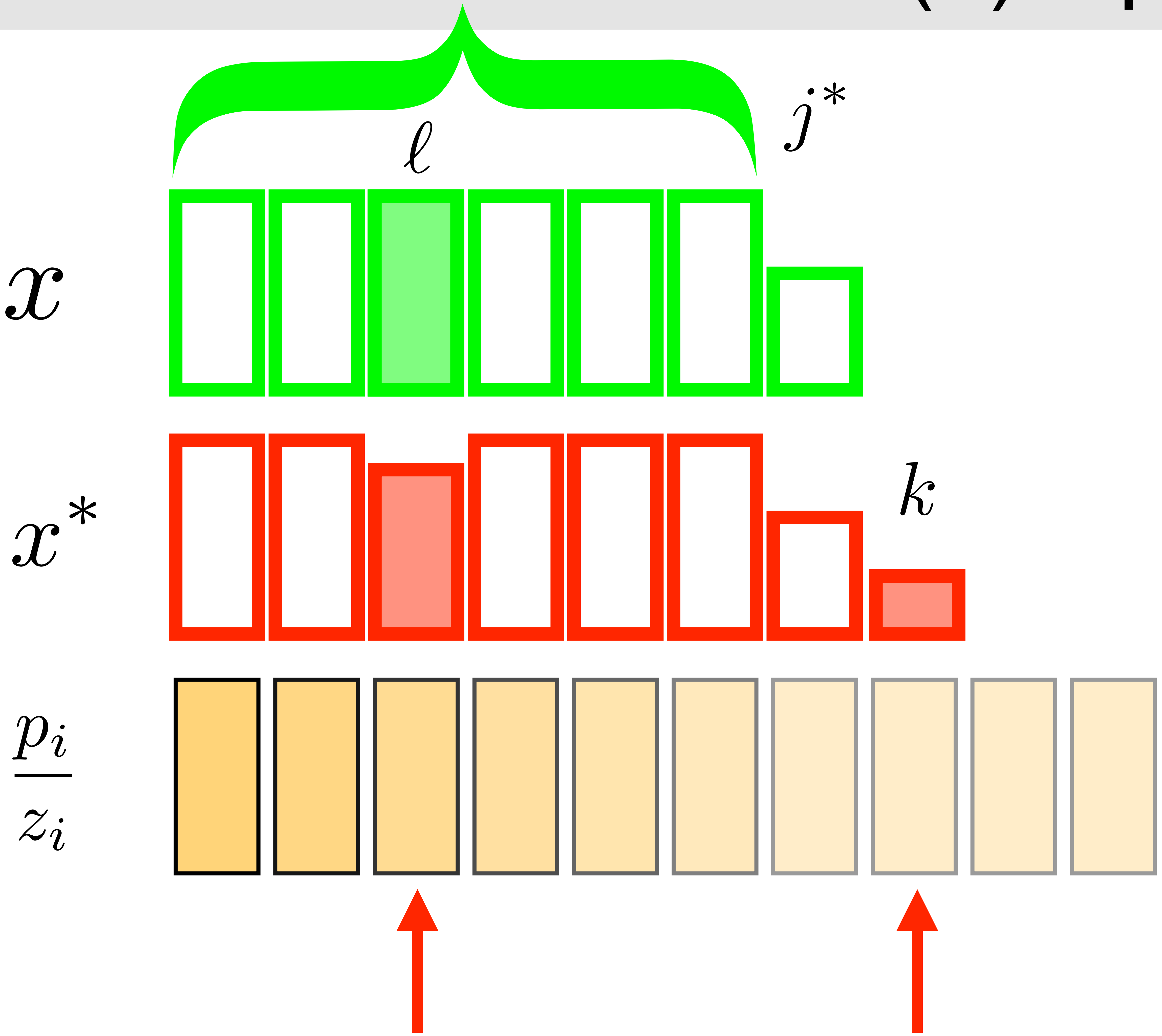
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \; \exists \, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \; \exists \, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \; \exists \, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

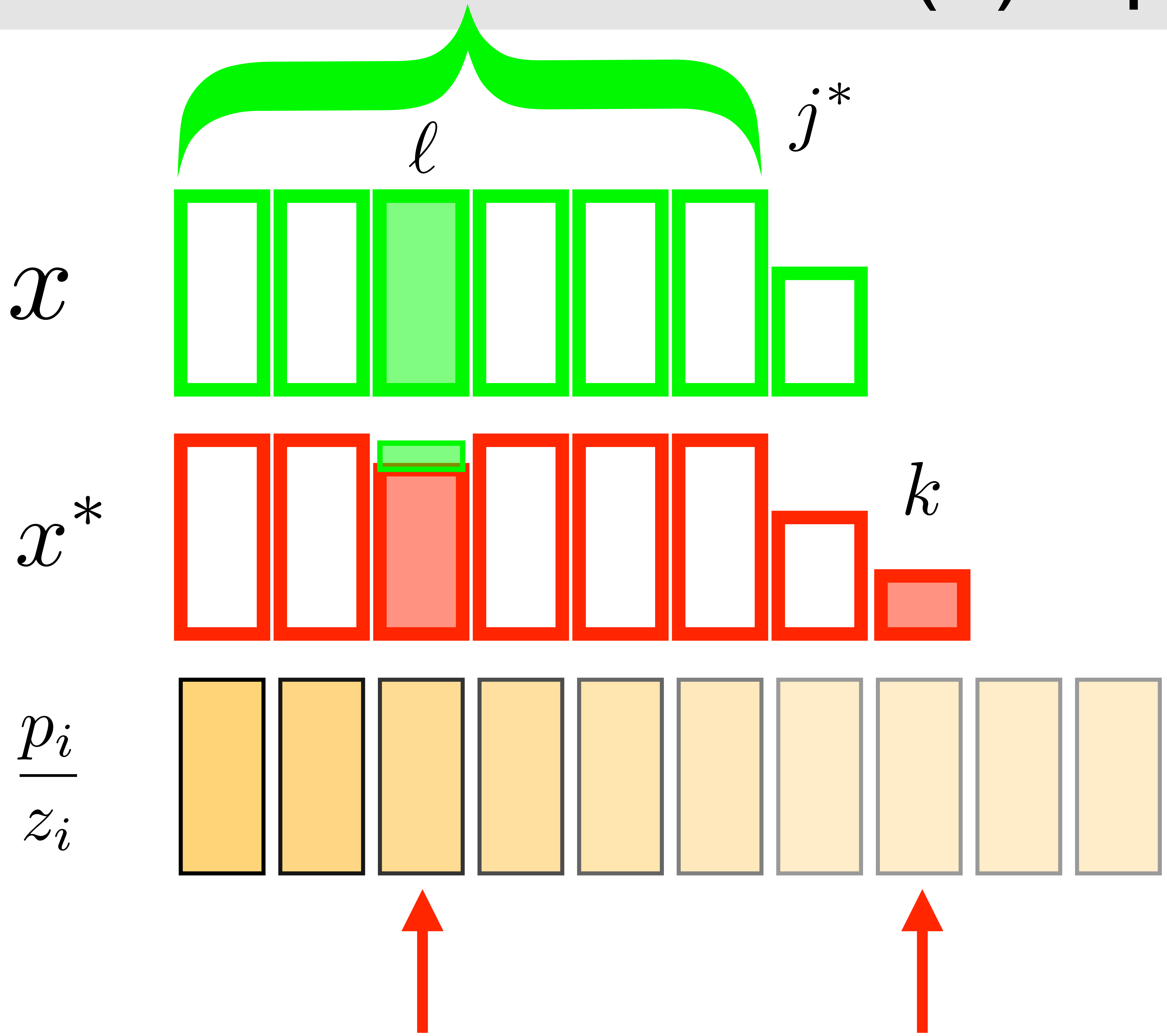
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

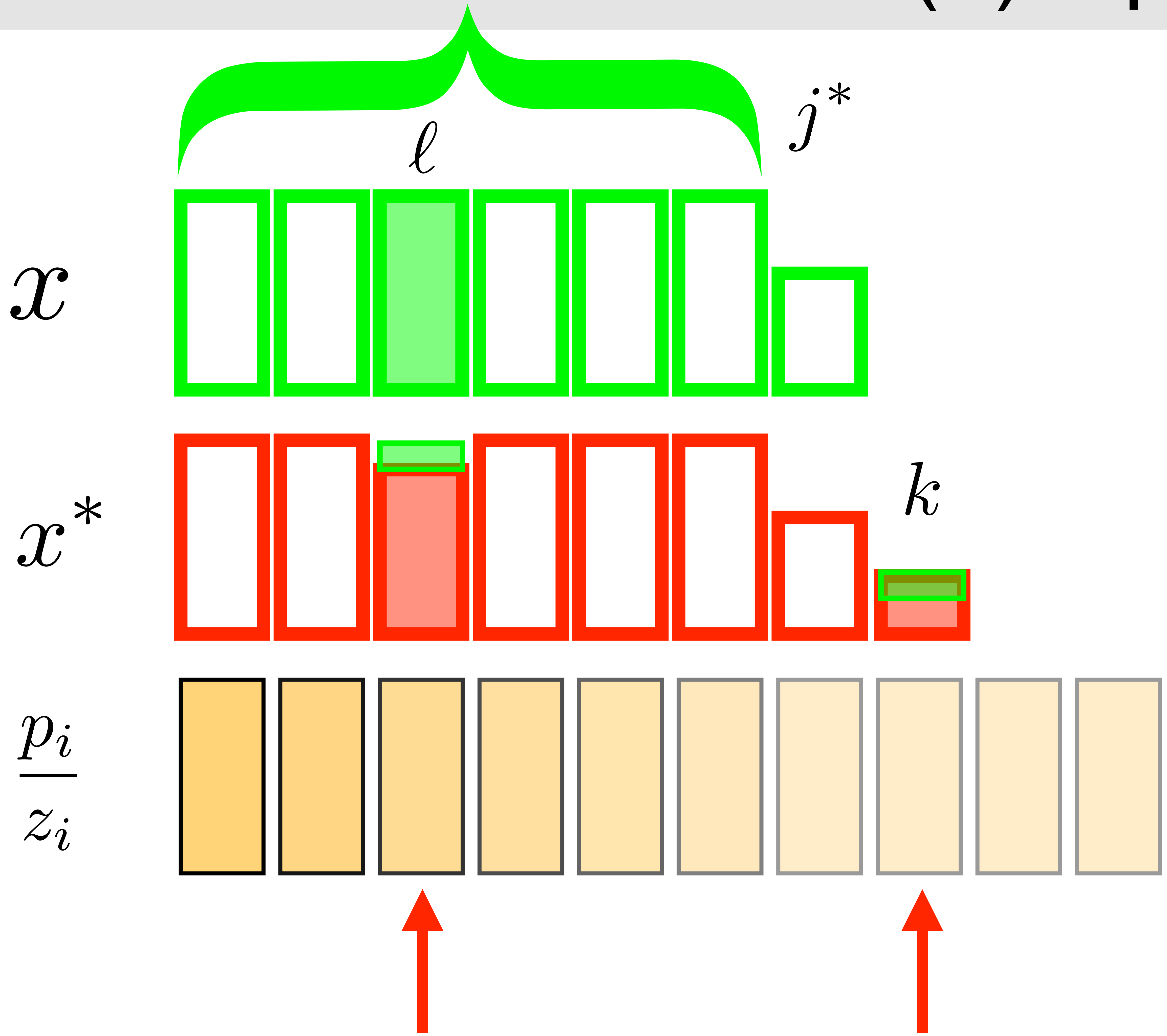
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \; \exists \, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \; \exists \, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \; \exists \, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

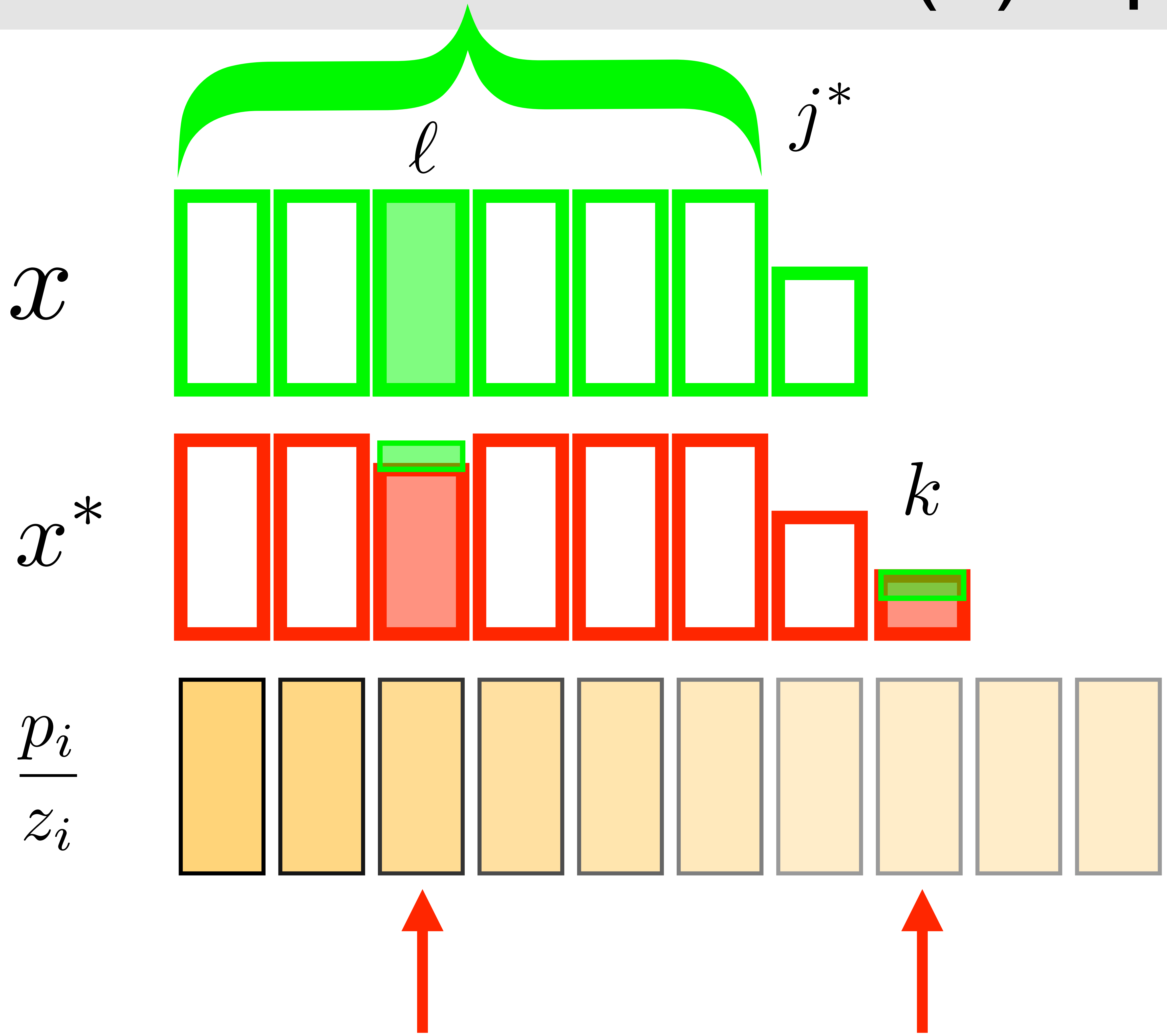
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

# (2) Optimalität




$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \; \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \; \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \; \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

$x^*$ nicht optimal!

# Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

# Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

**Problem 1.6** (INTEGER KNAPSACK).

# Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

**Problem 1.6** (INTEGER KNAPSACK).

***Gegeben:***

# Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

**Problem 1.6** (INTEGER KNAPSACK).

***Gegeben:***

- *$n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$ Gewinn $p_i$*

# Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

**Problem 1.6** (INTEGER KNAPSACK).

***Gegeben:***

- *$n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$ Gewinn $p_i$*
- *Größenschranke $Z$*

# Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

**Problem 1.6** (INTEGER KNAPSACK).

***Gegeben:***

- *$n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$ Gewinn $p_i$*
- *Größenschranke $Z$*

***Gesucht:***

# Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

**Problem 1.6** (INTEGER KNAPSACK).

***Gegeben:***

- *$n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$ Gewinn $p_i$*
- *Größenschranke $Z$*

***Gesucht:***

*Für jedes Objekt ein Wert*

# Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

**Problem 1.6** (INTEGER KNAPSACK).

***Gegeben:***

- *$n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$ Gewinn $p_i$*
- *Größenschranke $Z$*

***Gesucht:***

*Für jedes Objekt ein Wert*

$$x_i \in \mathbb{N}$$

# Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

**Problem 1.6** (INTEGER KNAPSACK).

***Gegeben:***

- *$n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$ Gewinn $p_i$*
- *Größenschranke $Z$*

***Gesucht:***

*Für jedes Objekt ein Wert*

$$x_i \in \mathbb{N}$$

*mit*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

# Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

**Problem 1.6** (INTEGER KNAPSACK).

***Gegeben:***

- *n Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* $z_i$ *Gewinn* $p_i$
- *Größenschranke* $Z$

***Gesucht:***

*Für jedes Objekt ein Wert*

$$x_i \in \mathbb{N}$$

*mit*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

# Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

**Problem 1.6** (INTEGER KNAPSACK).

***Gegeben:***

- *$n$ Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* $z_i$ *Gewinn* $p_i$
- *Größenschranke* $Z$

***Gesucht:***

*Für jedes Objekt ein Wert*

$$\boxed{x_i \in \mathbb{N}}$$

*mit*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

*und*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \mathit{Maximal}$$

# Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

# Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

**Problem 1.7.**

# Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

**Problem 1.7.**

**Gegeben**:

# Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

**Problem 1.7.**

**Gegeben**:

- $n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$

# Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

**Problem 1.7.**

**Gegeben**:

- $n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$
- Größenschranke $Z$

# Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

**Problem 1.7.**
**Gegeben**:

- $n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$
- Größenschranke $Z$

# Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

**Problem 1.7.**

**Gegeben**:

- $n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$
- Größenschranke $Z$

**Gesucht**:

# Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

**Problem 1.7.**

**Gegeben**:

- $n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$
- Größenschranke $Z$

**Gesucht**:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

# Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

**Problem 1.7.**

**Gegeben**:

- $n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$
- Größenschranke $Z$

**Gesucht**:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

mit

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

# Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

**Problem 1.7.**

**Gegeben**:

- $n$ Objekte $1, ..., n$ mit jeweils Größe $z_i$
- Größenschranke $Z$

**Gesucht**:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, ..., n\}$$

mit

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i \in S} z_i = Maximal$$

# Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

# Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

**Problem 1.8** (SUBSET SUM).

# Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

**Problem 1.8** (SUBSET SUM).

***Gegeben:***

# Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

**Problem 1.8** (Subset Sum).

***Gegeben:***

- *$n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$*

# Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

**Problem 1.8** (SUBSET SUM).

***Gegeben:***

- *n Objekte* $1, ..., n$ *mit jeweils Größe* $z_i$
- *Zielgröße* $Z$

# Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

**Problem 1.8** (Subset Sum).

***Gegeben:***

- *$n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$*
- *Zielgröße $Z$*

# Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

**Problem 1.8** (SUBSET SUM).

***Gegeben:***

- *$n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$*
- *Zielgröße $Z$*

***Gesucht:***

# Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

**Problem 1.8** (Subset Sum).

***Gegeben:***

- $n$ *Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* $z_i$
- *Zielgröße* $Z$

***Gesucht:***

*Eine Menge*

$$S \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

# Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

**Problem 1.8** (SUBSET SUM).

***Gegeben:***

- *$n$ Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe $z_i$*
- *Zielgröße $Z$*

***Gesucht:***

*Eine Menge*

$$S \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

*mit*

$$\sum_{i \in S} z_i = Z$$

# Spezialfall$^3$: Partition

# Spezialfall$^3$: Partition

**Problem 1.9** (PARTITION).

# Spezialfall$^3$: Partition

**Problem 1.9** (PARTITION).

***Gegeben:***

# Spezialfall$^3$: Partition

**Problem 1.9** (PARTITION).

***Gegeben:***

- $n$ *Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* $z_i$

# Spezialfall[3]: Partition

**Problem 1.9** (PARTITION).

***Gegeben:***

- $n$ *Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* $z_i$

***Gesucht:***

# Spezialfall$^3$: Partition

**Problem 1.9** (PARTITION).

***Gegeben:***

- *n Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* $z_i$

***Gesucht:***

*Eine Menge*

$$S \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

# Spezialfall³: Partition

**Problem 1.9** (PARTITION).

***Gegeben:***

- *$n$ Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* $z_i$

***Gesucht:***

*Eine Menge*

$$S \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

*mit*

$$\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \notin S} z_i$$

# Beispiel

# Beispiel

**Beispiel 1.10.**

Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

Gesamtsumme: 240

# Beispiel

**Beispiel 1.10.**

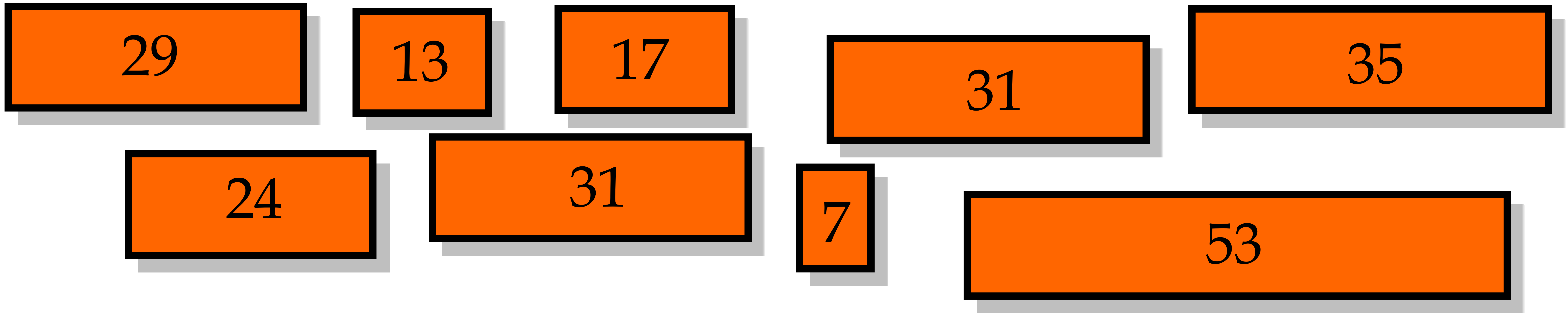
Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

Gesamtsumme: 240

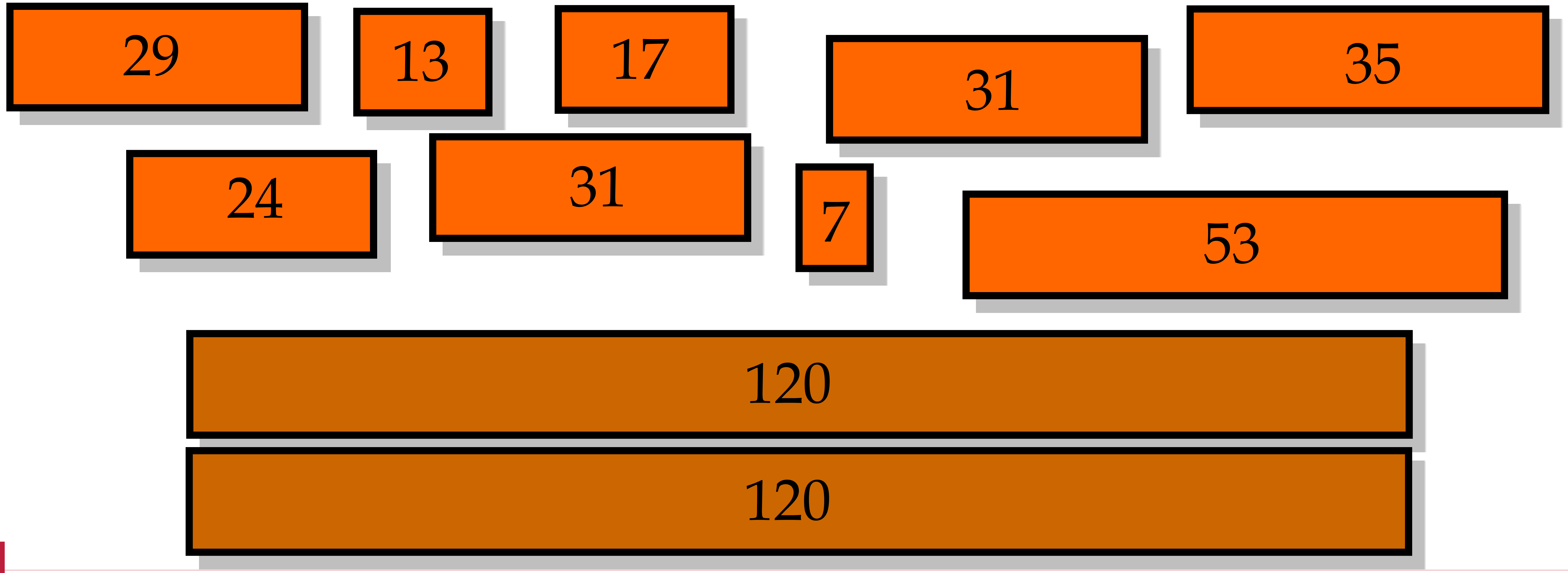
Finde Aufteilung in zwei gleiche Teilmengen!

# Ein Bild hilft

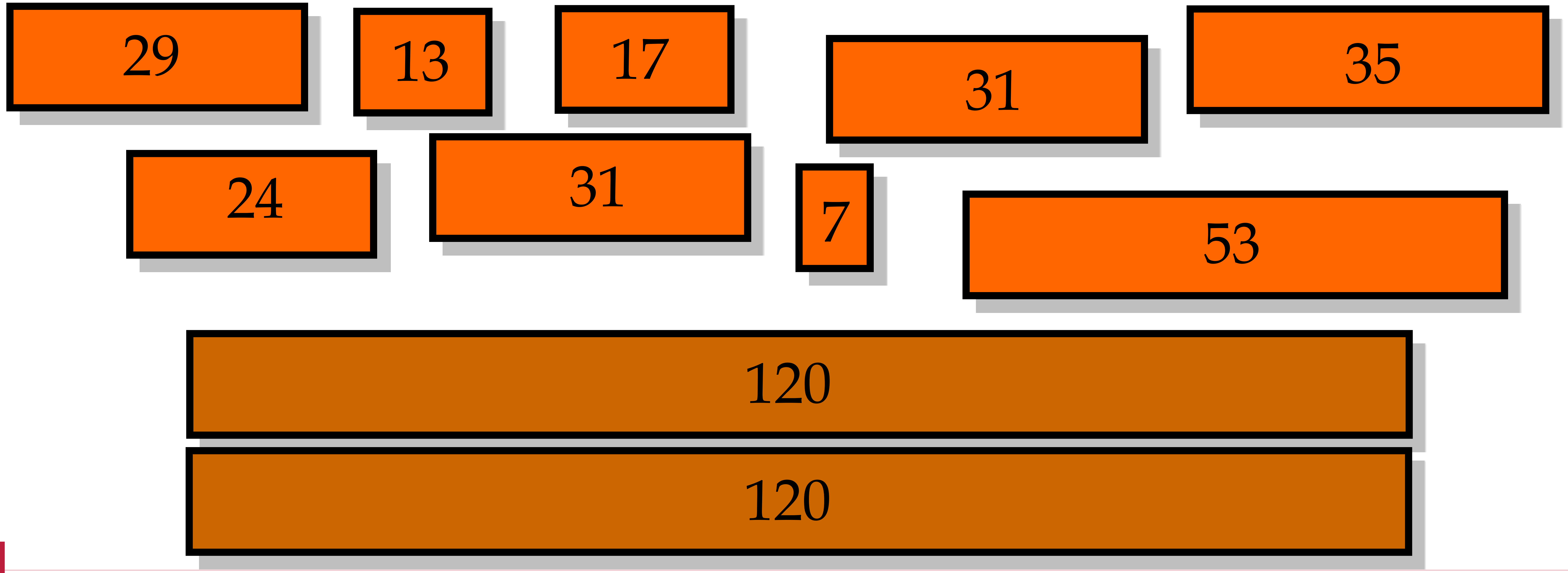
# Ein Bild hilft



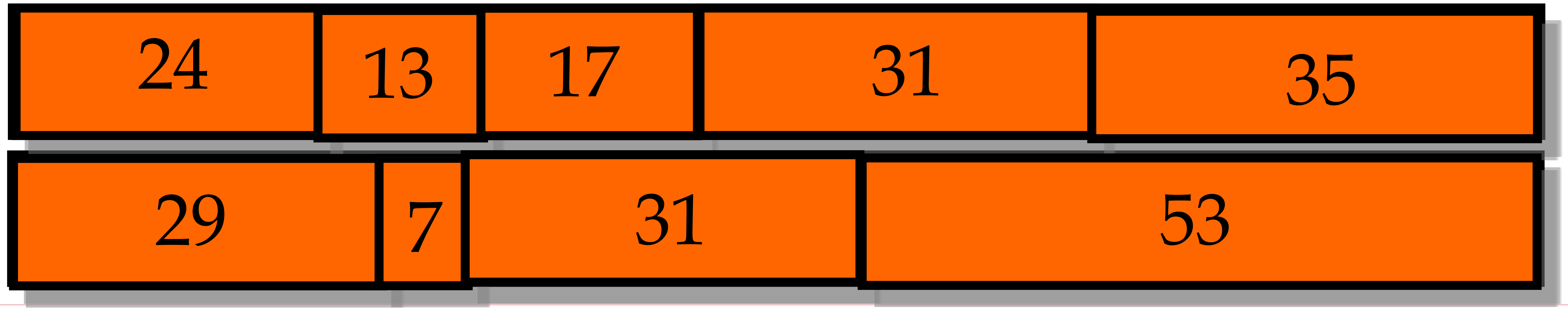
# Ein Bild hilft



# Ein Bild hilft



# Ein Bild hilft

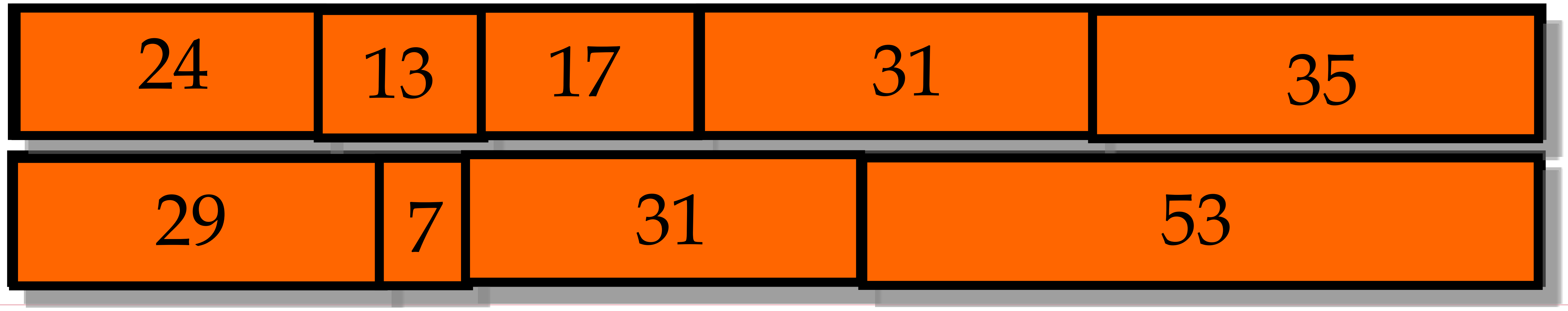


# Ein Bild hilft

**Beispiel 1.10.**

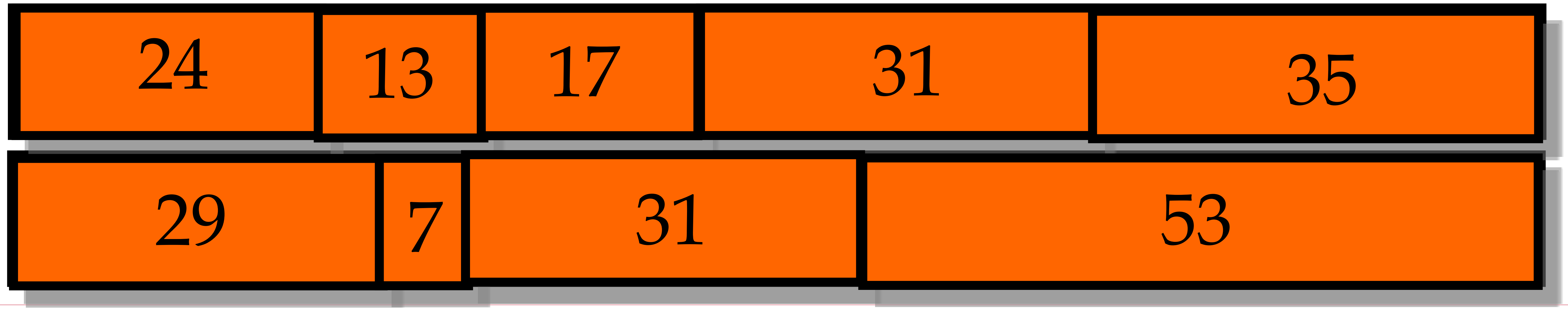
Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

Gesamtsumme: 240



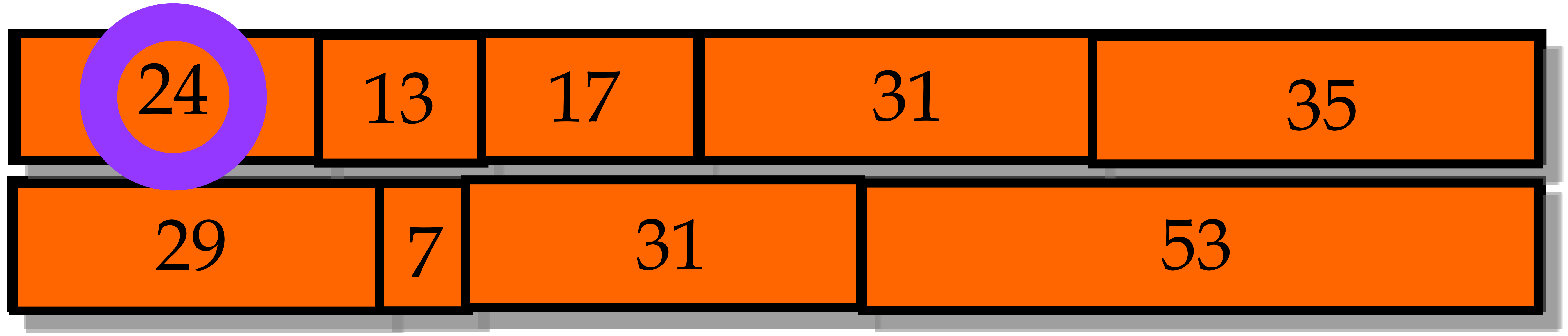
# Ein Bild hilft

**Beispiel 1.10.**
Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$
Gesamtsumme: 240



# Ein Bild hilft

**Beispiel 1.10.**
Partition für $\{z_1, \ldots, z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$
Gesamtsumme: 240

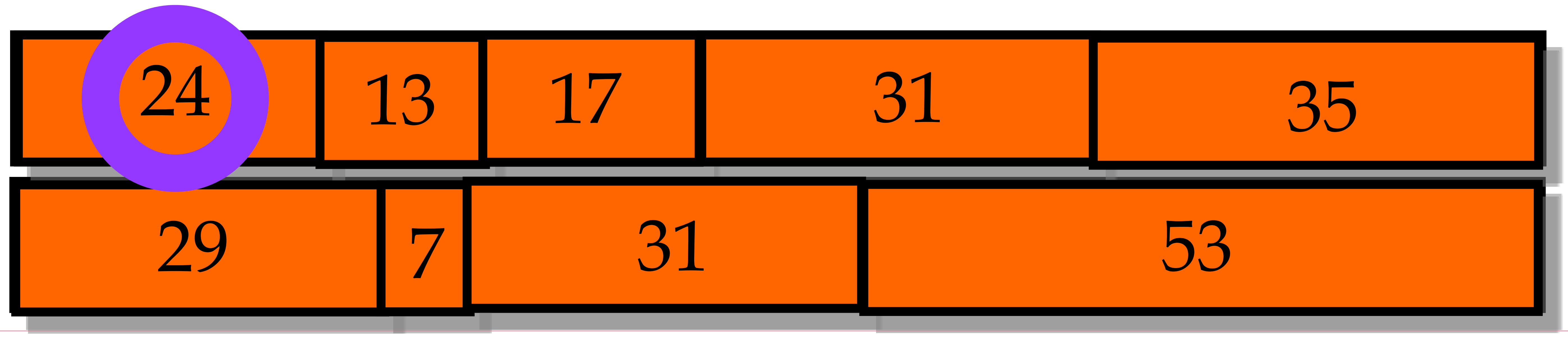


# Ein Bild hilft

**Beispiel 1.10.**

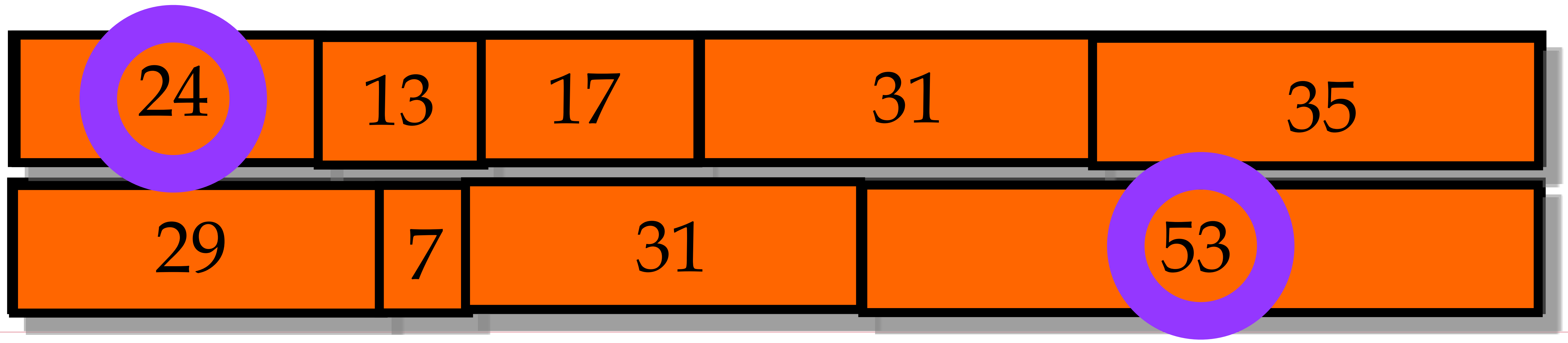
Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

Gesamtsumme: 240



# Ein Bild hilft

**Beispiel 1.10.**
Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$
Gesamtsumme: 240



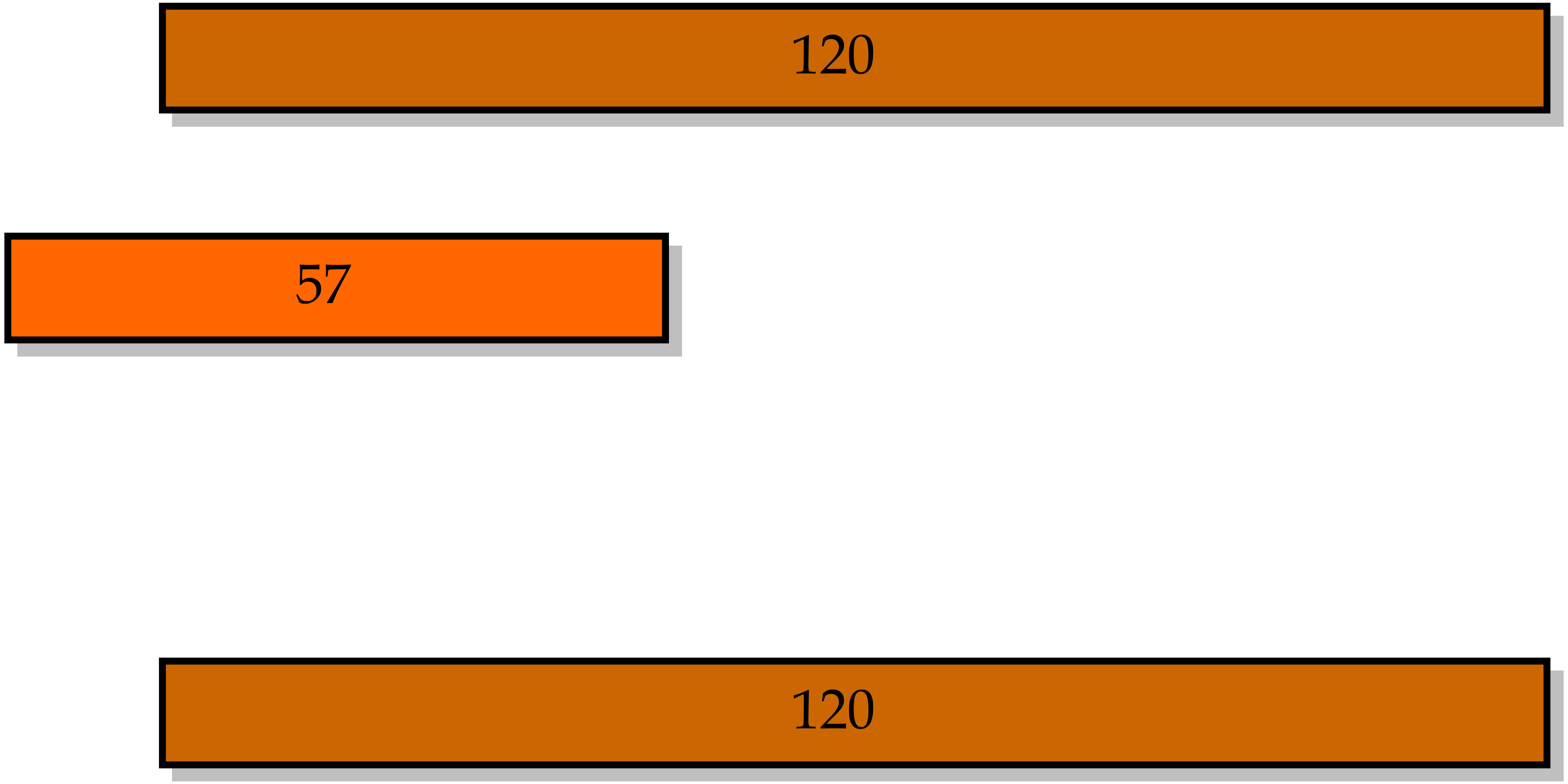
# Keine Lösung?!

# Keine Lösung?!

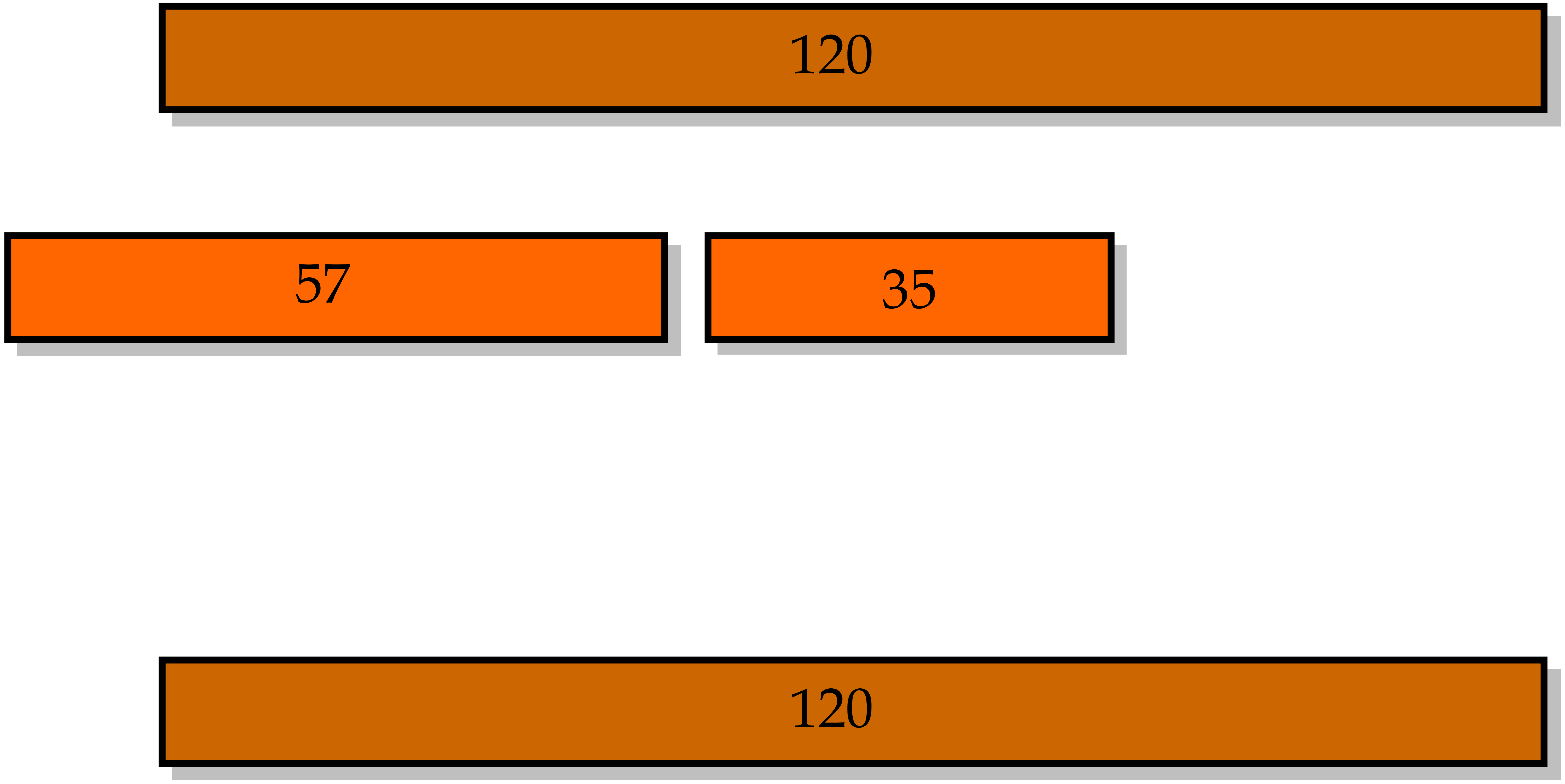
120

120

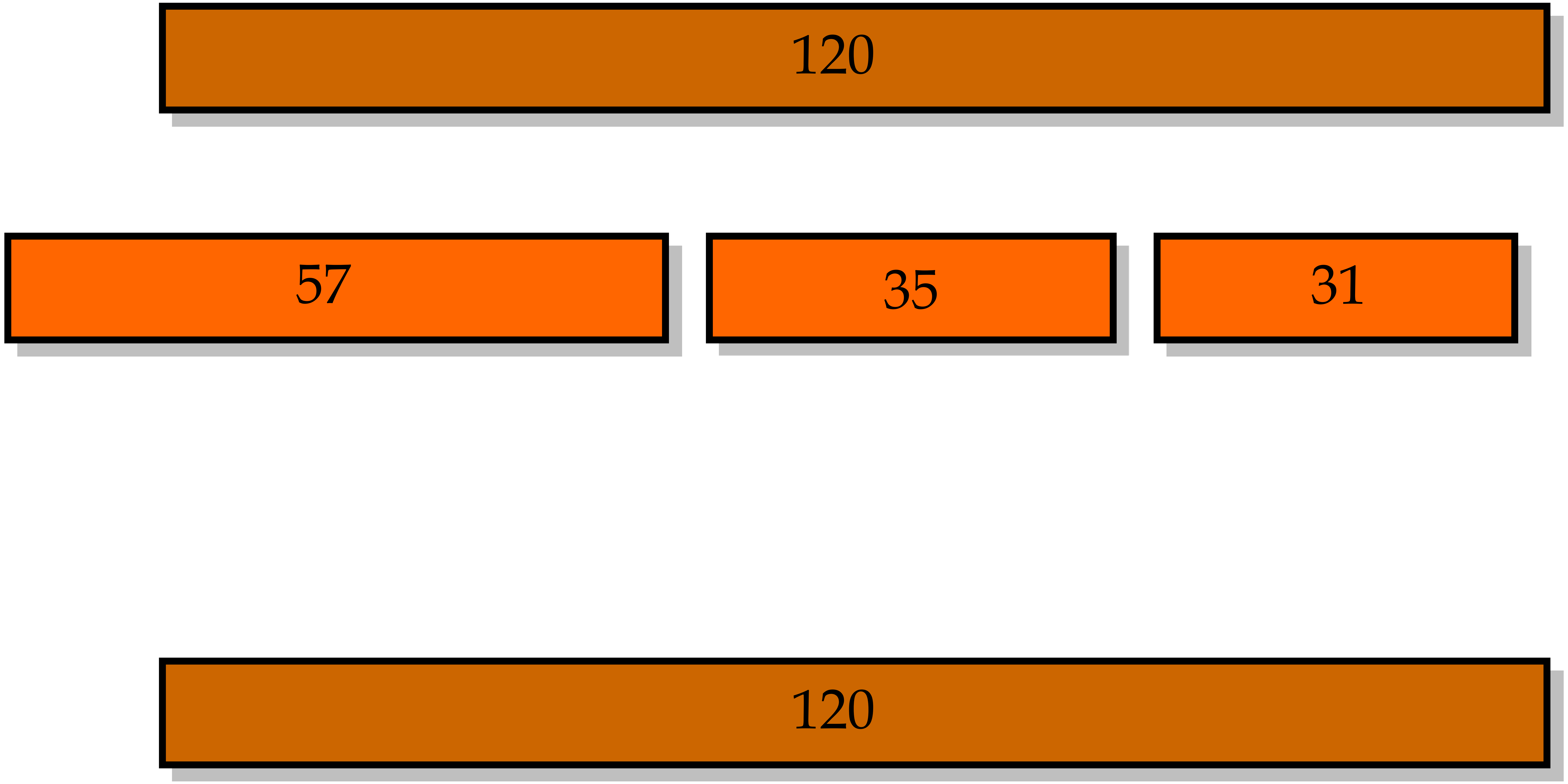
# Keine Lösung?!



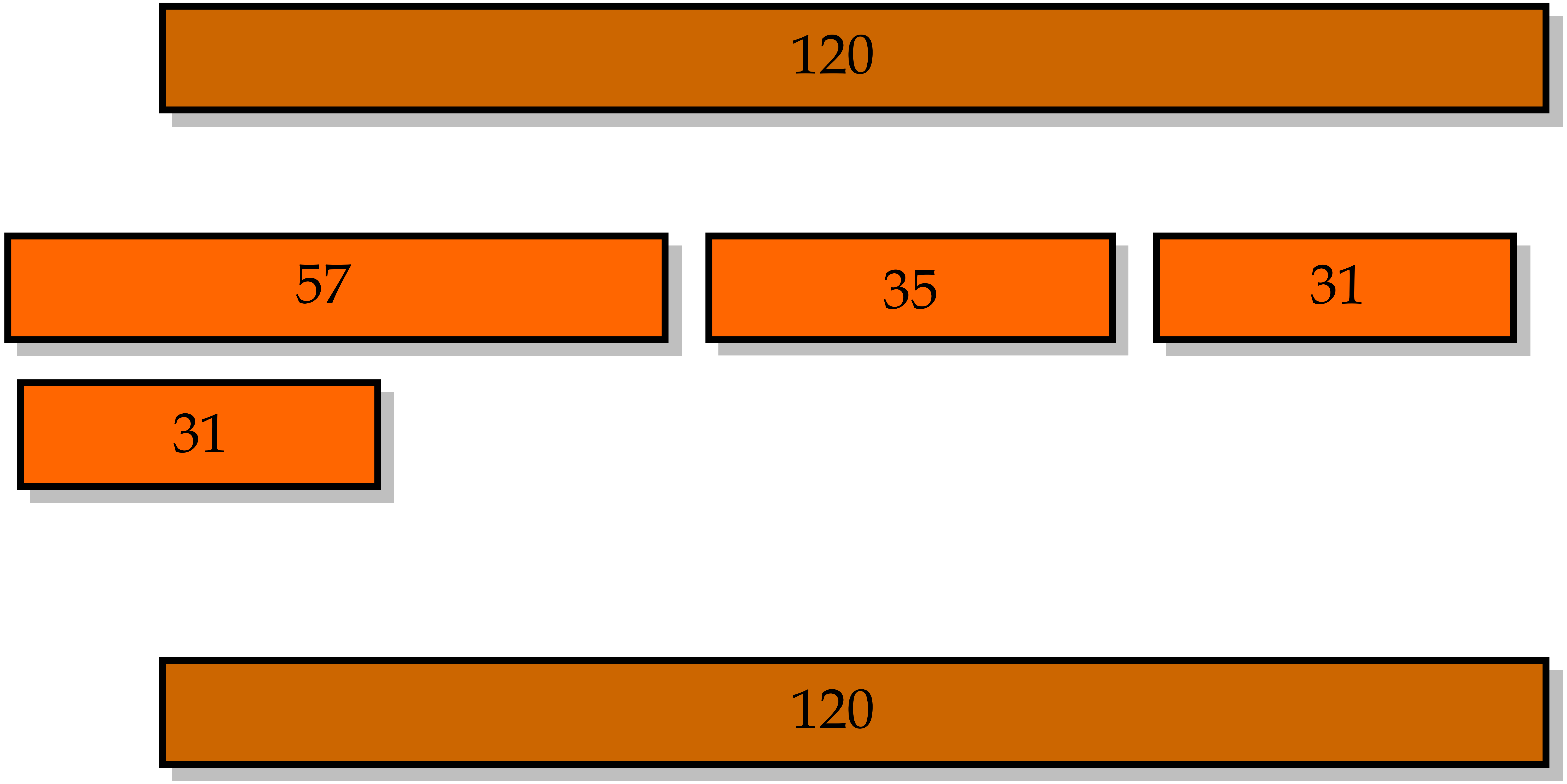
# Keine Lösung?!



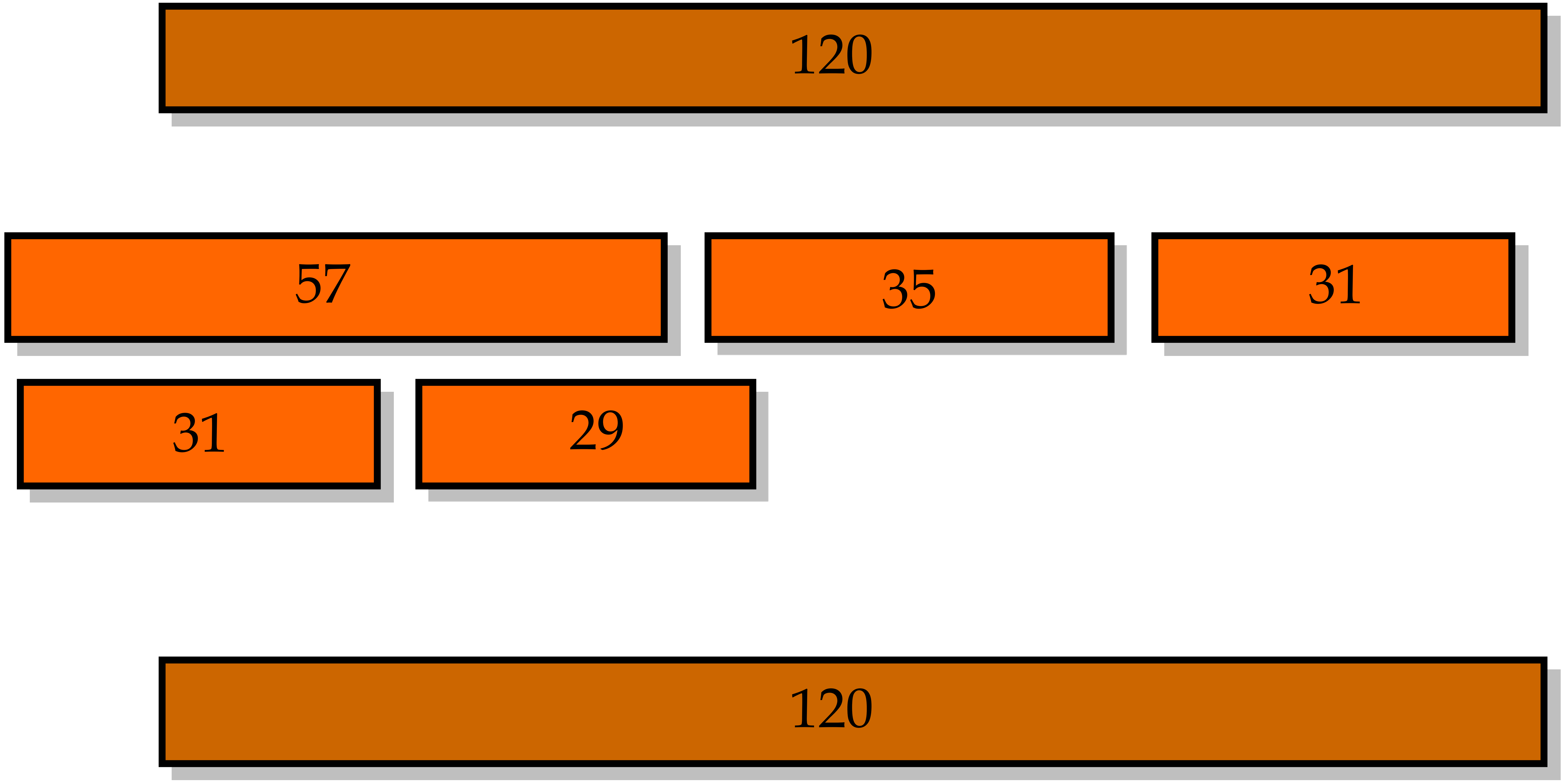
# Keine Lösung?!



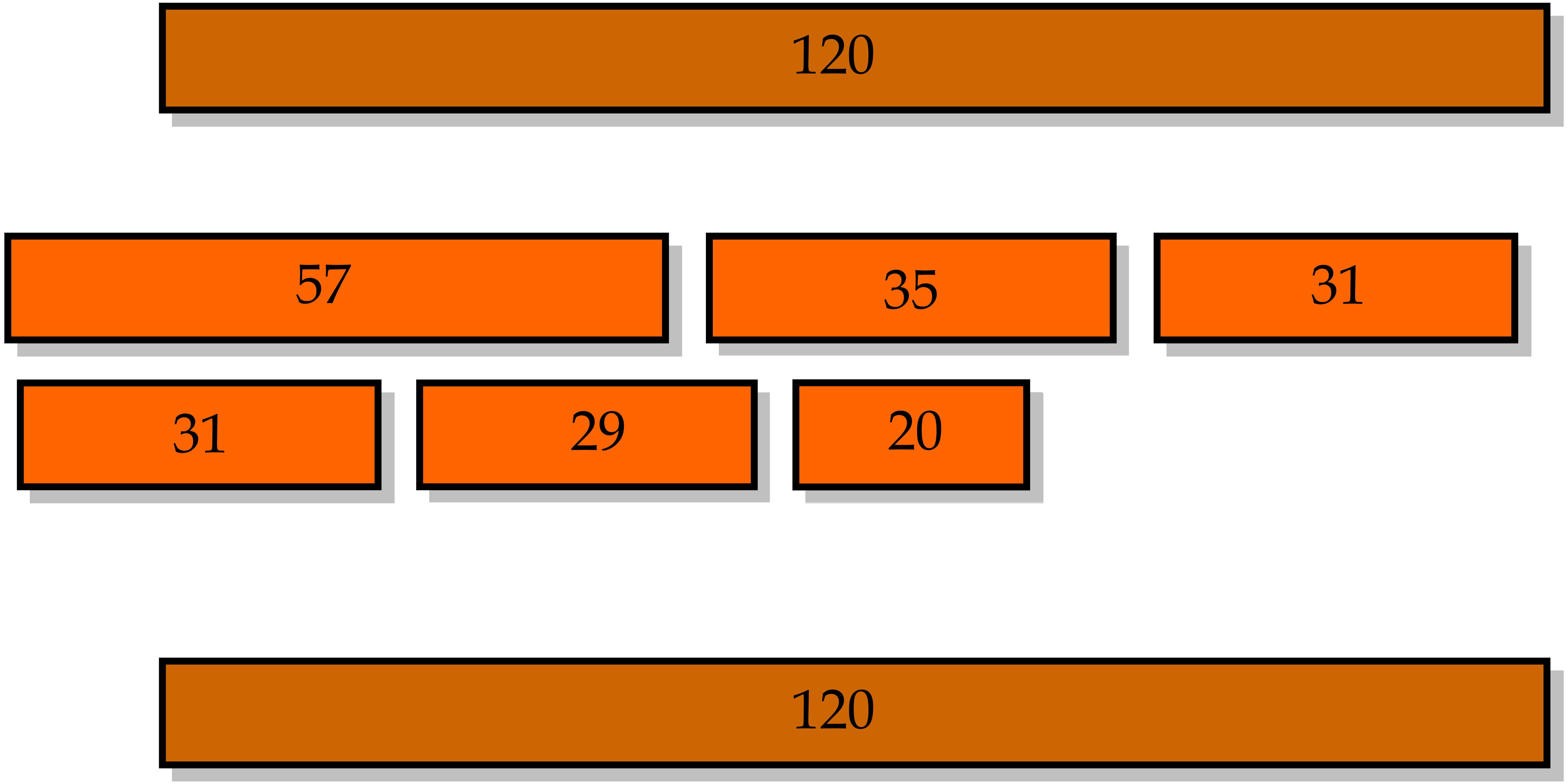
# Keine Lösung?!



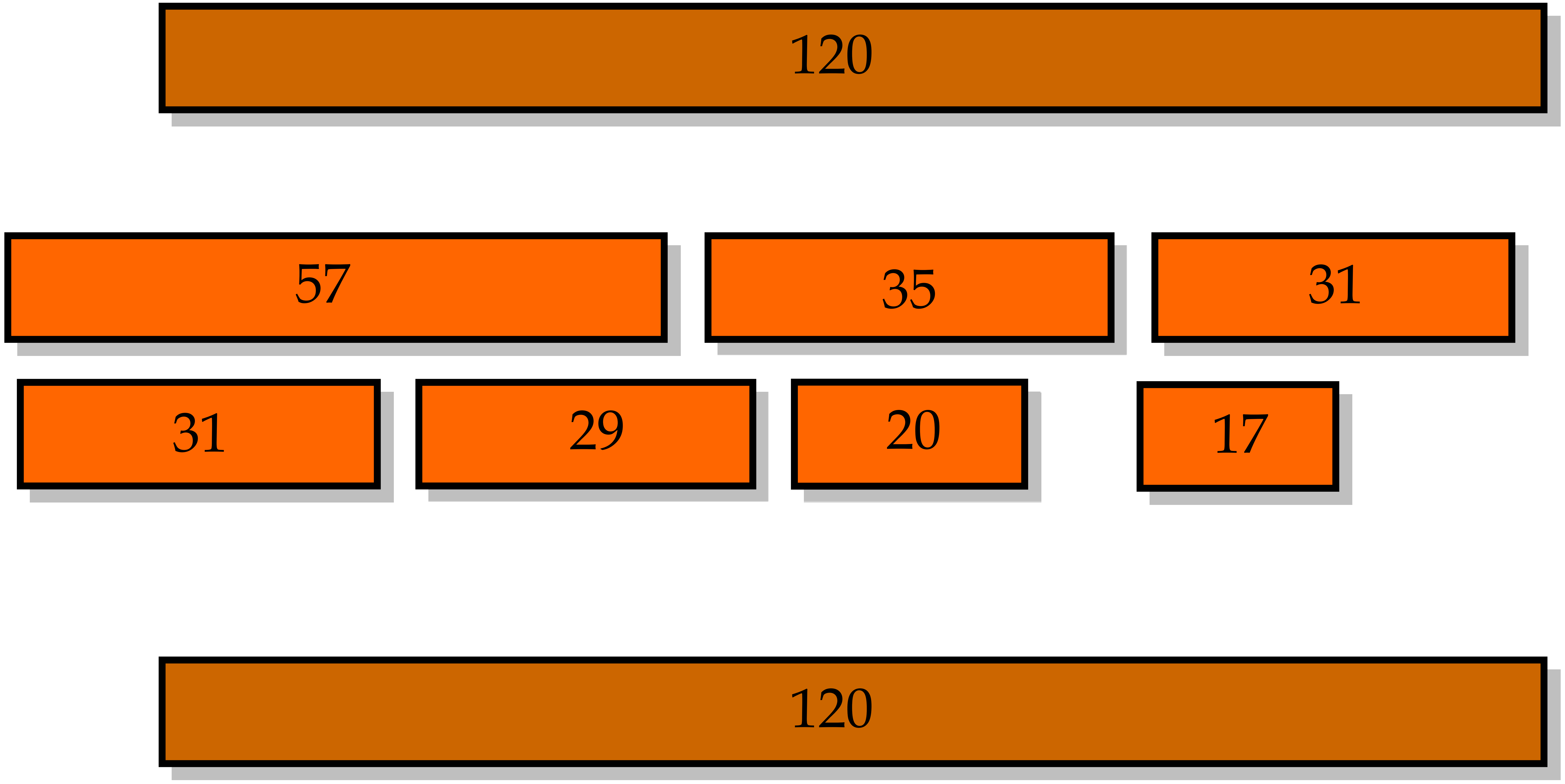
# Keine Lösung?!



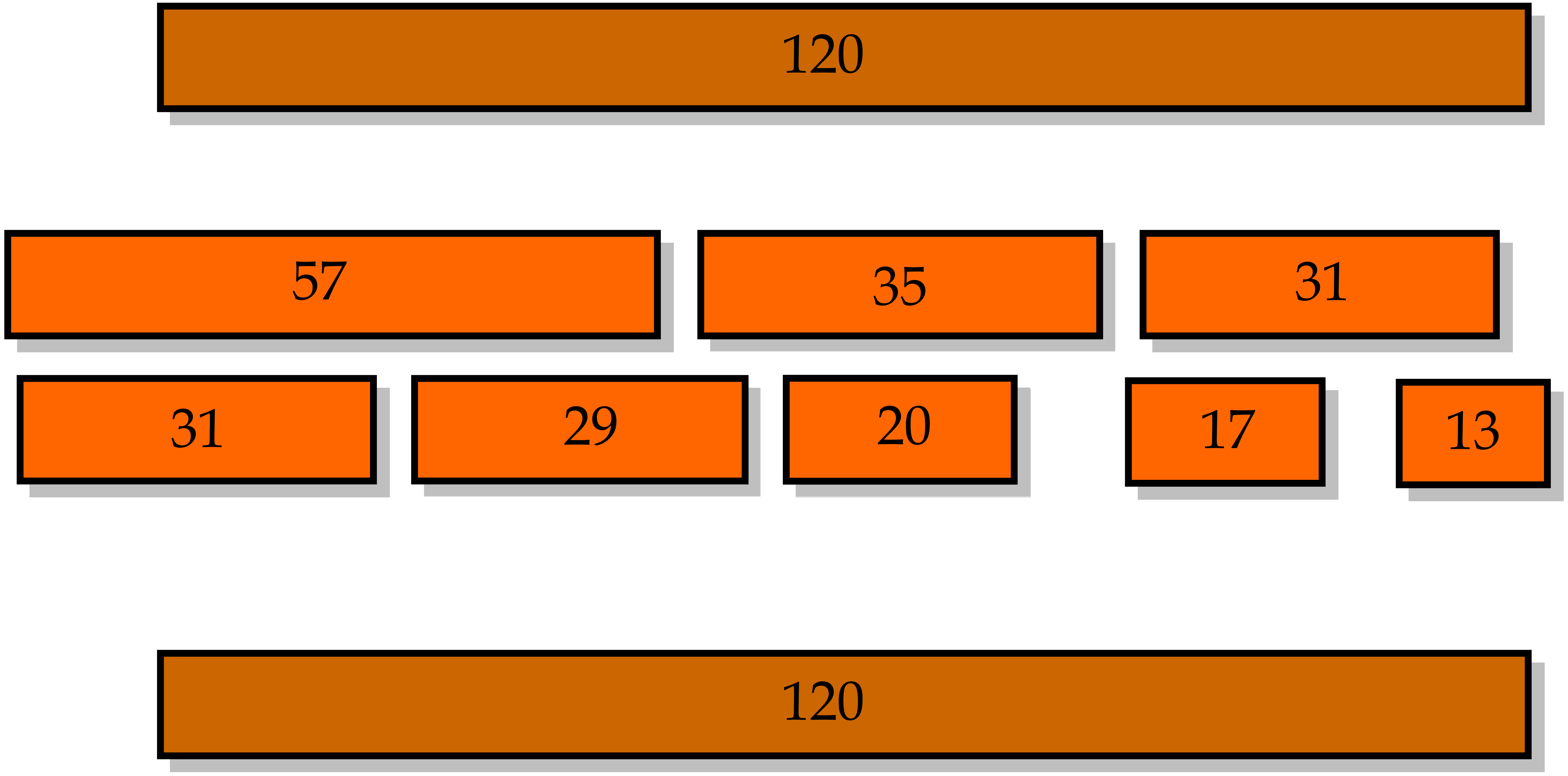
# Keine Lösung?!



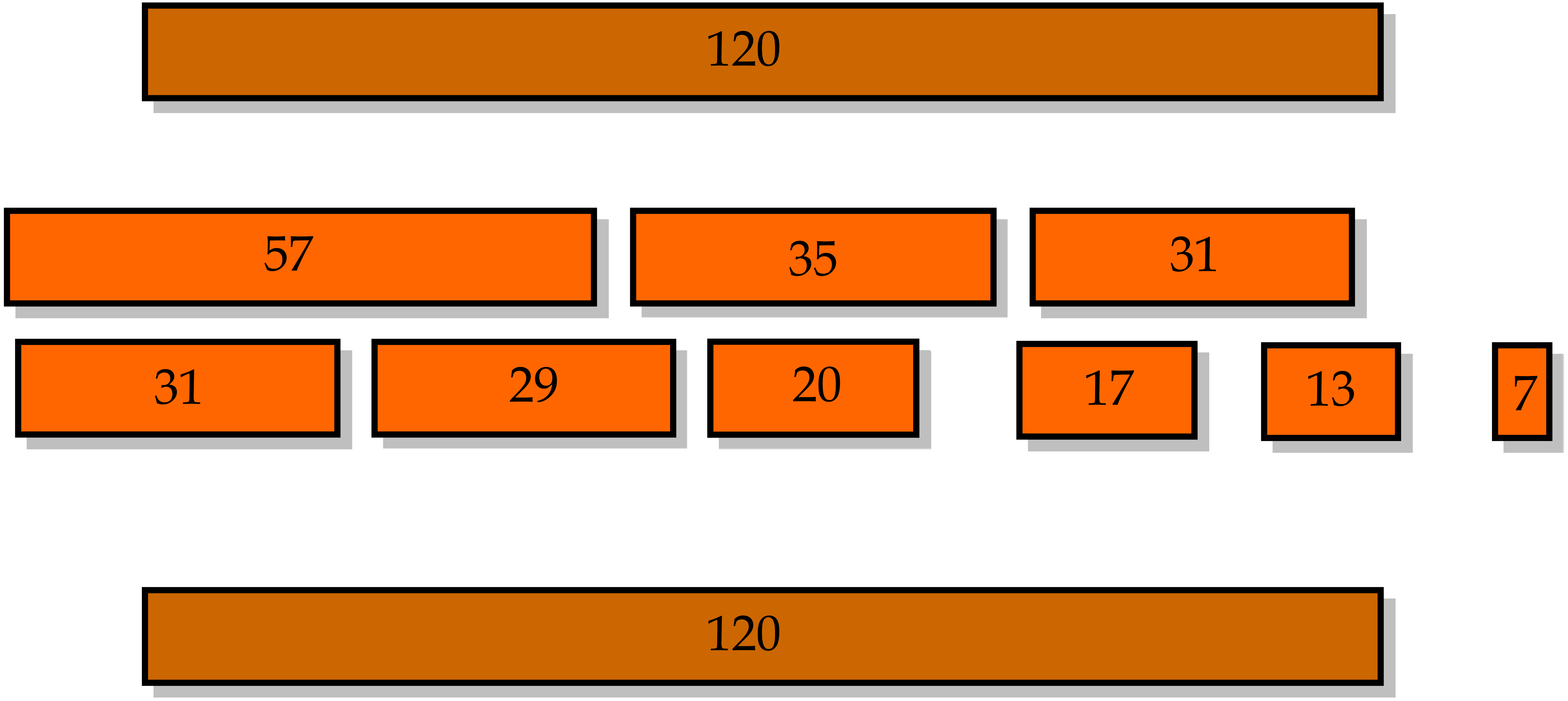
# Keine Lösung?!



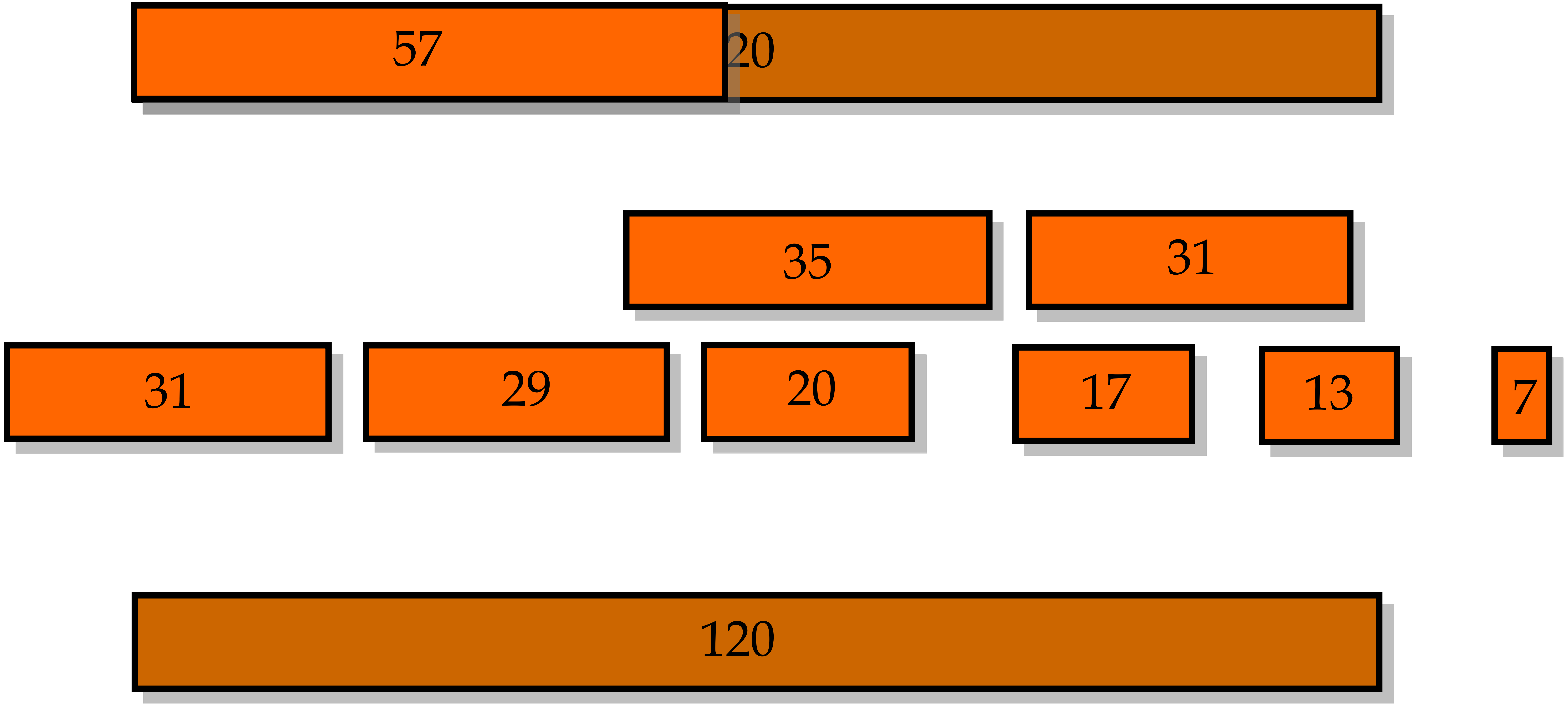
# Keine Lösung?!



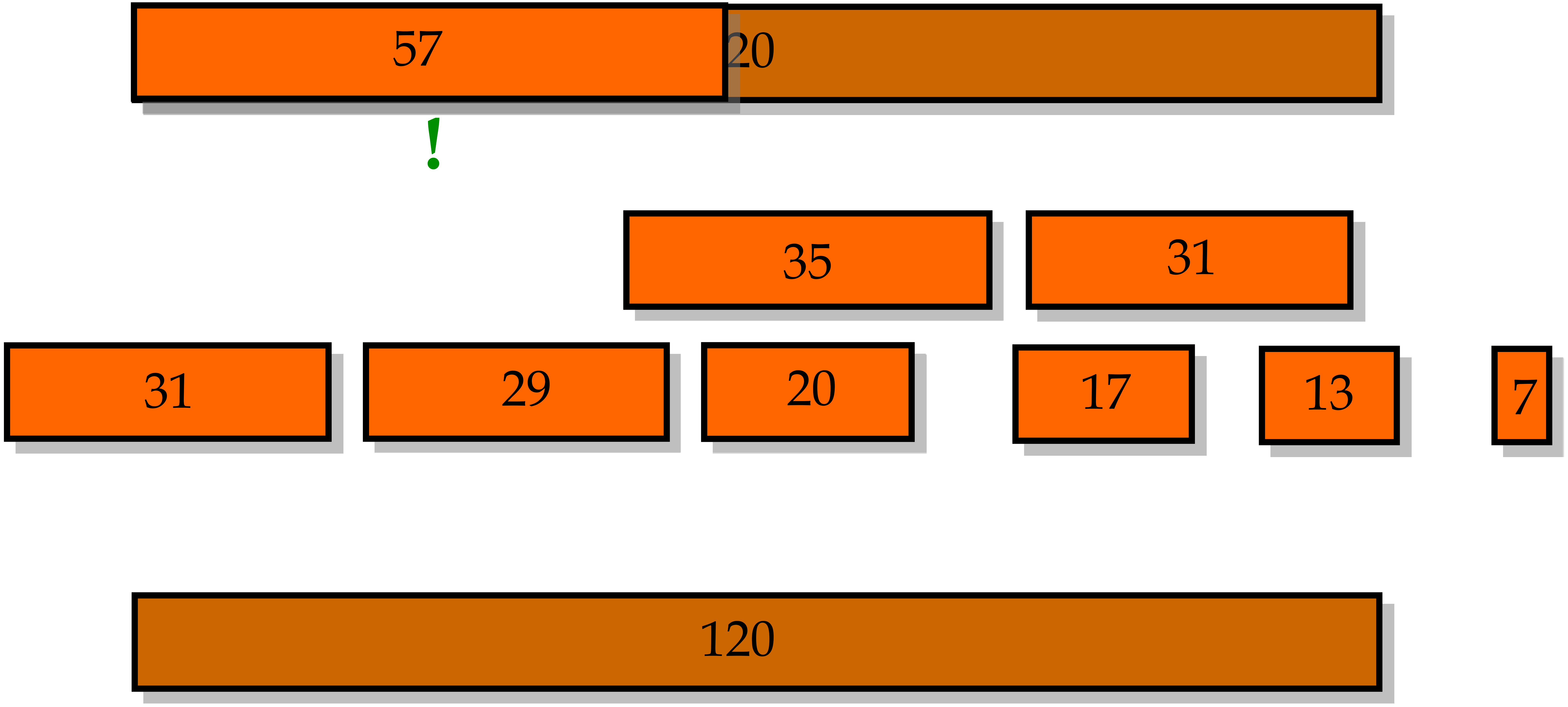
# Keine Lösung?!



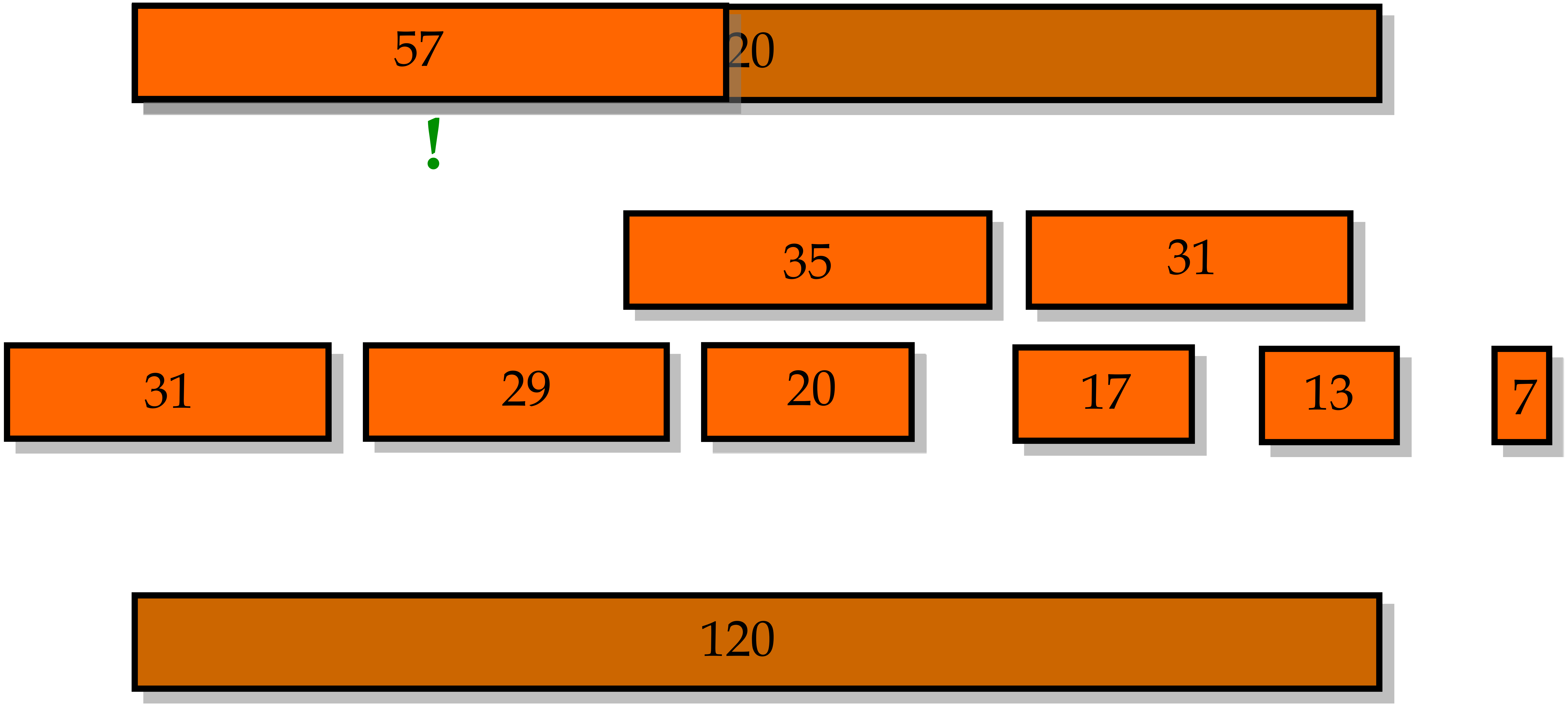
# Keine Lösung?!



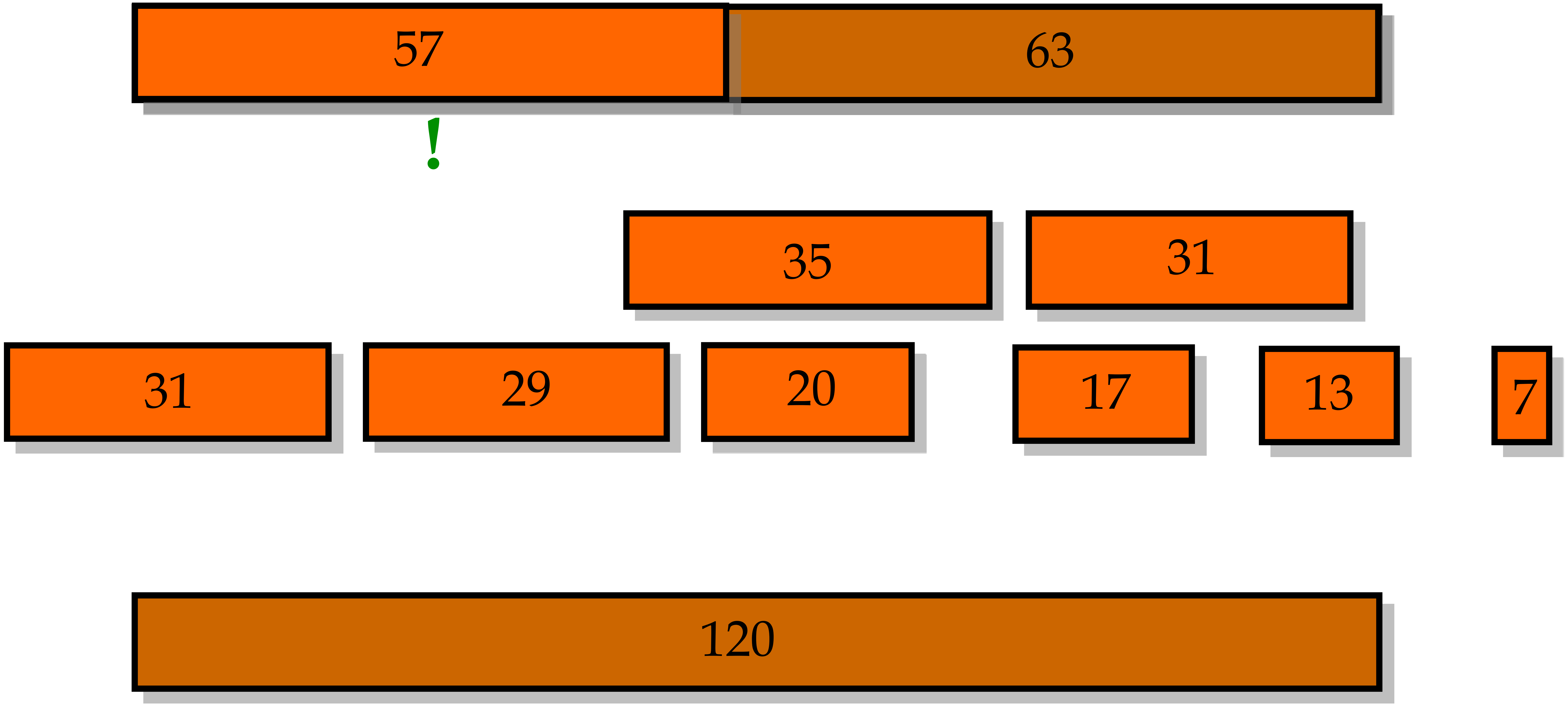
# Keine Lösung?!



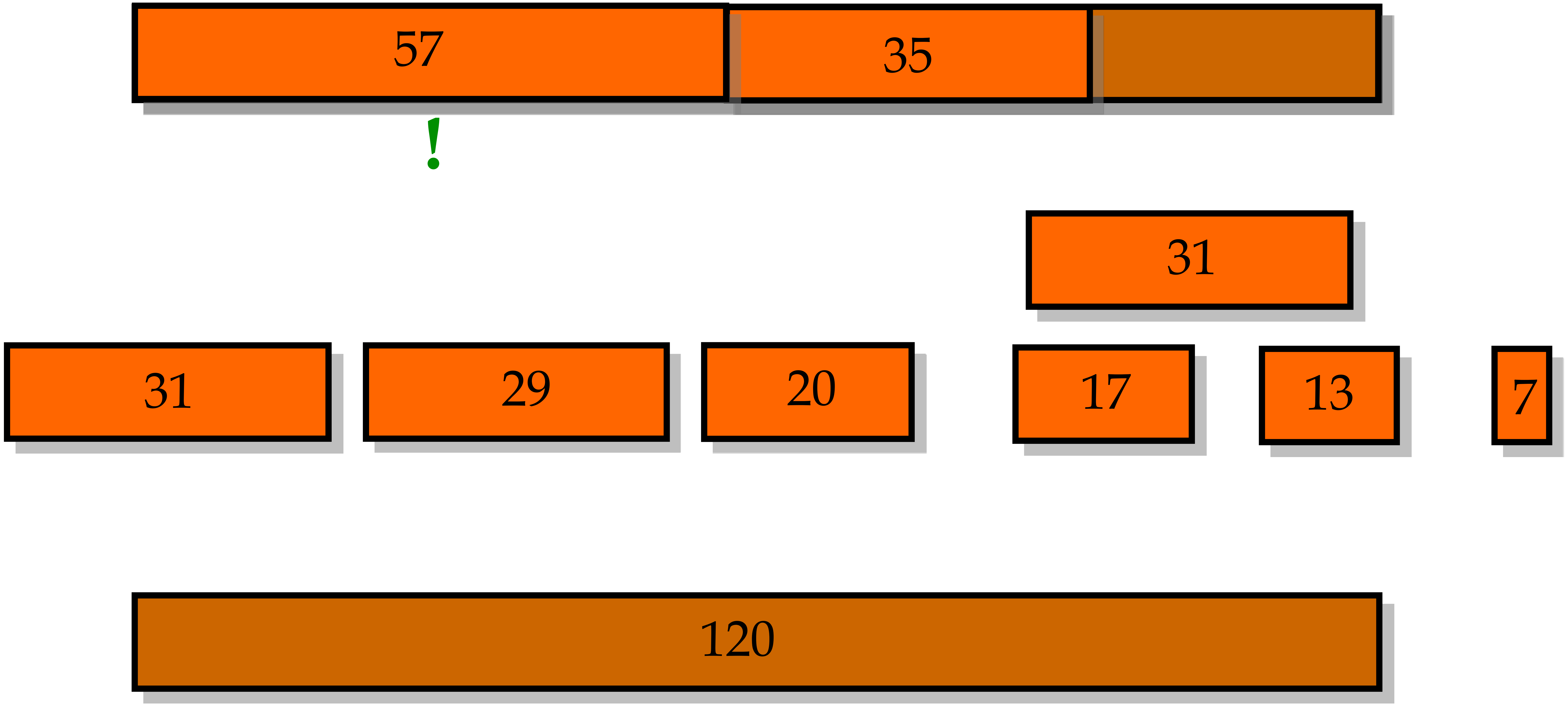
# Keine Lösung?!



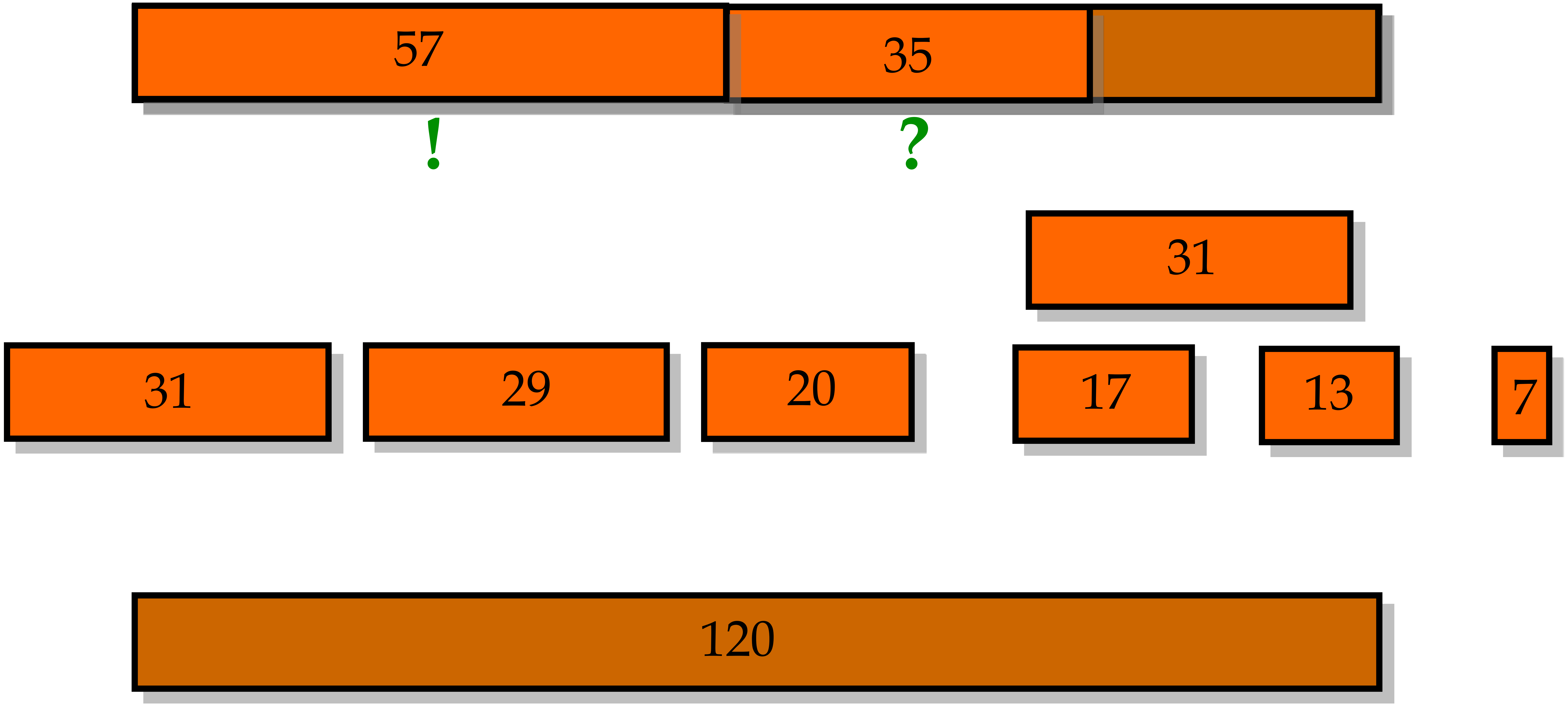
# Keine Lösung?!



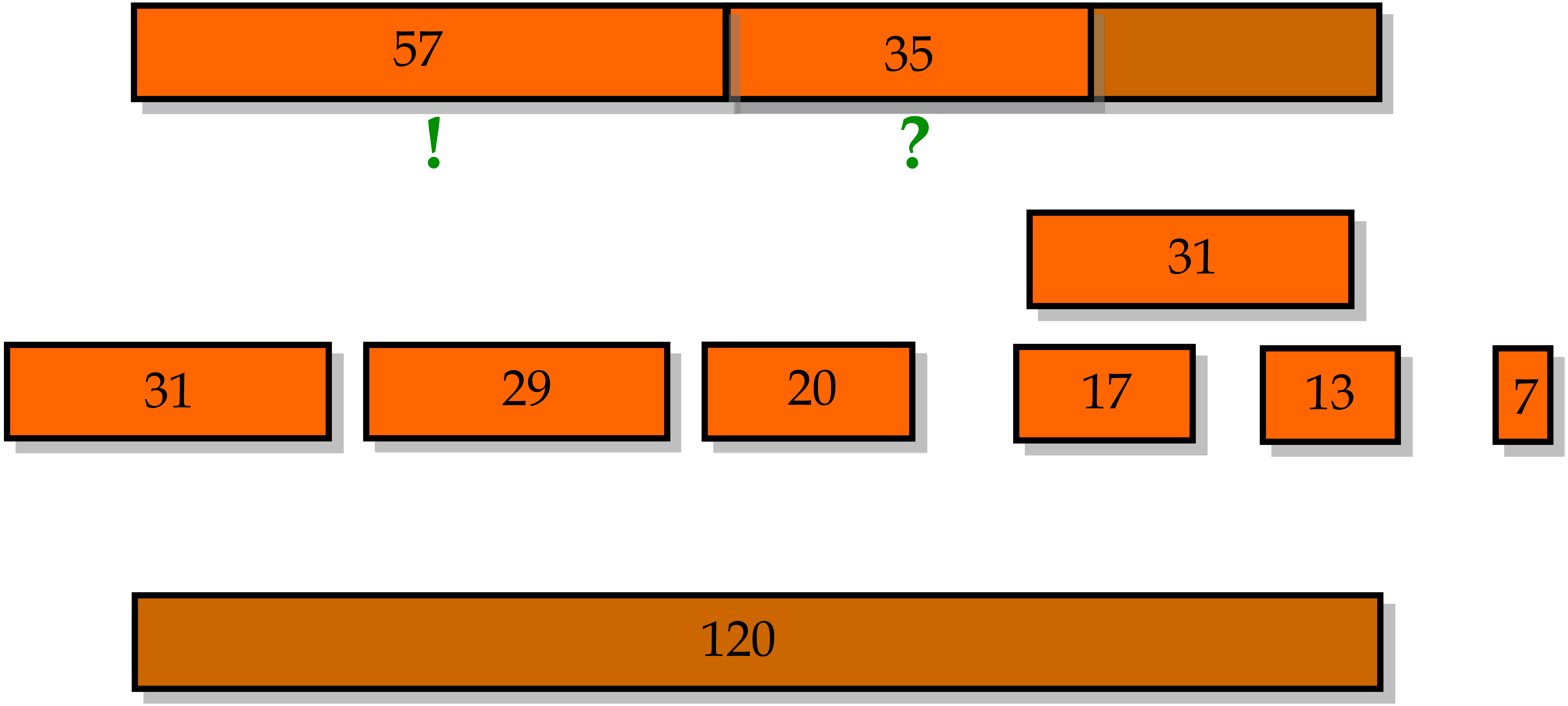
# Keine Lösung?!



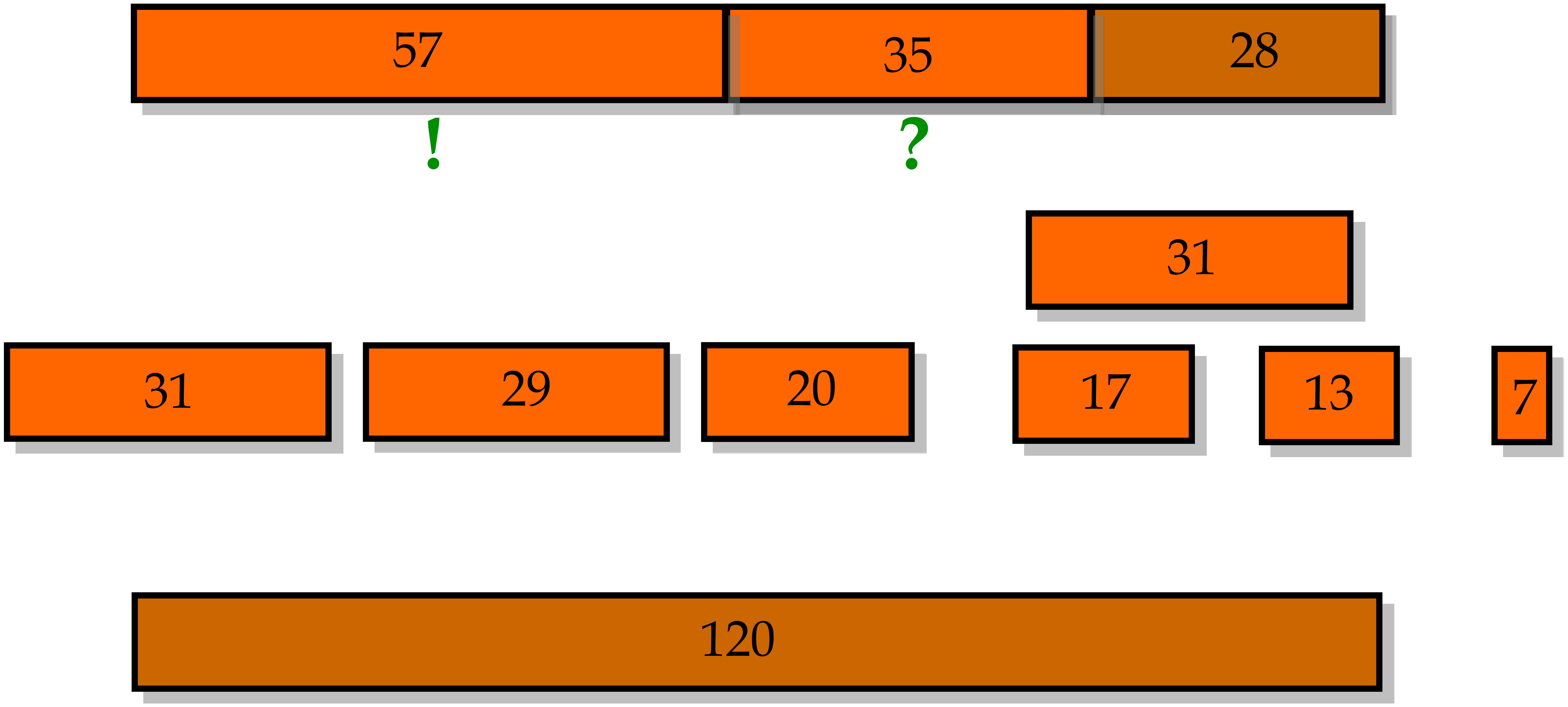
# Keine Lösung?!



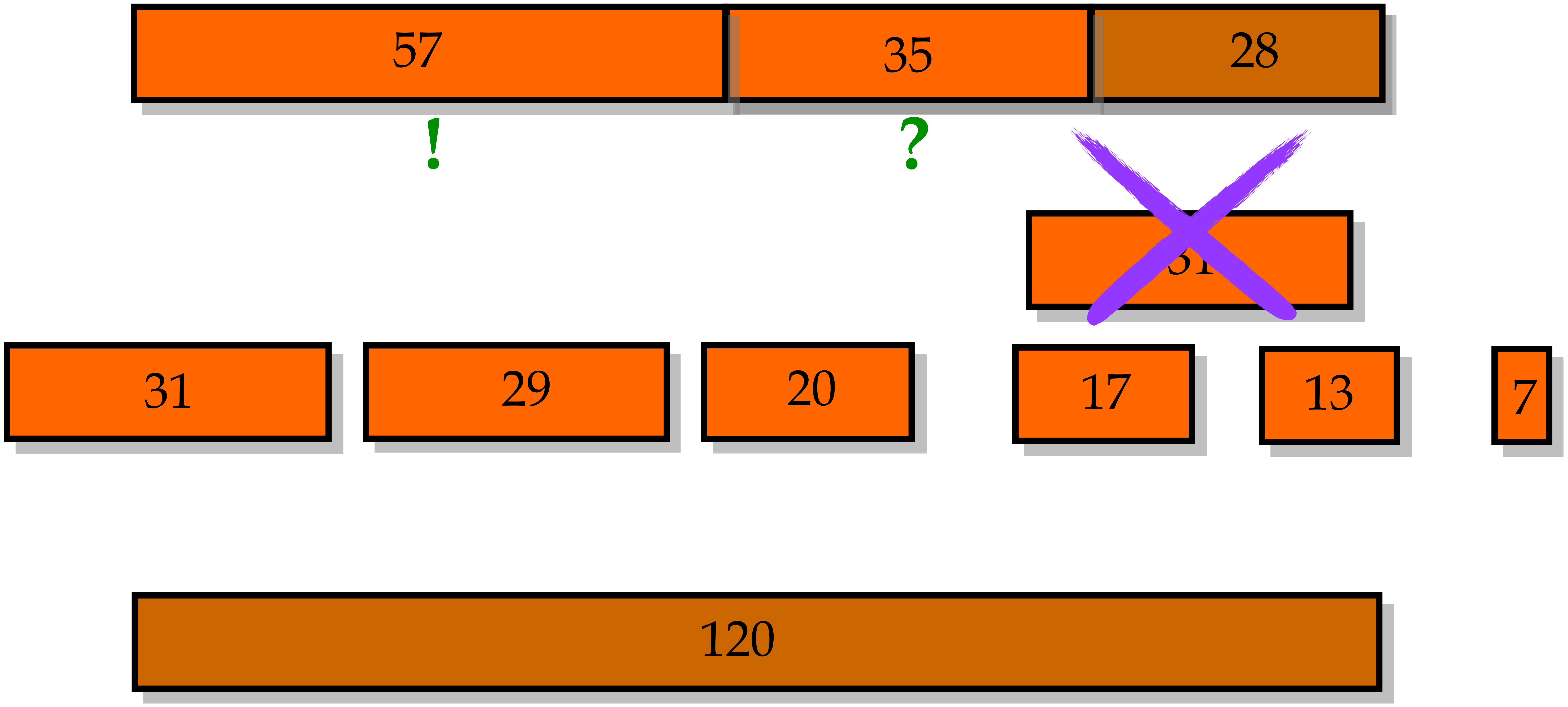
# Keine Lösung?!



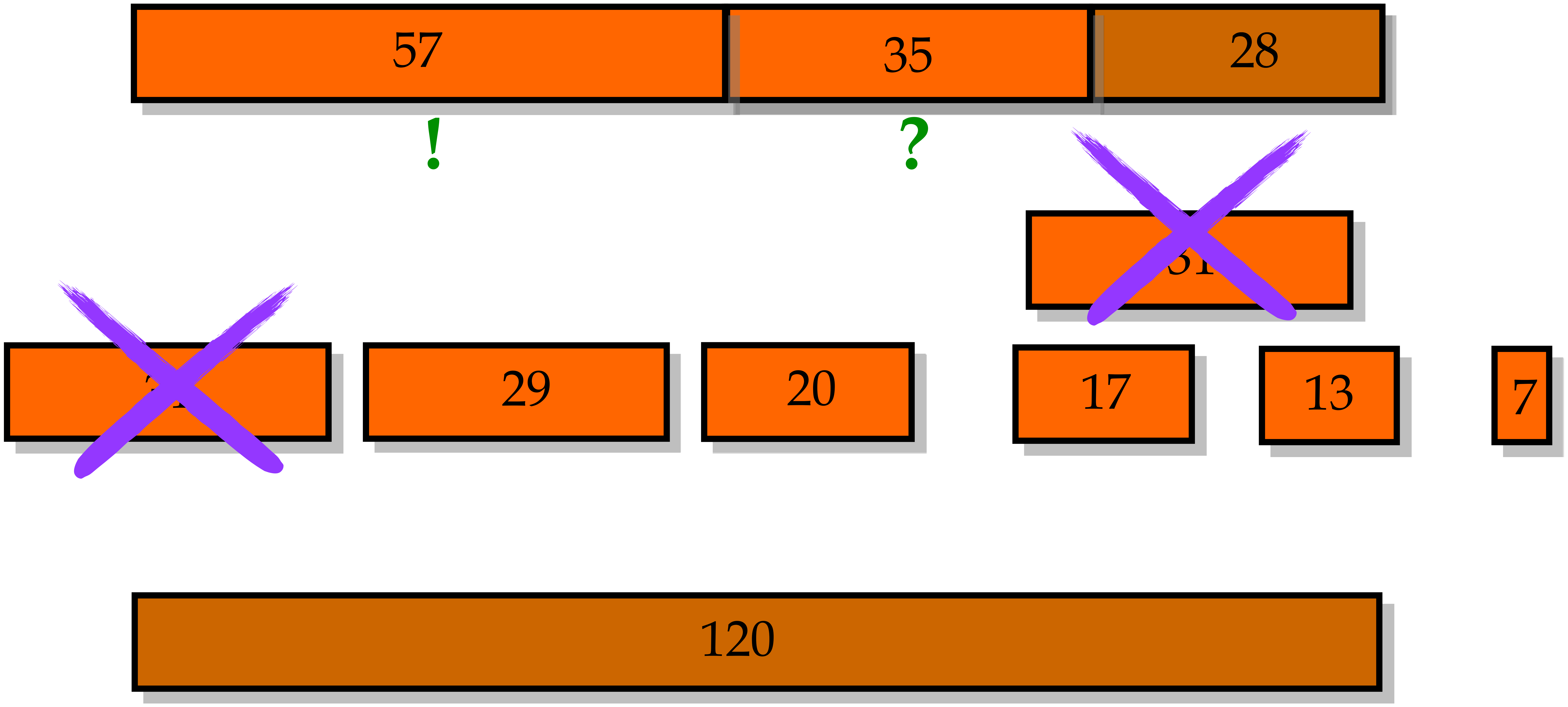
# Keine Lösung?!



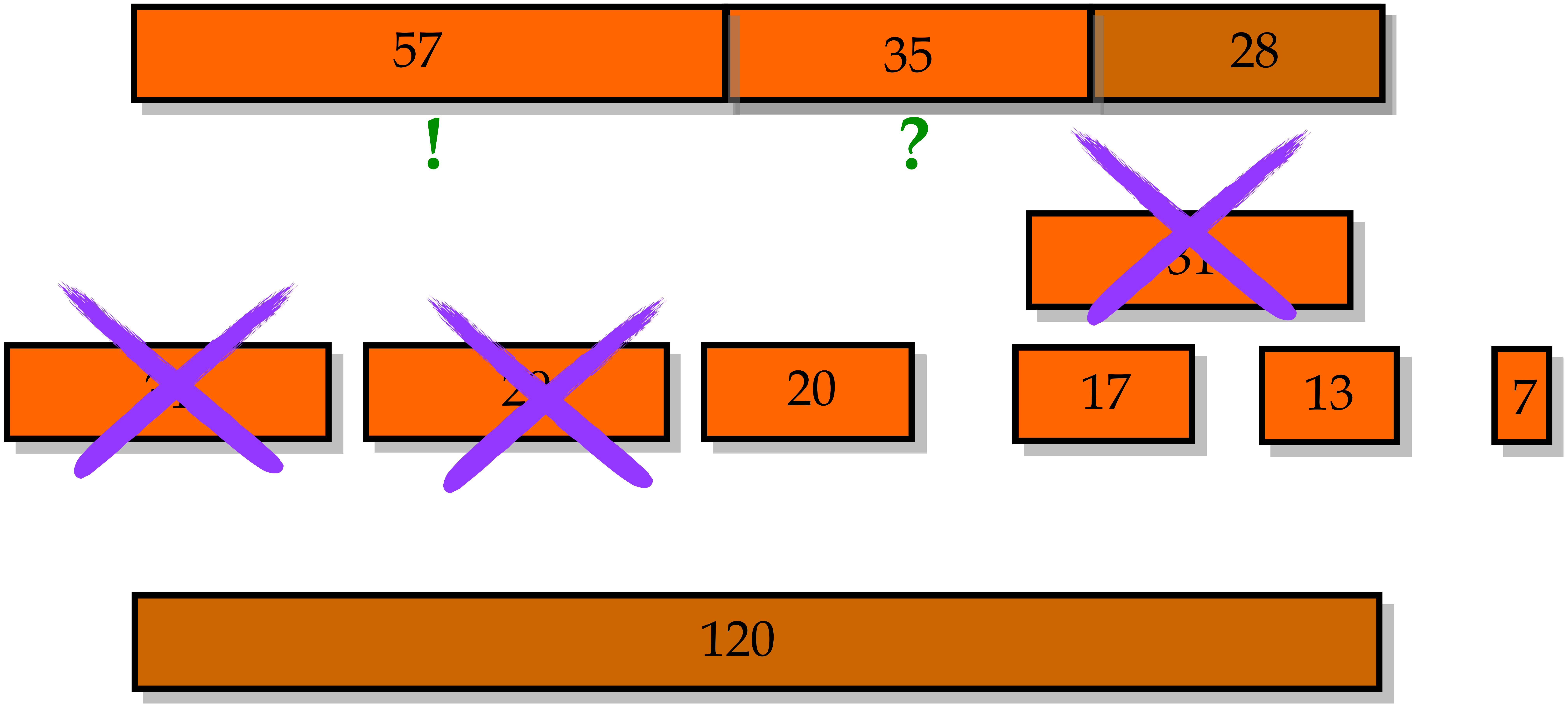
# Keine Lösung?!



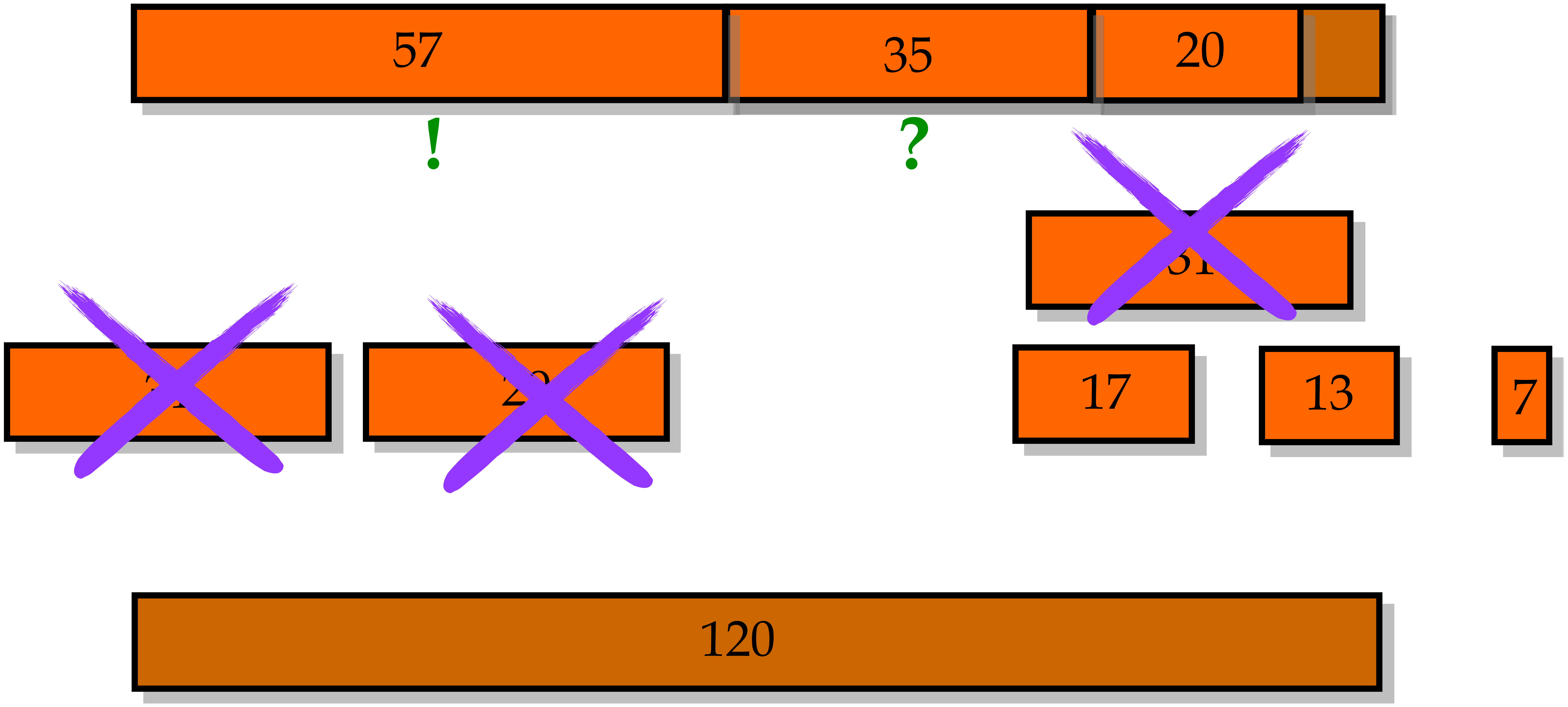
# Keine Lösung?!



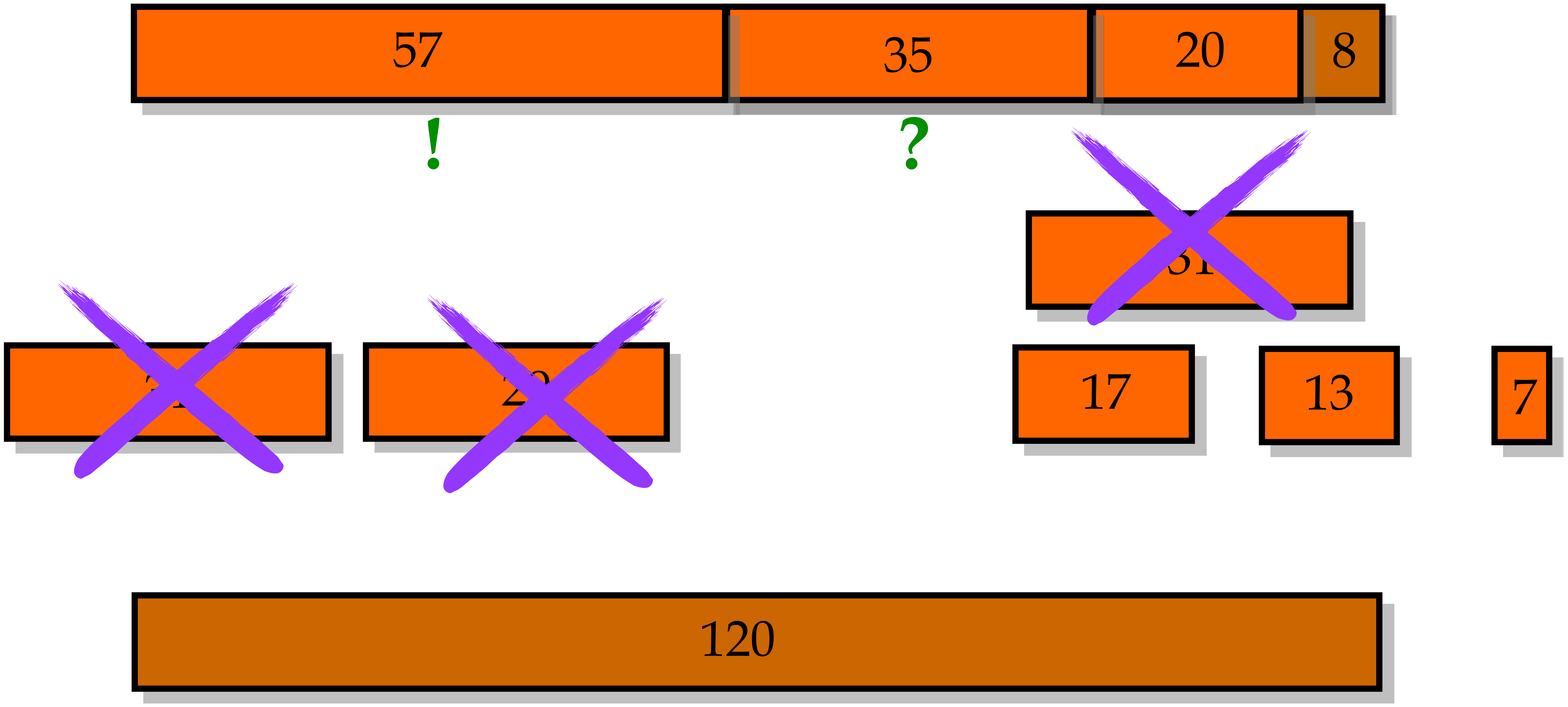
# Keine Lösung?!



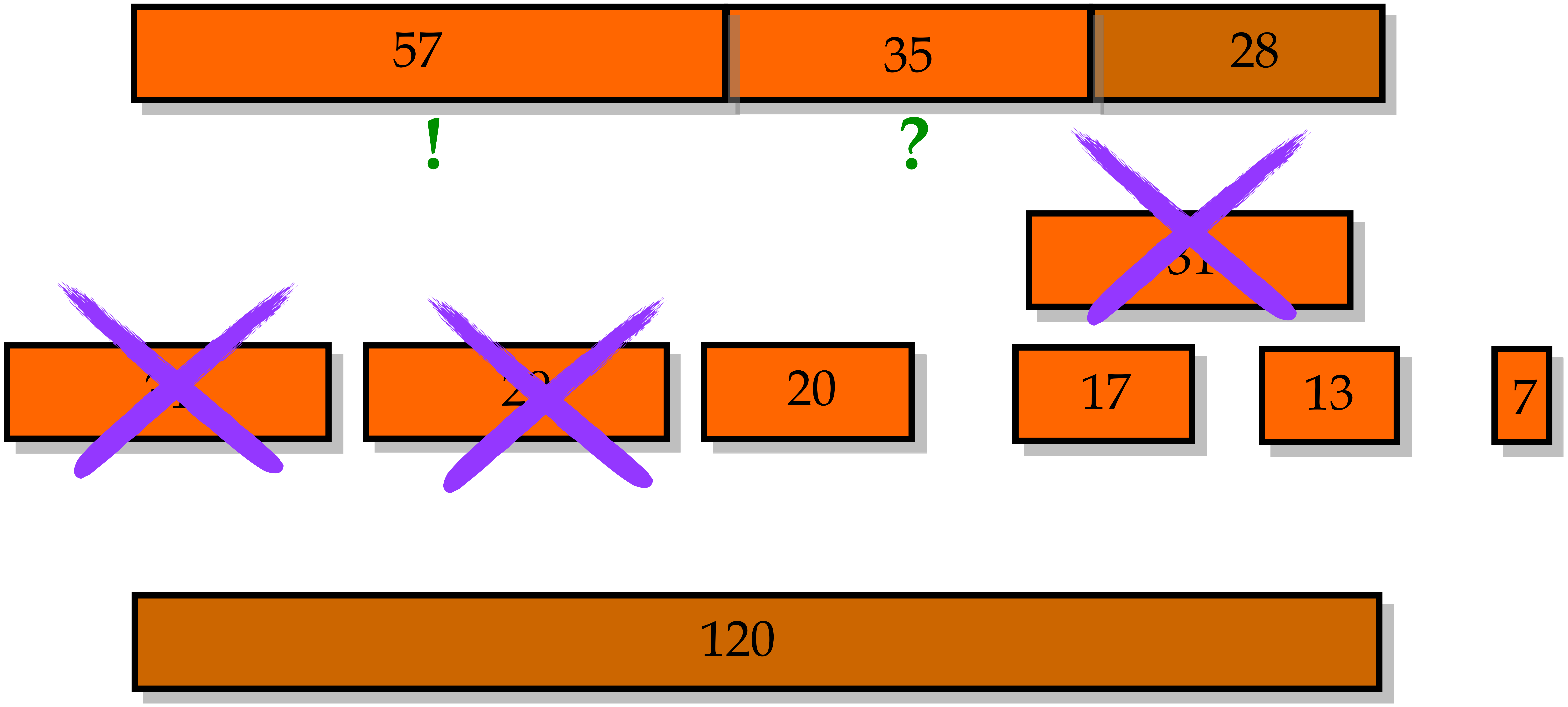
# Keine Lösung?!



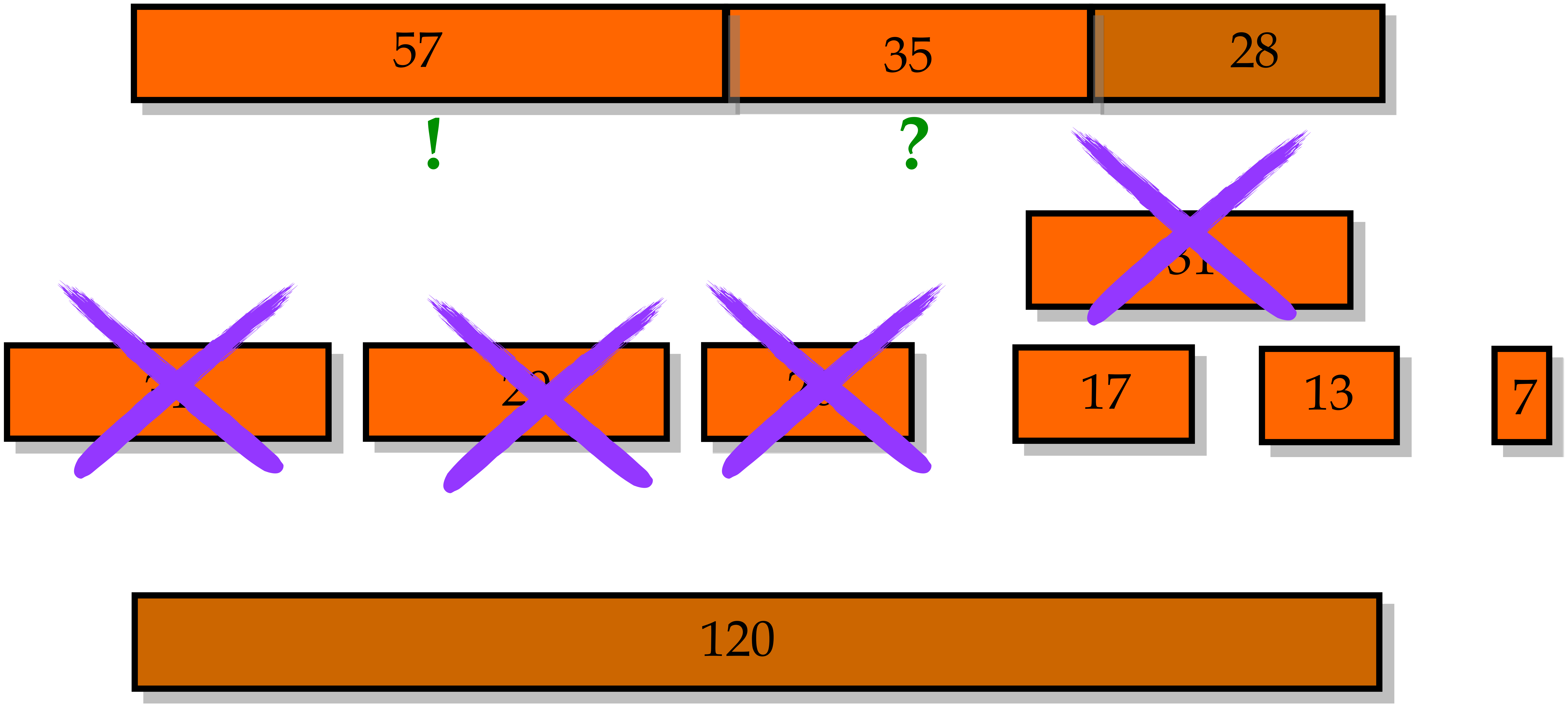
# Keine Lösung?!



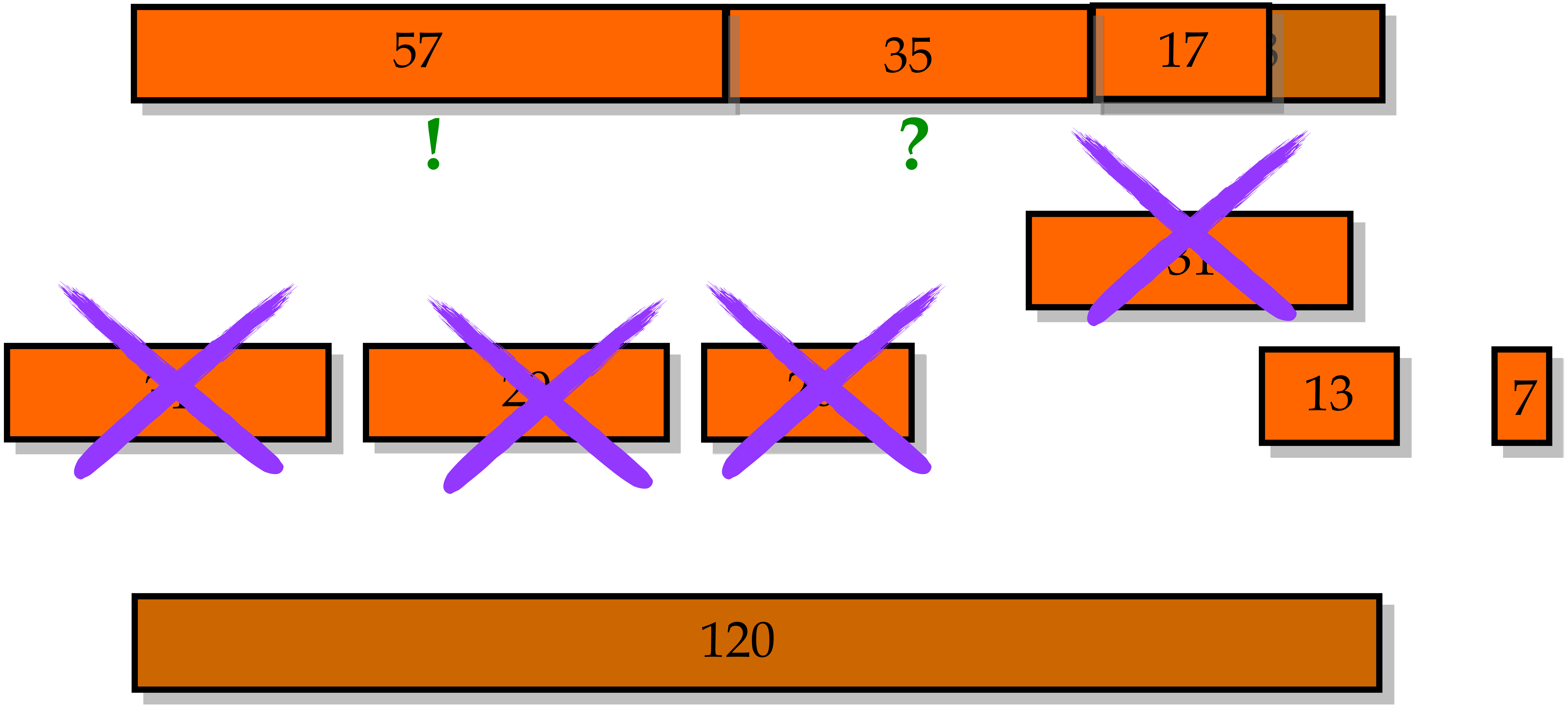
# Keine Lösung?!



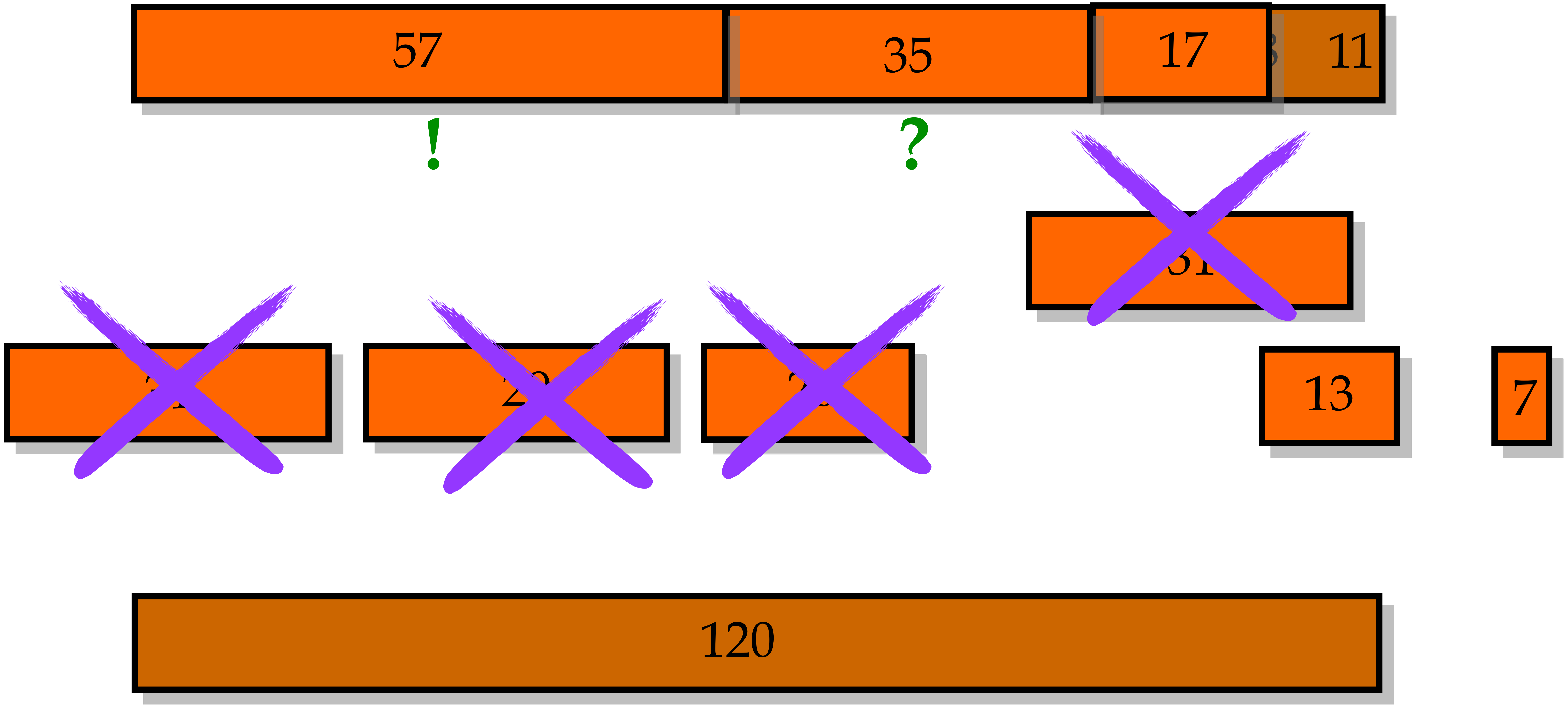
# Keine Lösung?!



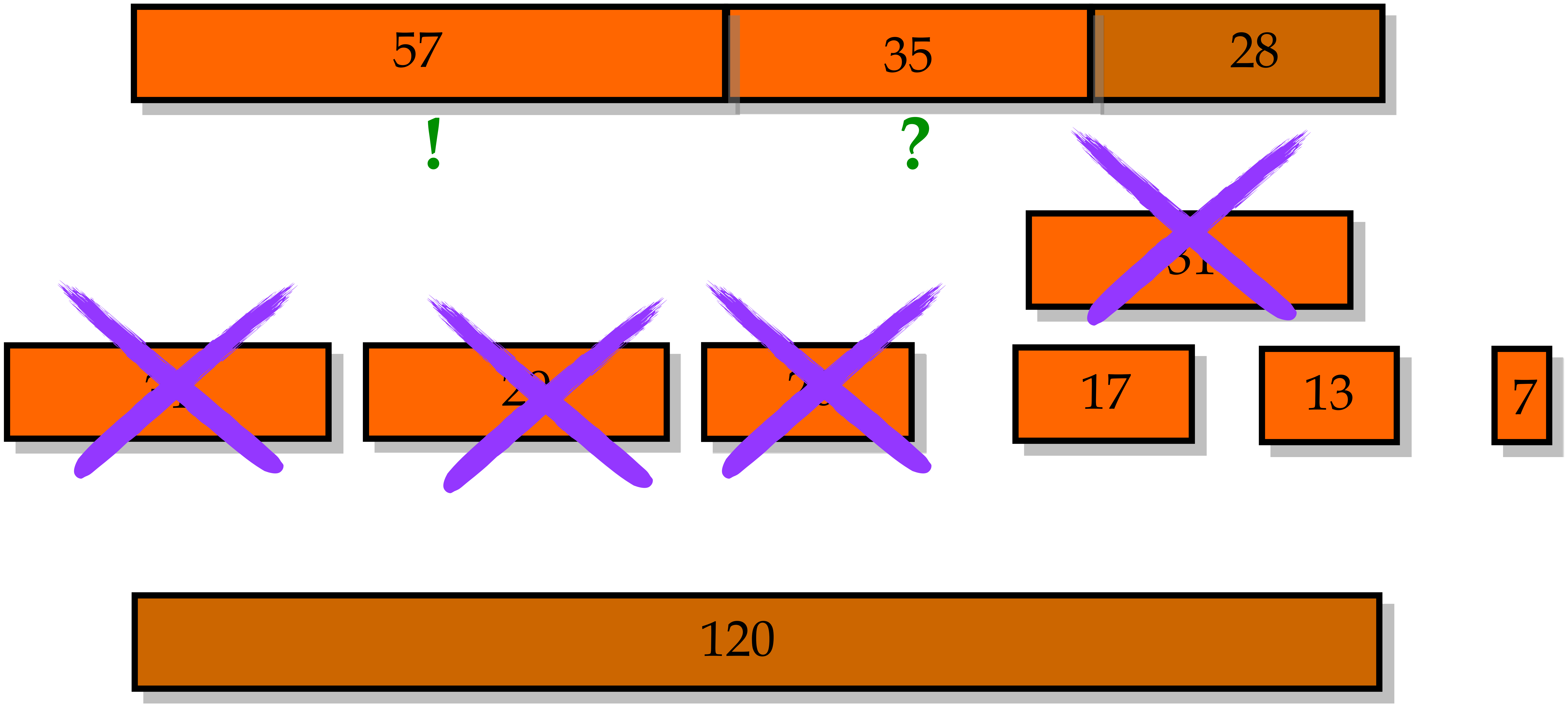
# Keine Lösung?!



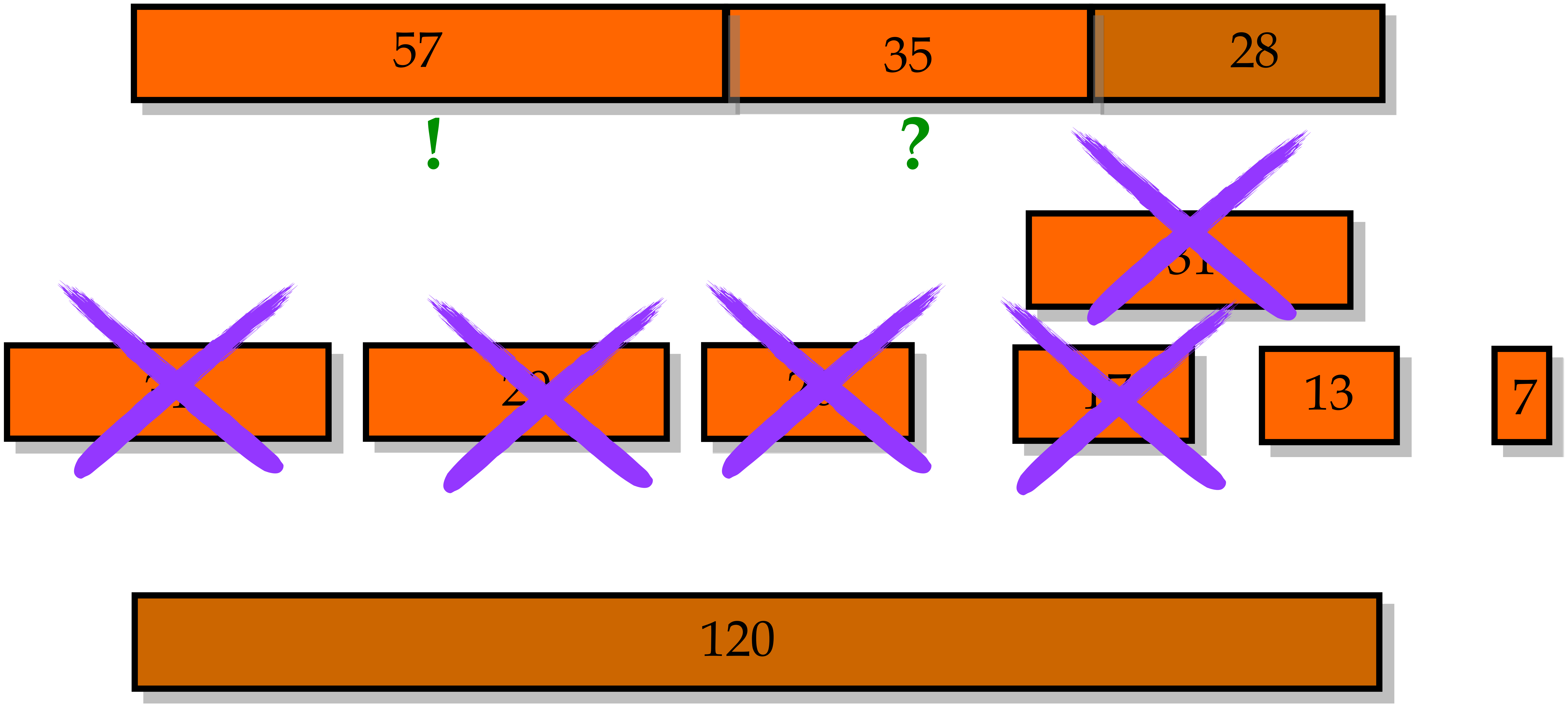
# Keine Lösung?!



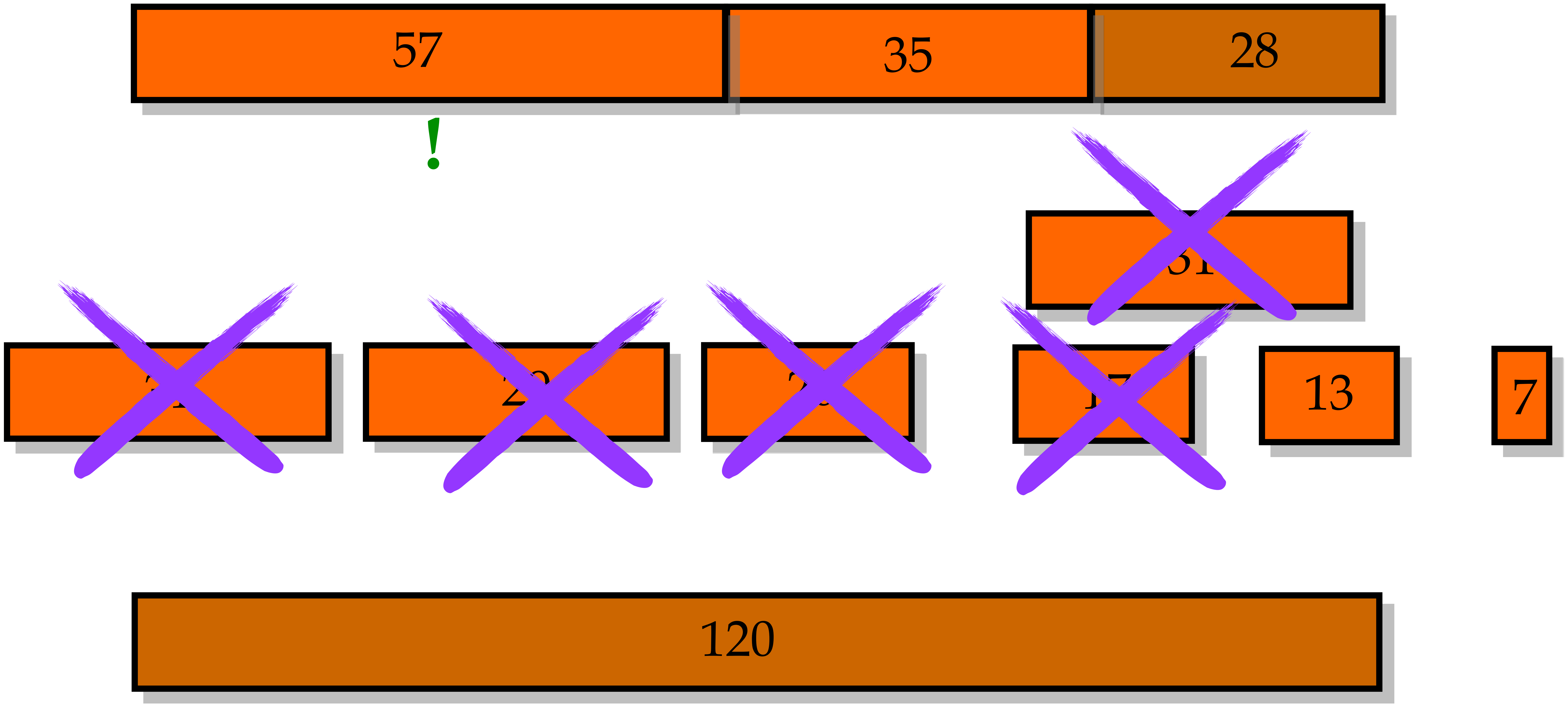
# Keine Lösung?!



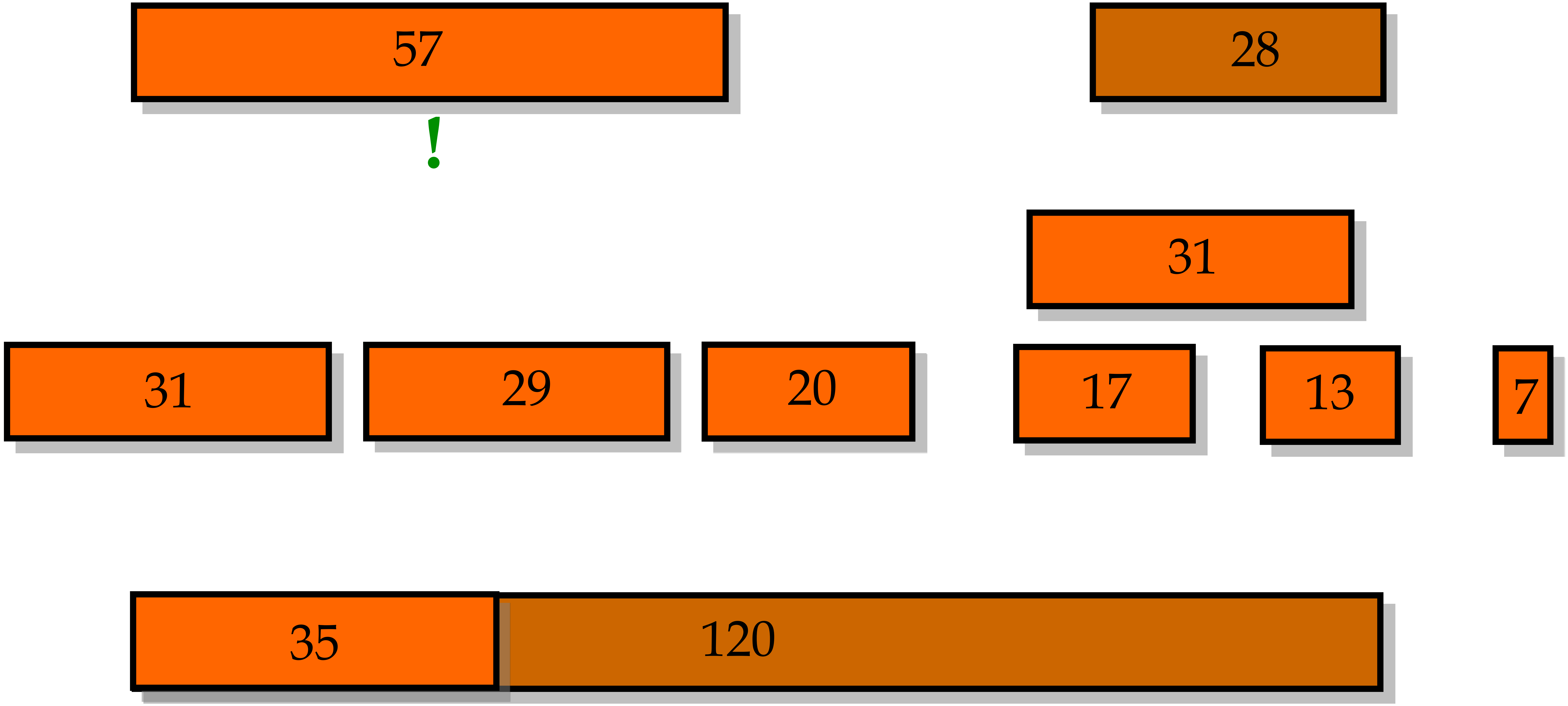
# Keine Lösung?!



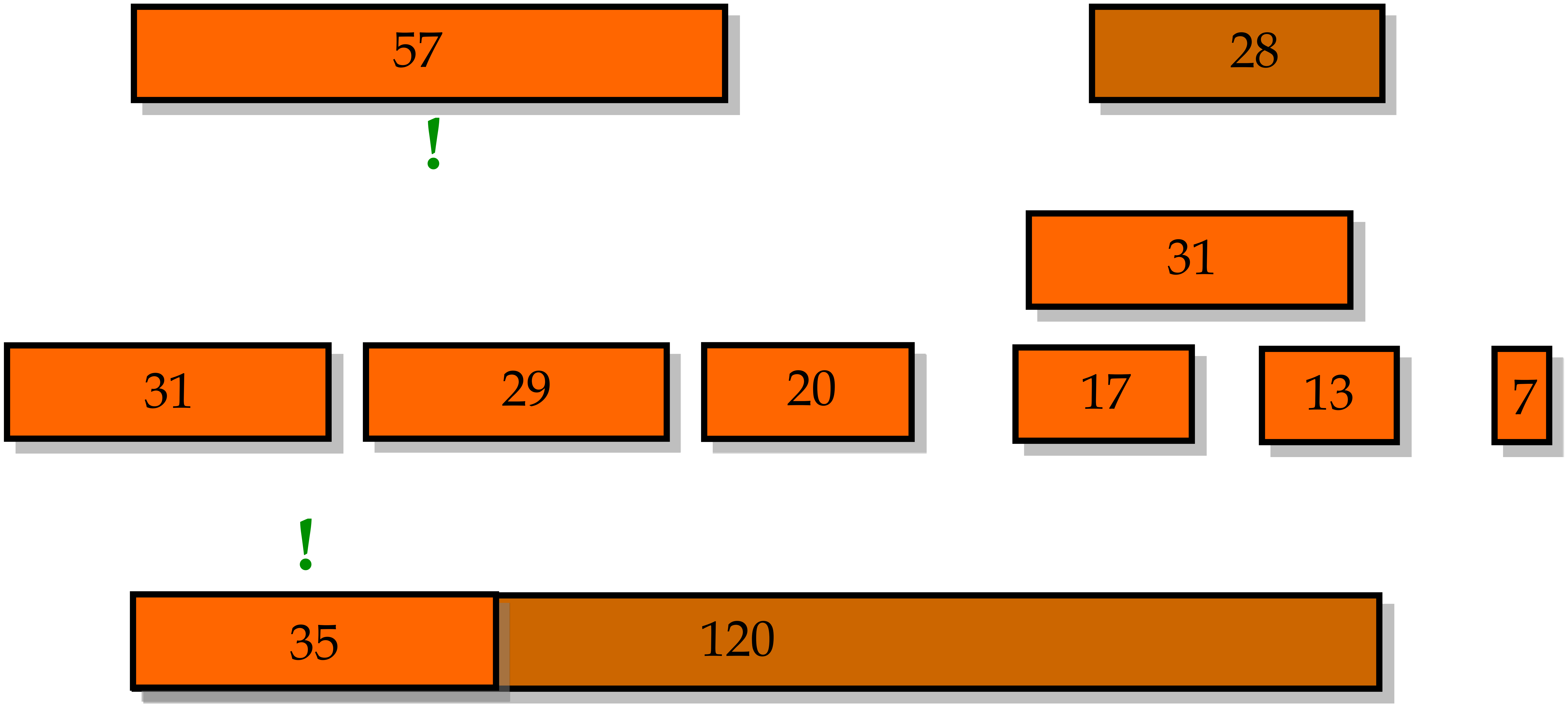
# Keine Lösung?!



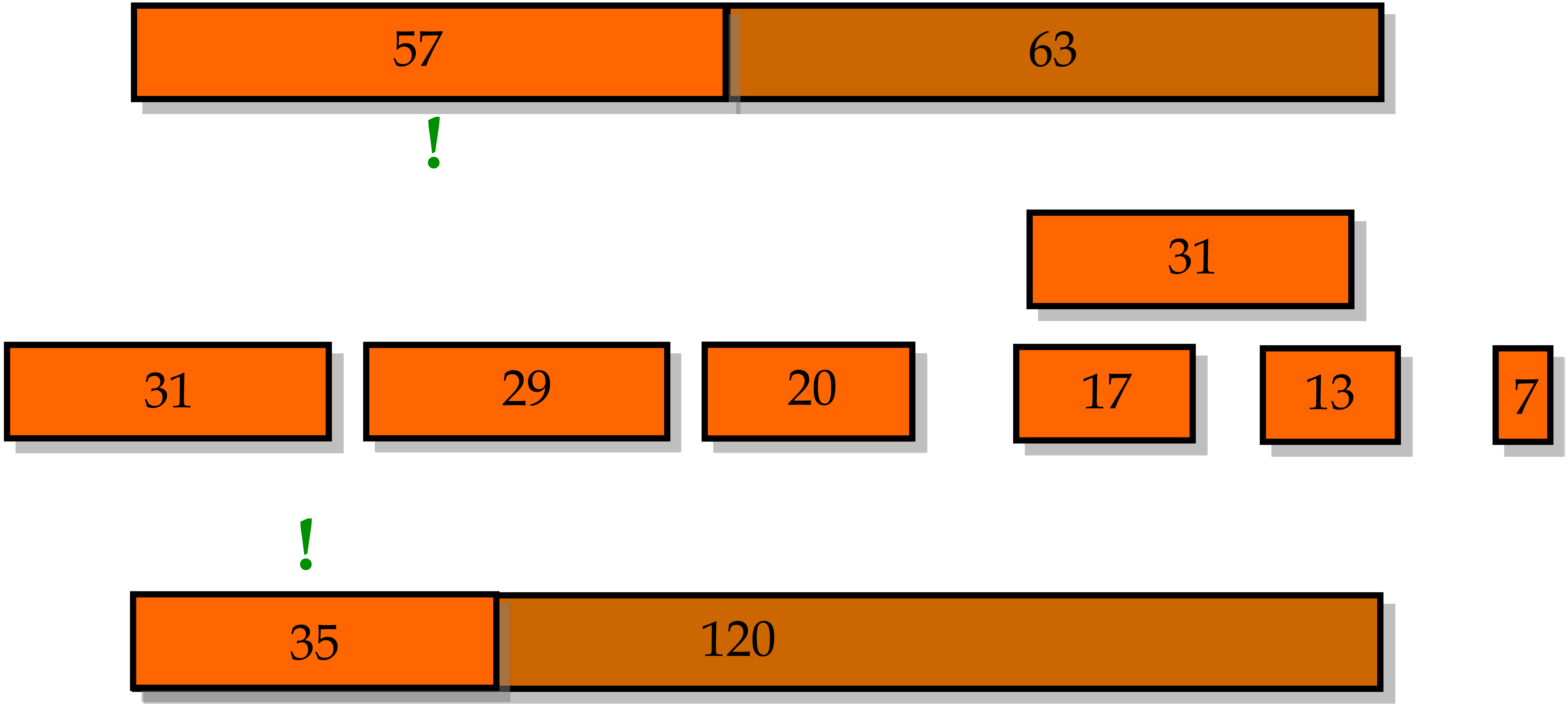
# Keine Lösung?!



# Keine Lösung?!

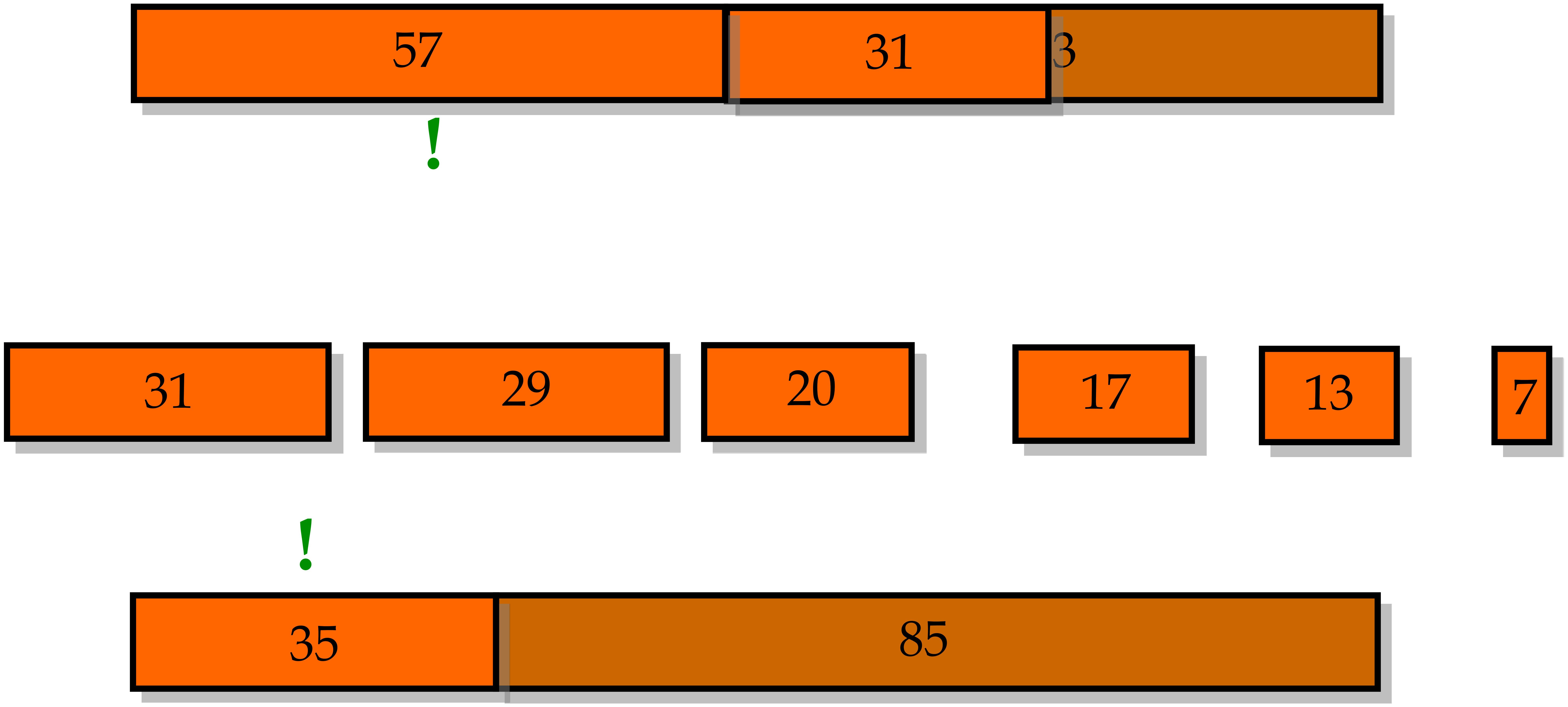


# Keine Lösung?!

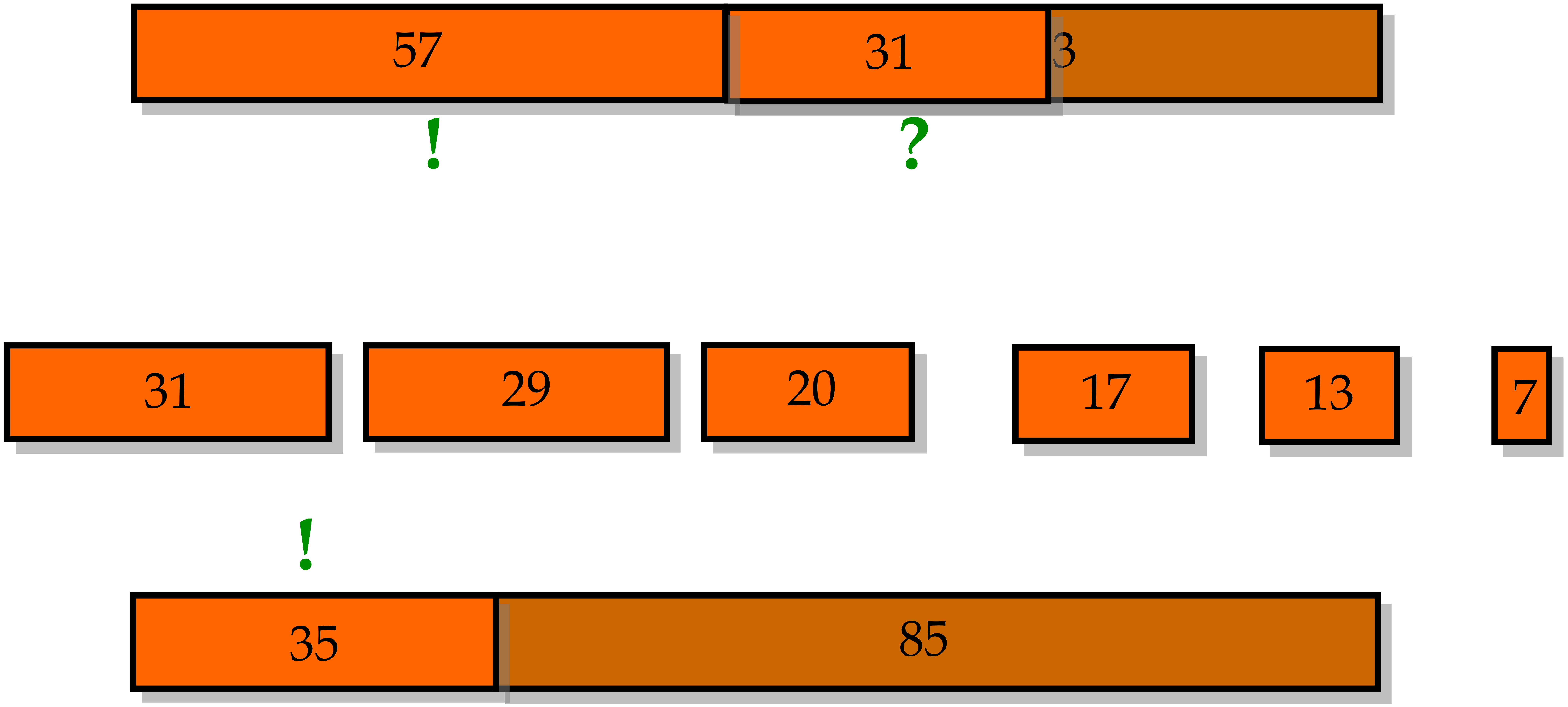


# Keine Lösung?!

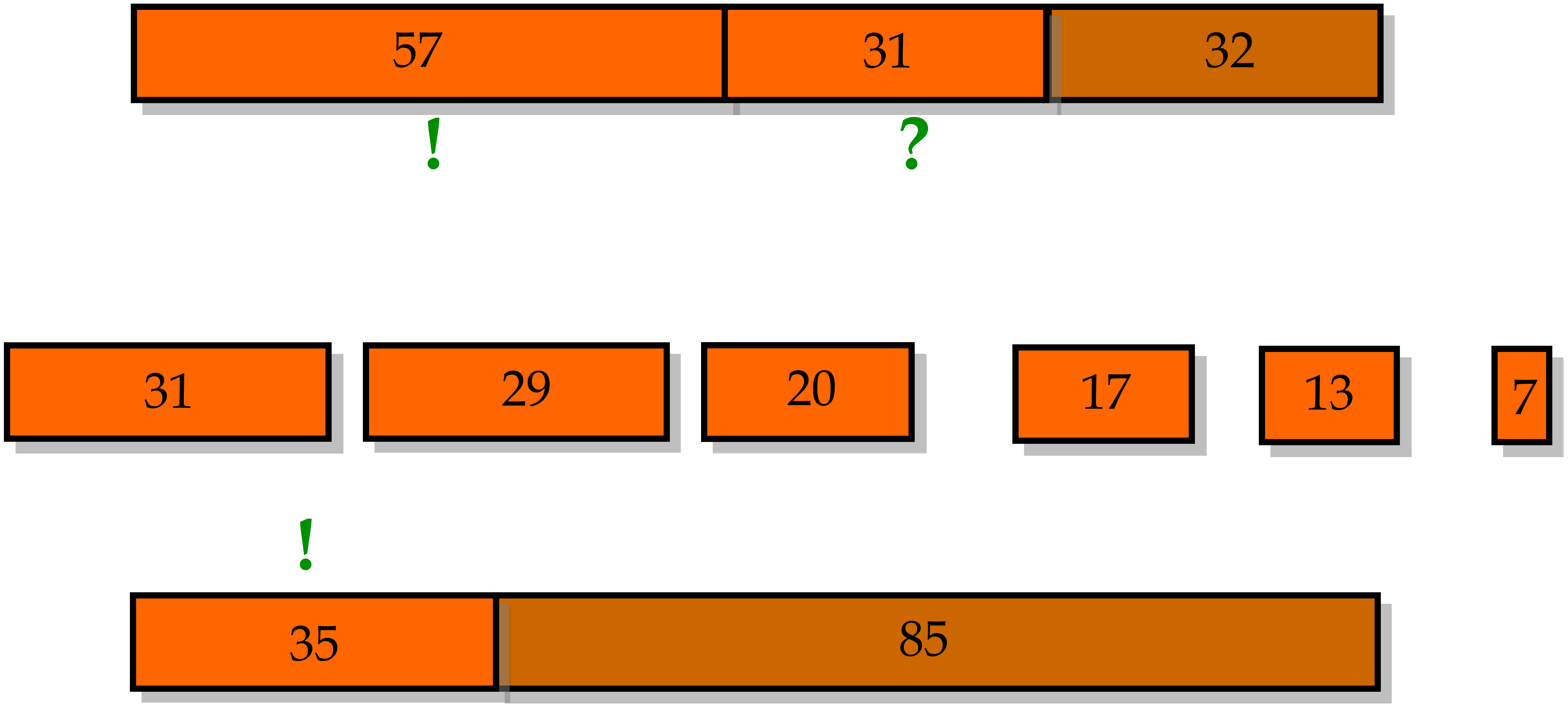
# Keine Lösung?!



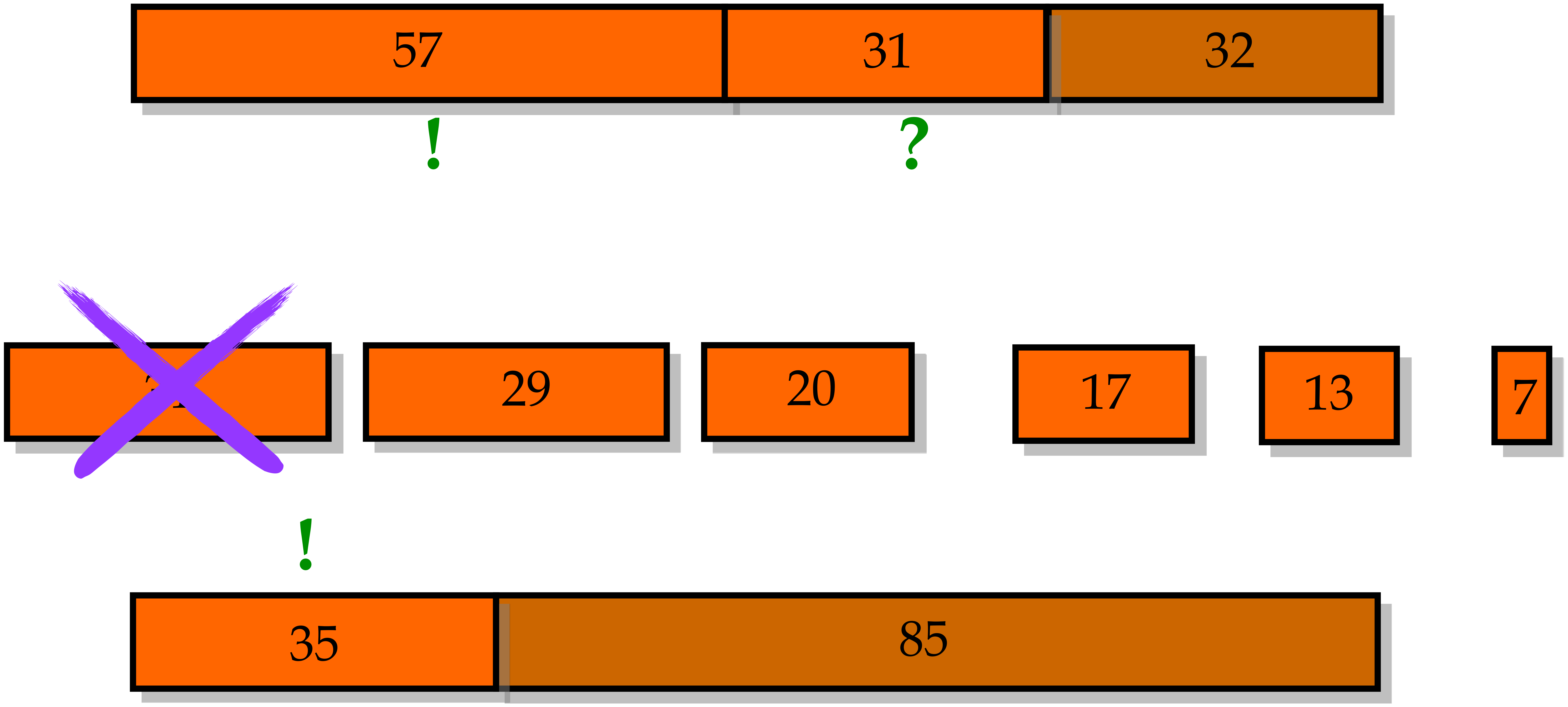
# Keine Lösung?!



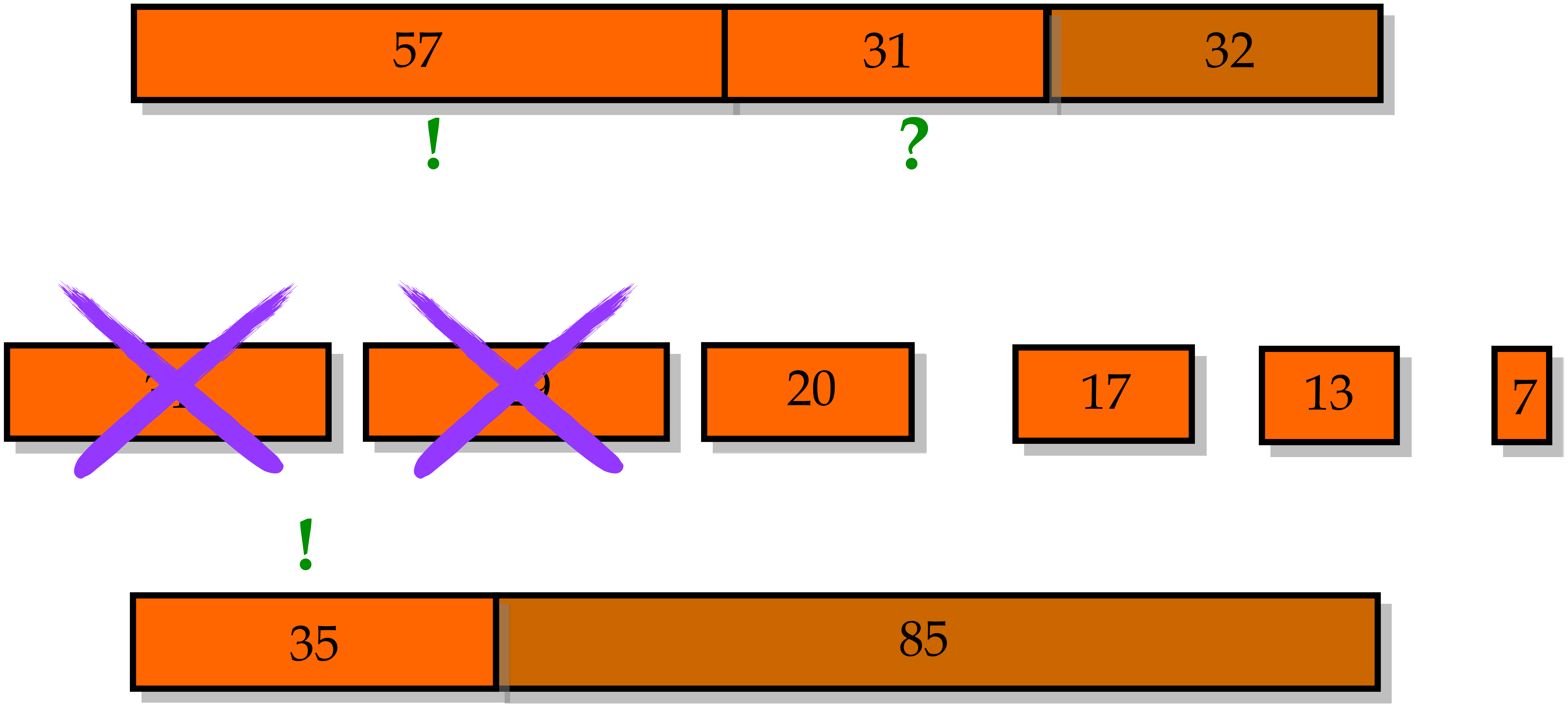
# Keine Lösung?!



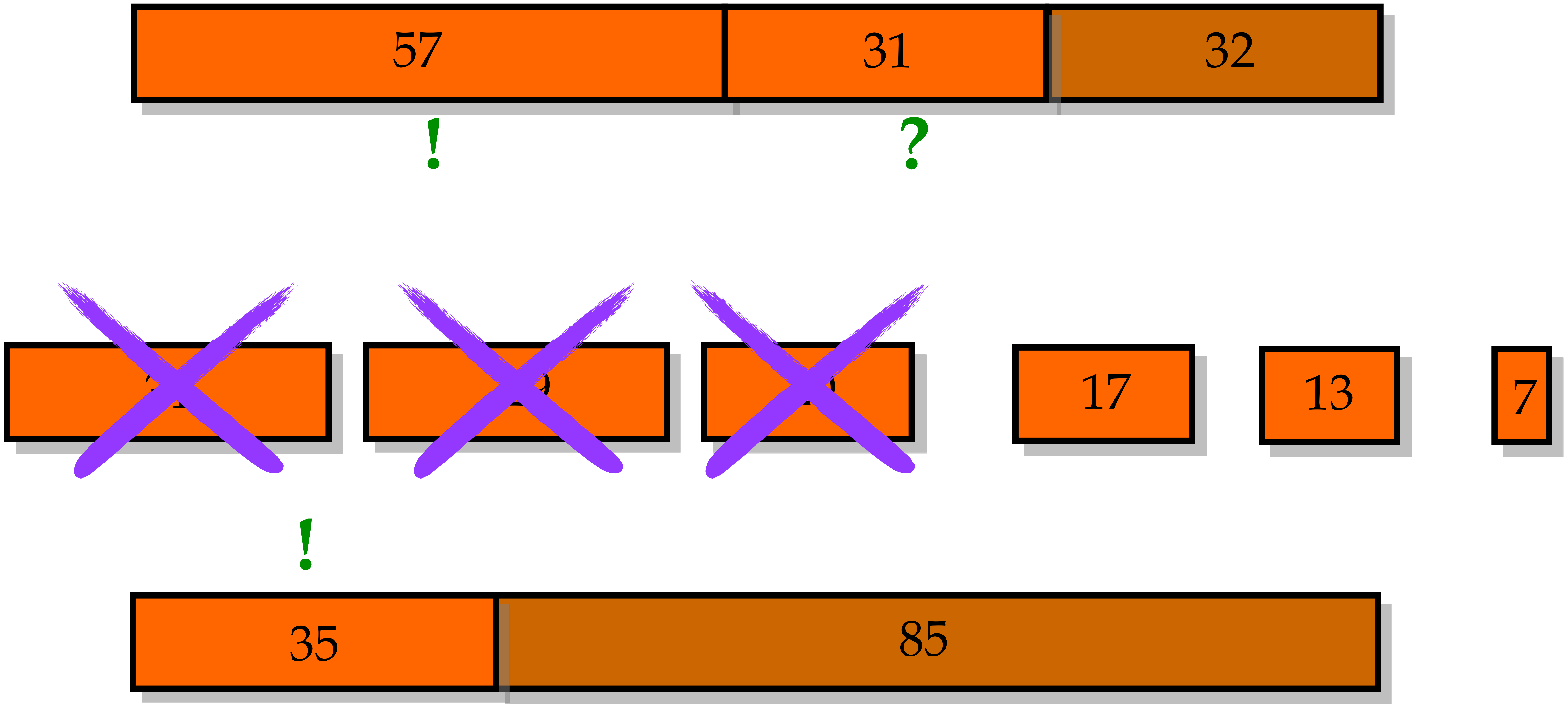
# Keine Lösung?!



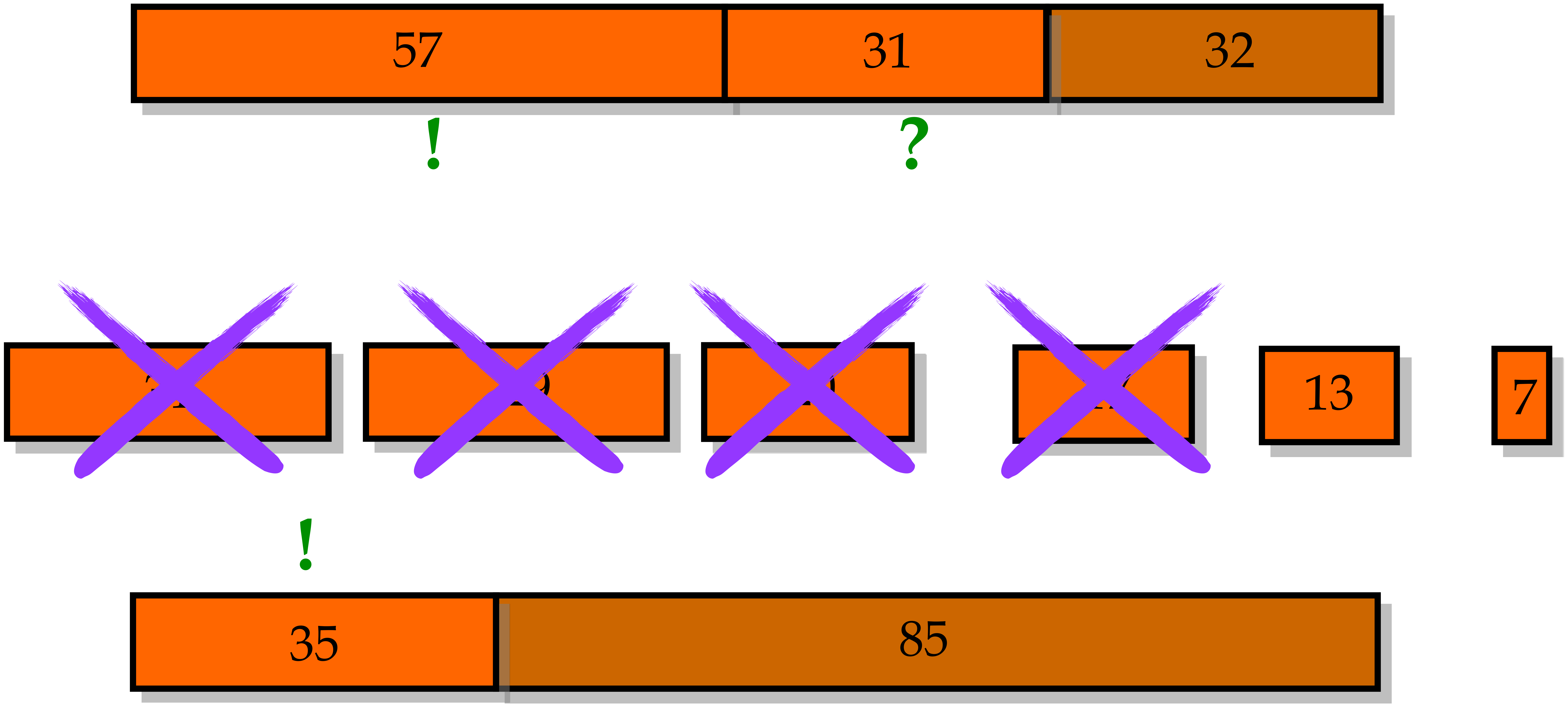
# Keine Lösung?!



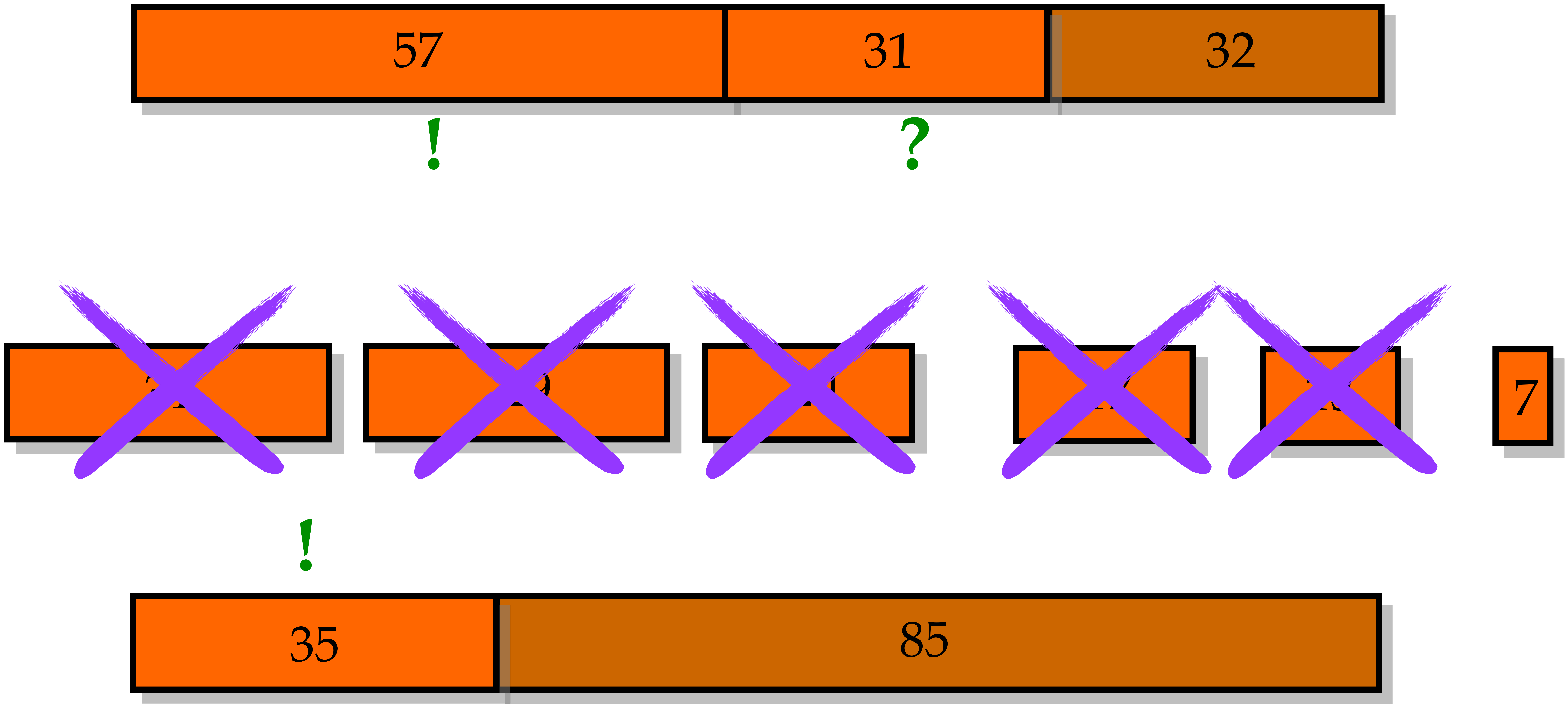
# Keine Lösung?!



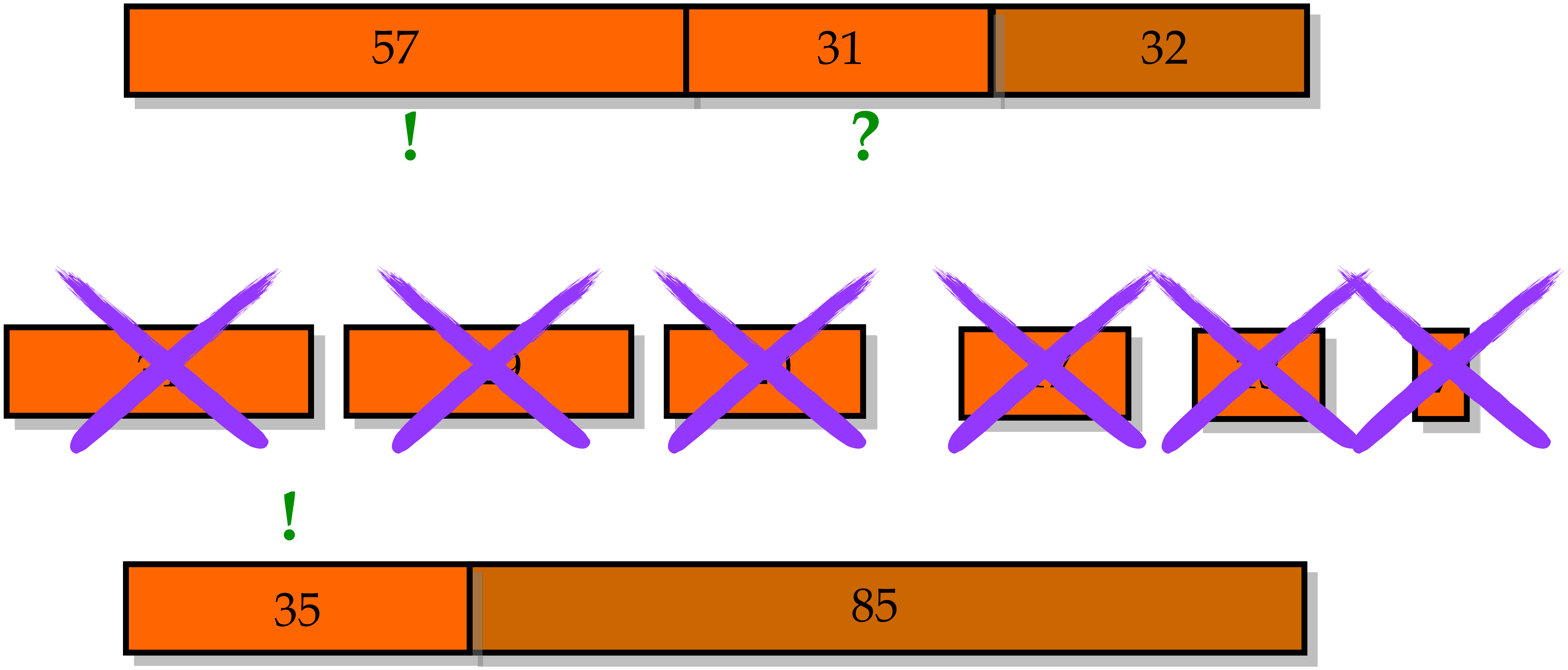
# Keine Lösung?!



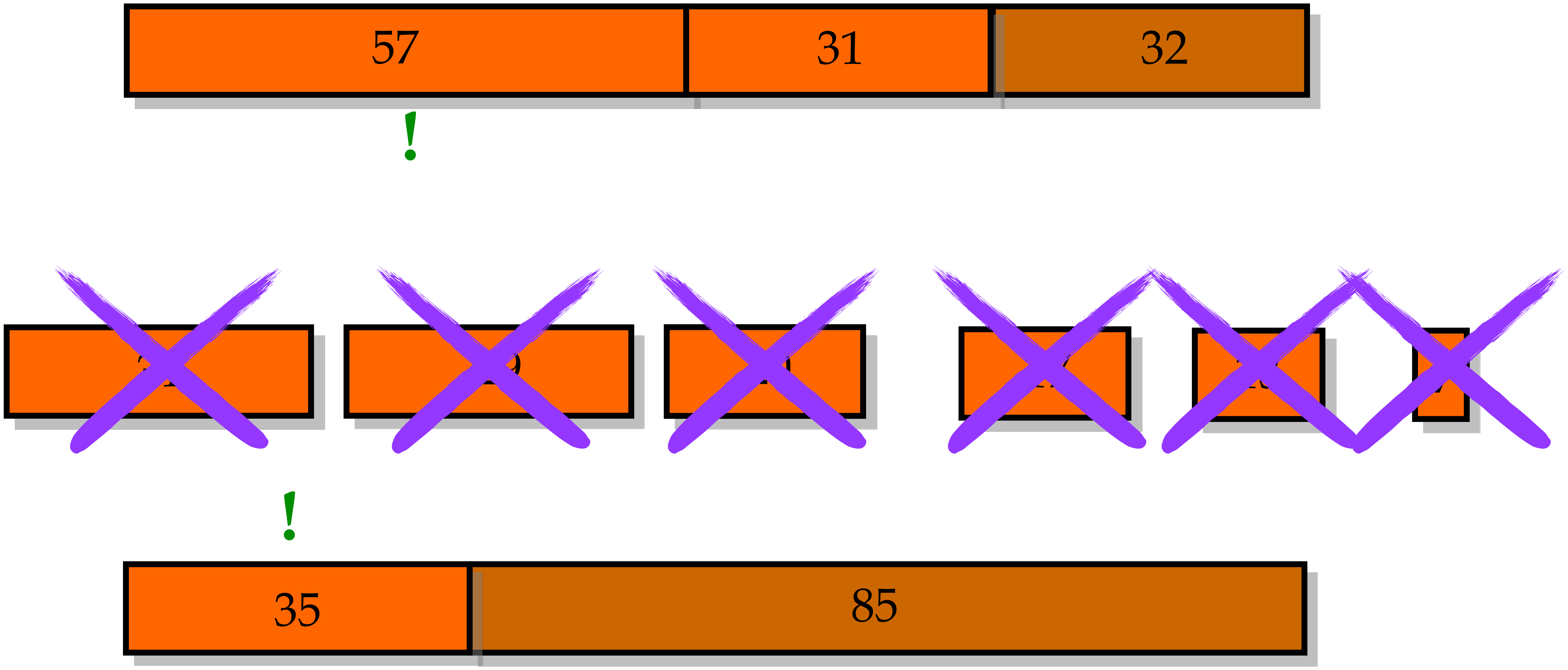
# Keine Lösung?!



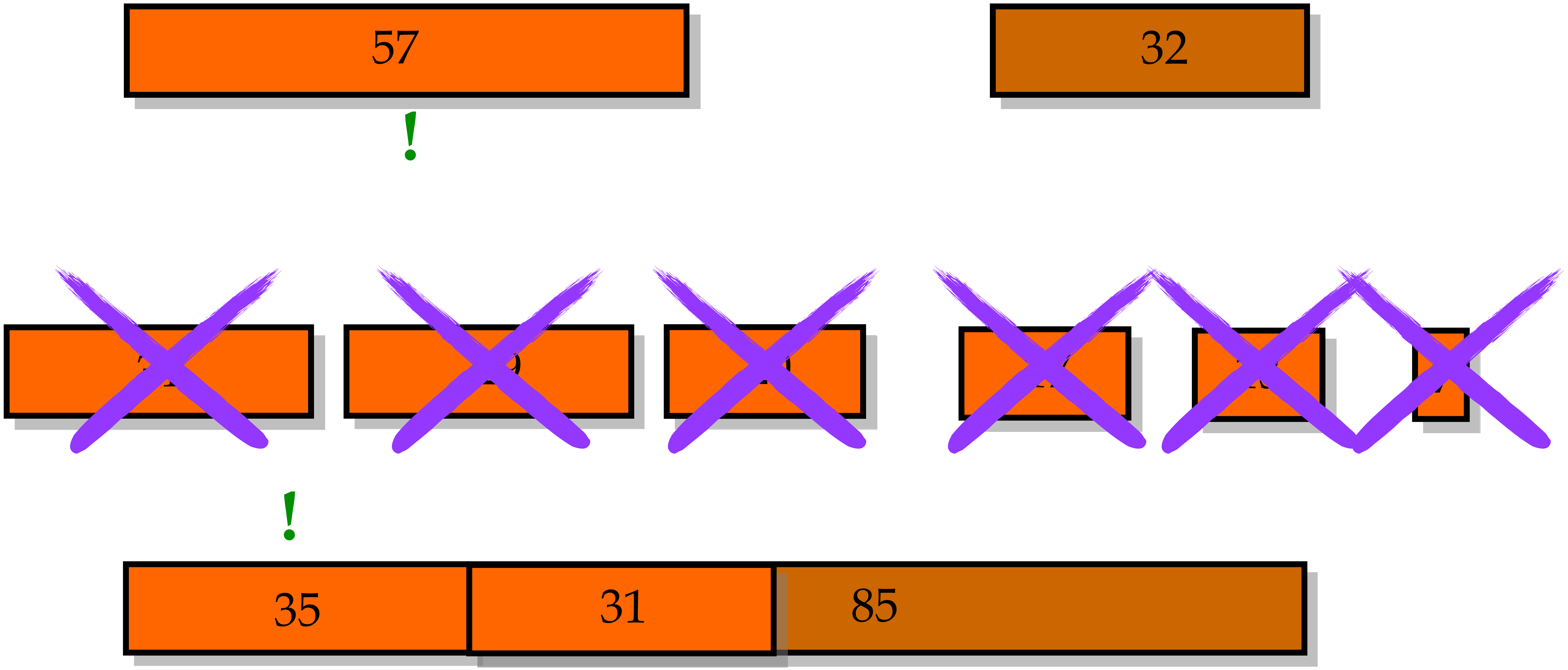
# Keine Lösung?!



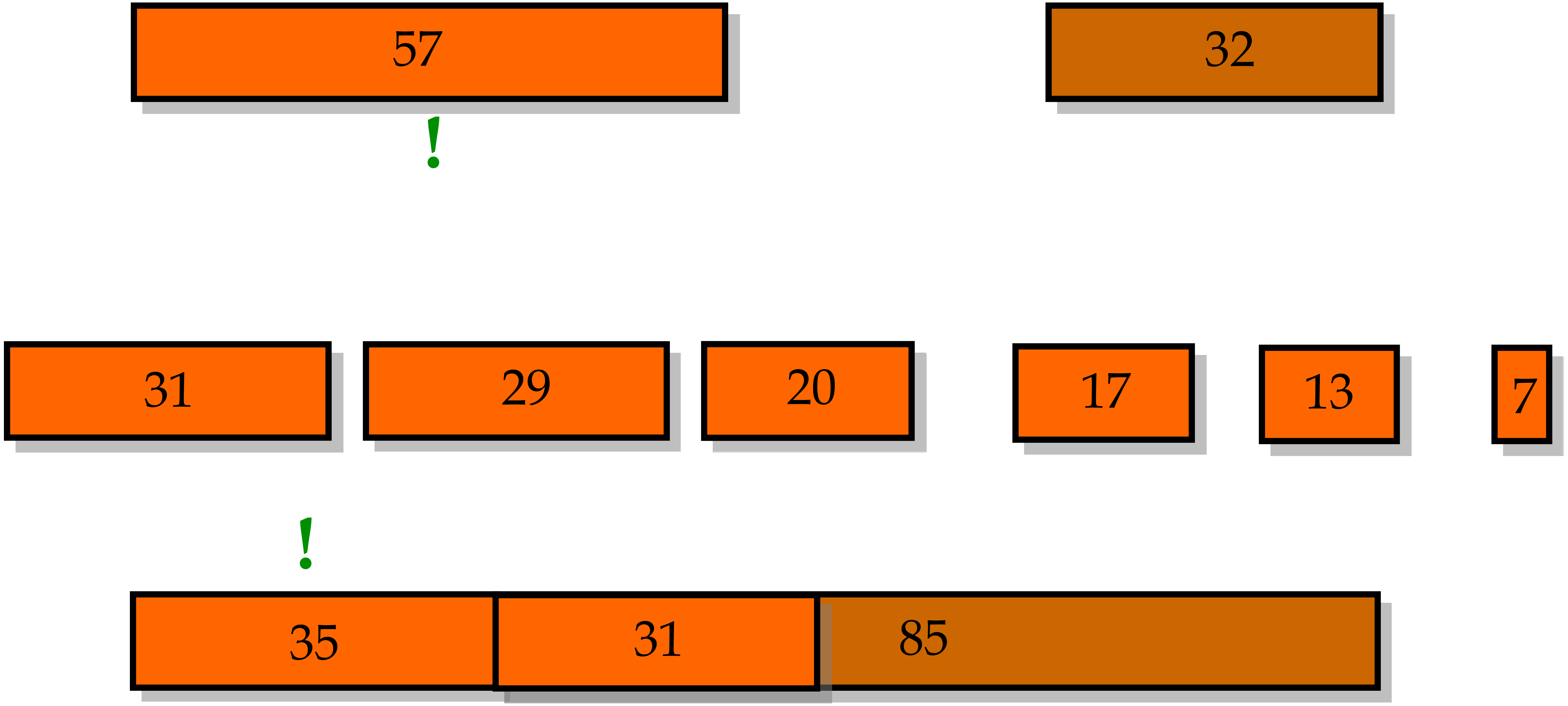
# Keine Lösung?!



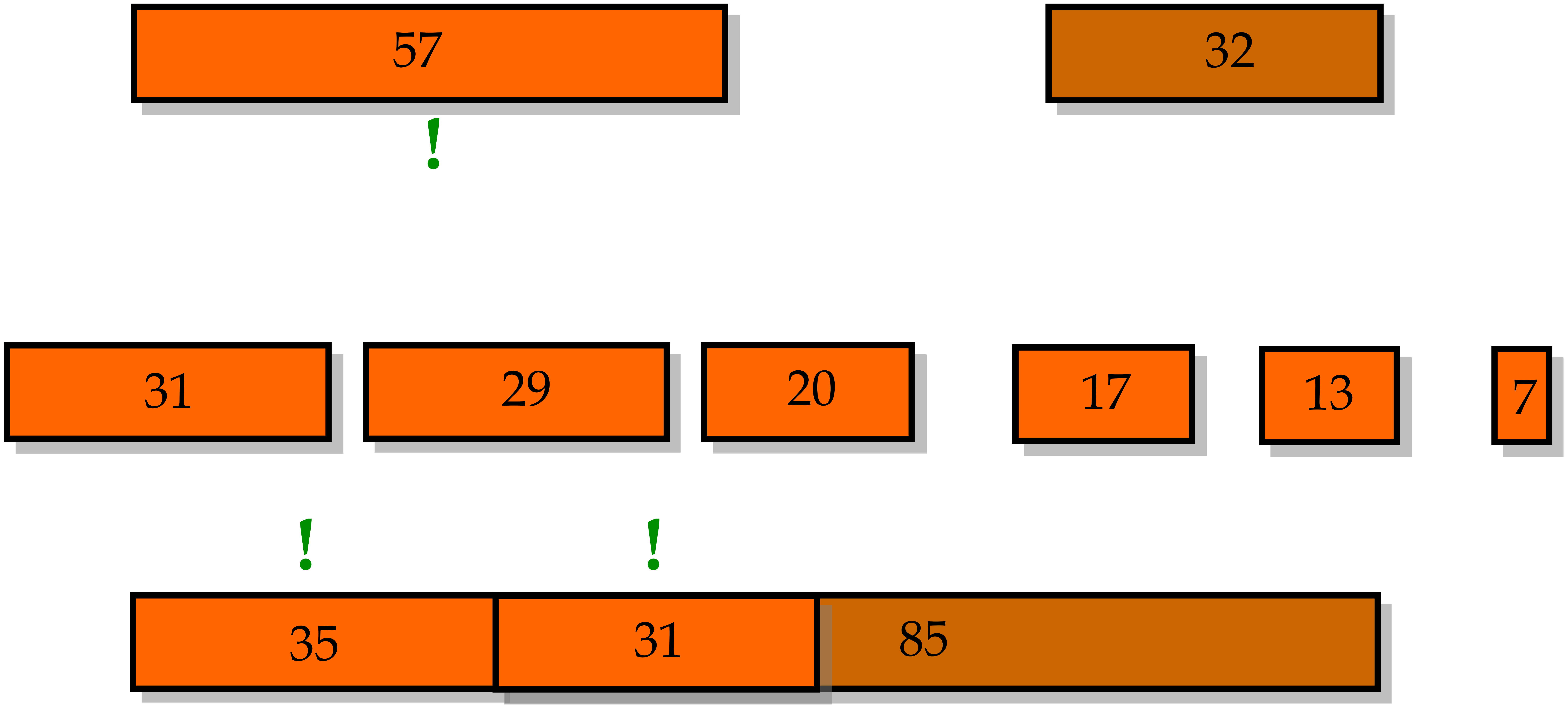
# Keine Lösung?!



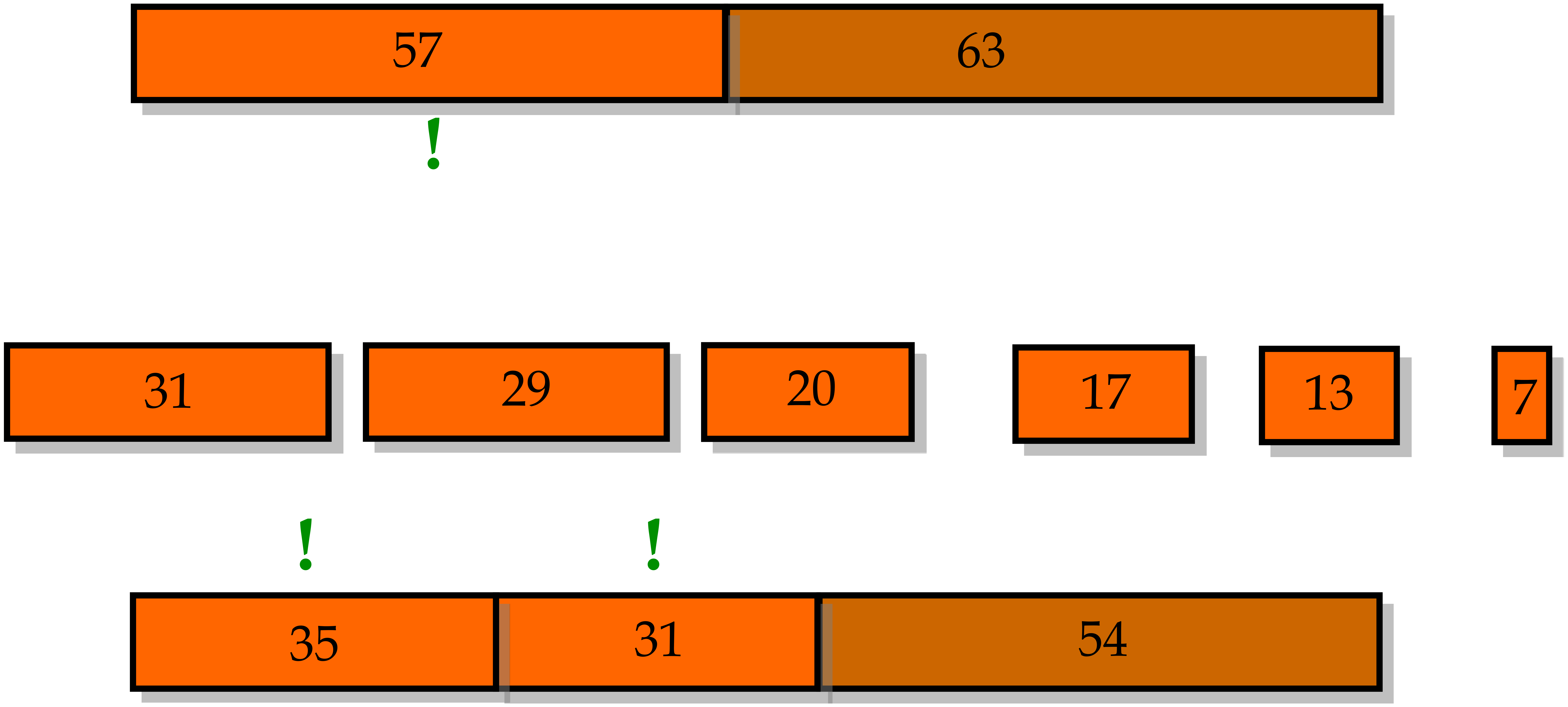
# Keine Lösung?!



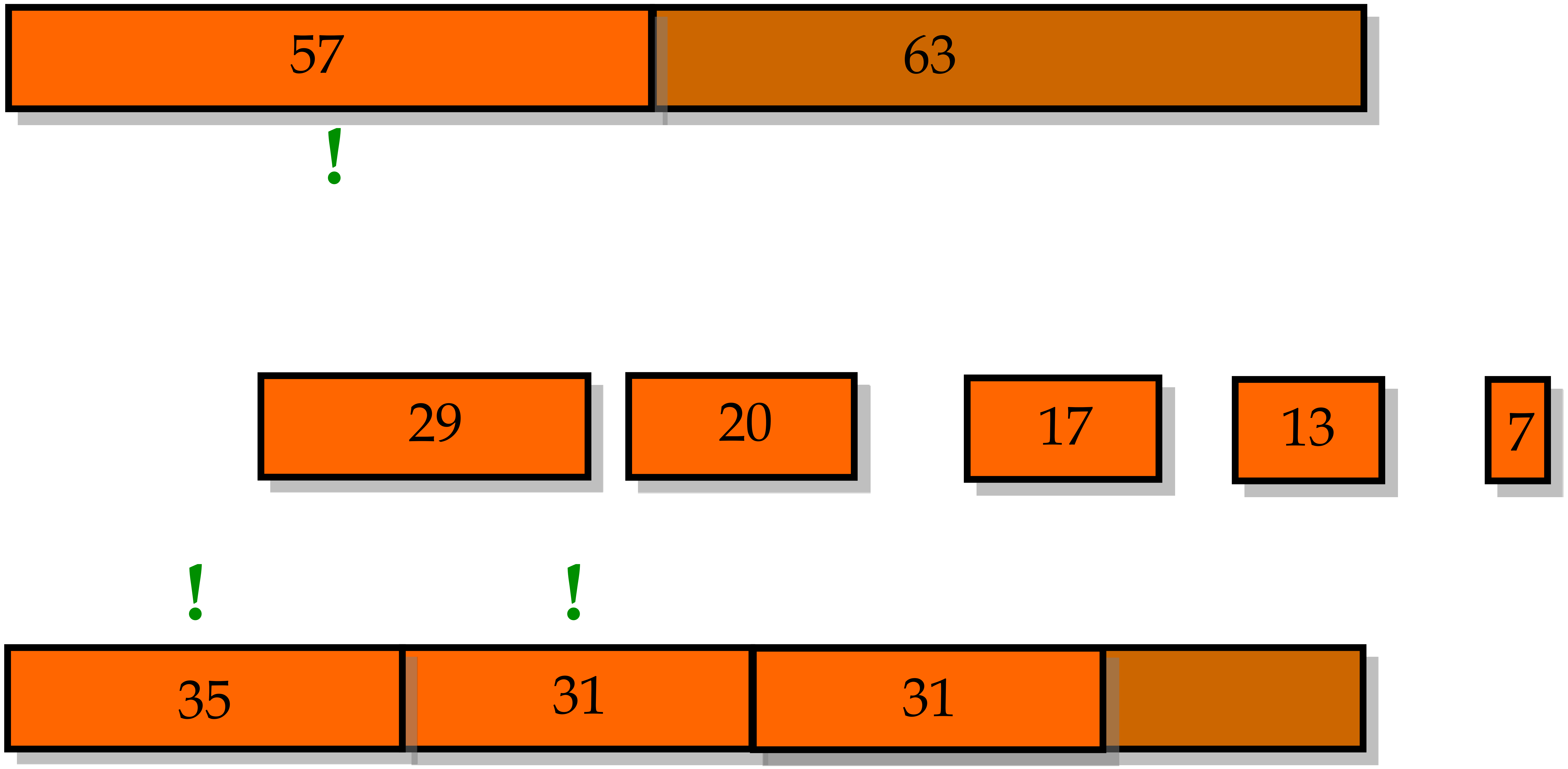
# Keine Lösung?!



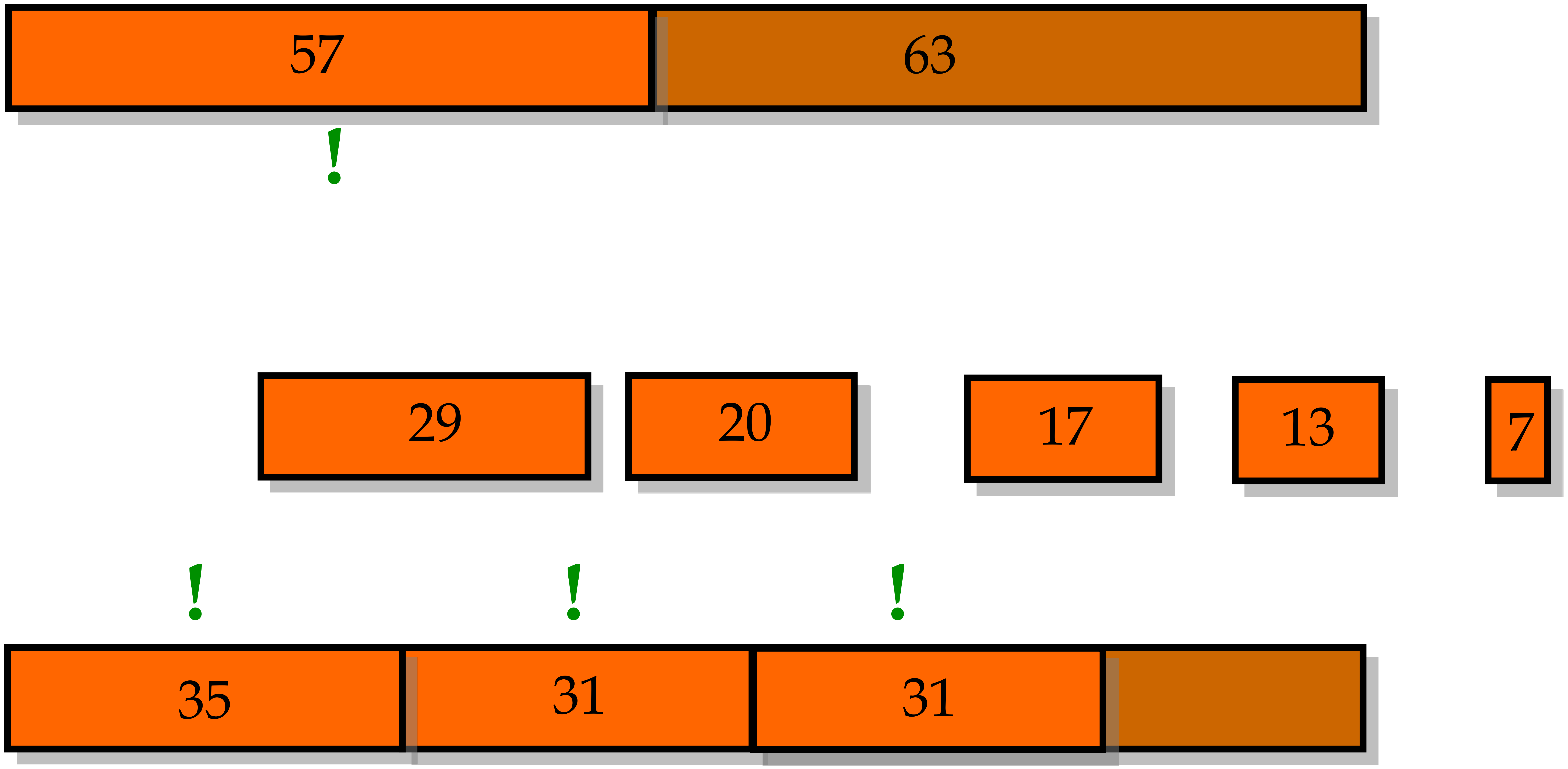
# Keine Lösung?!



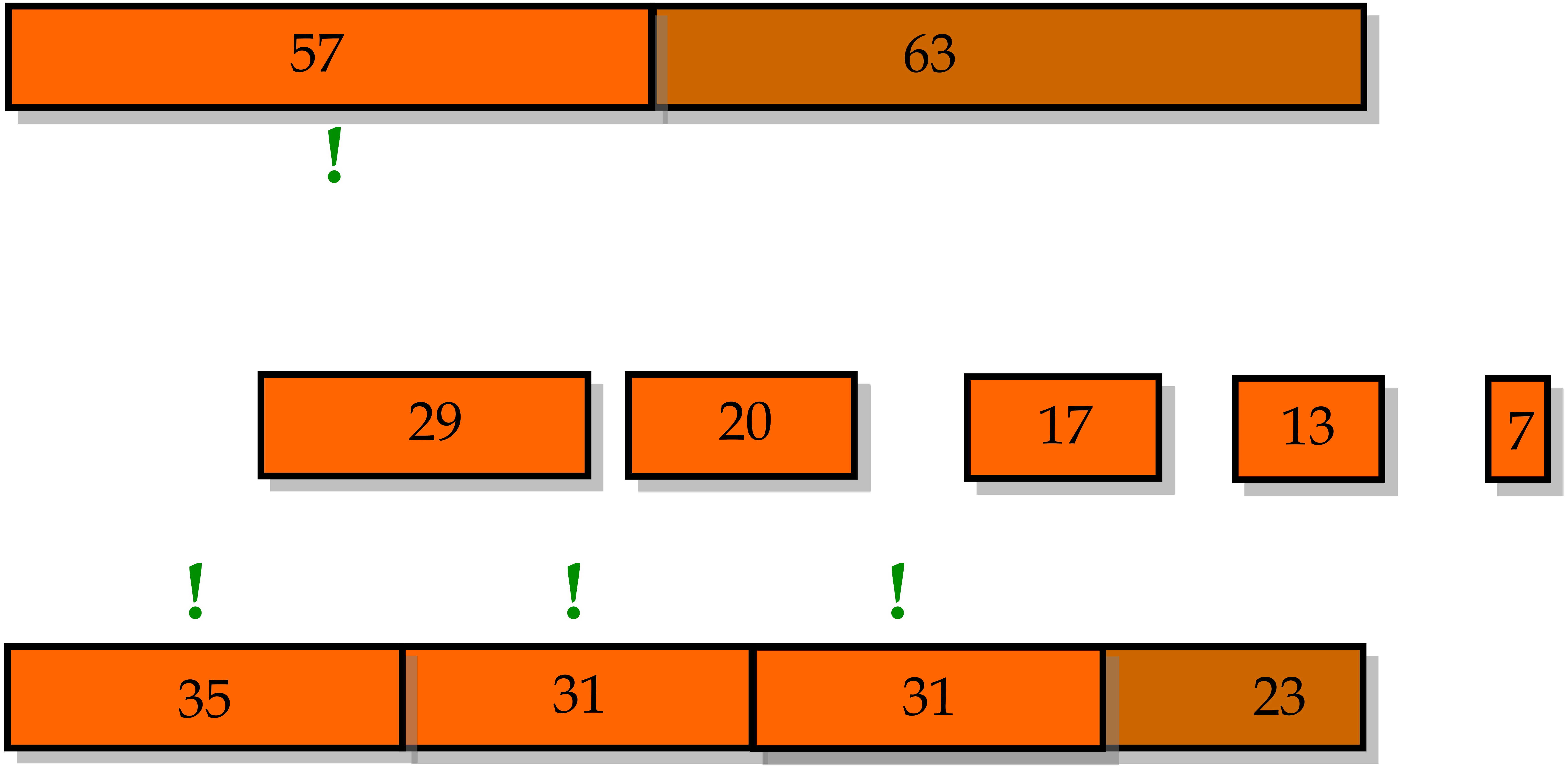
# Keine Lösung?!



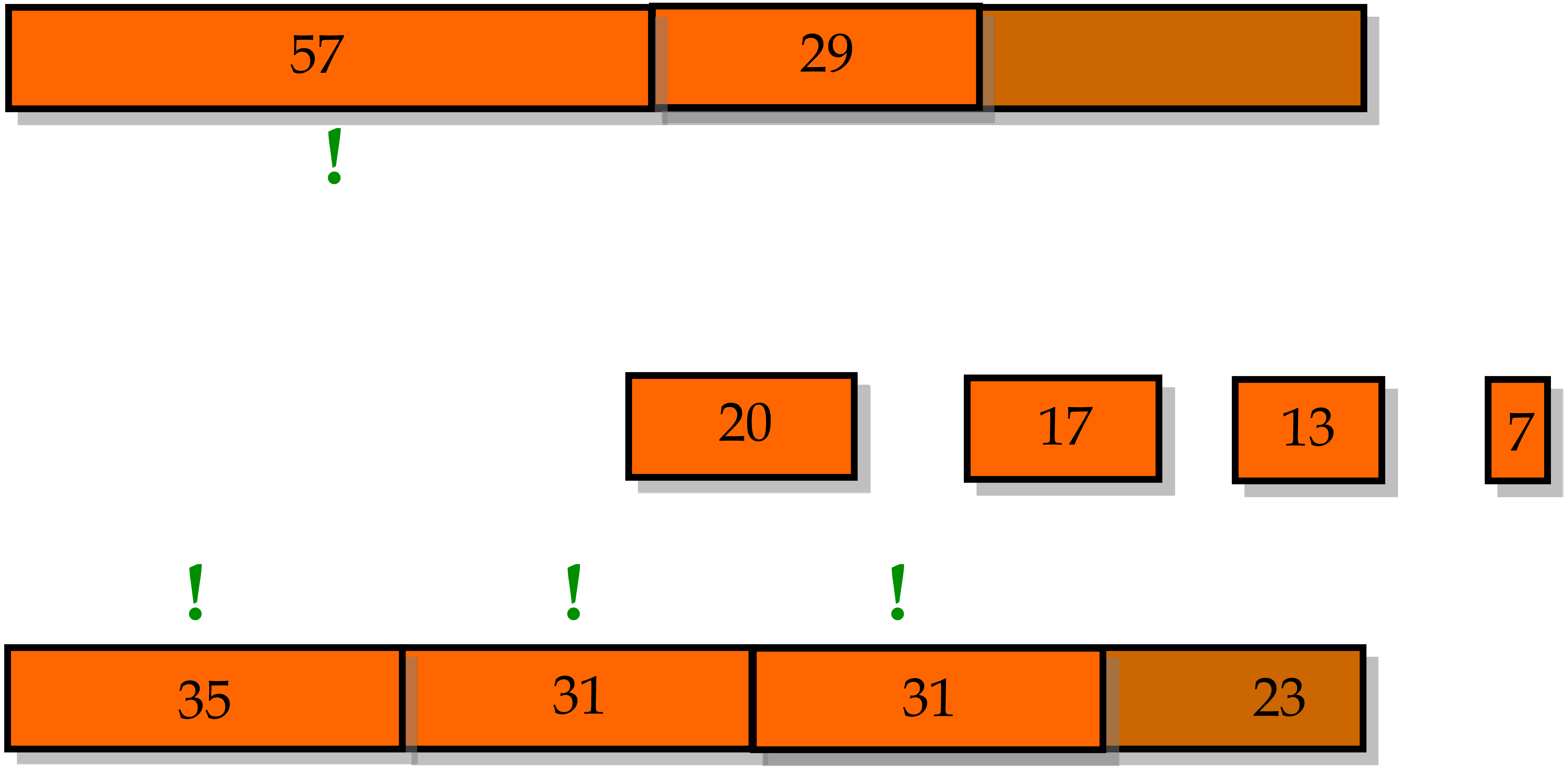
# Keine Lösung?!



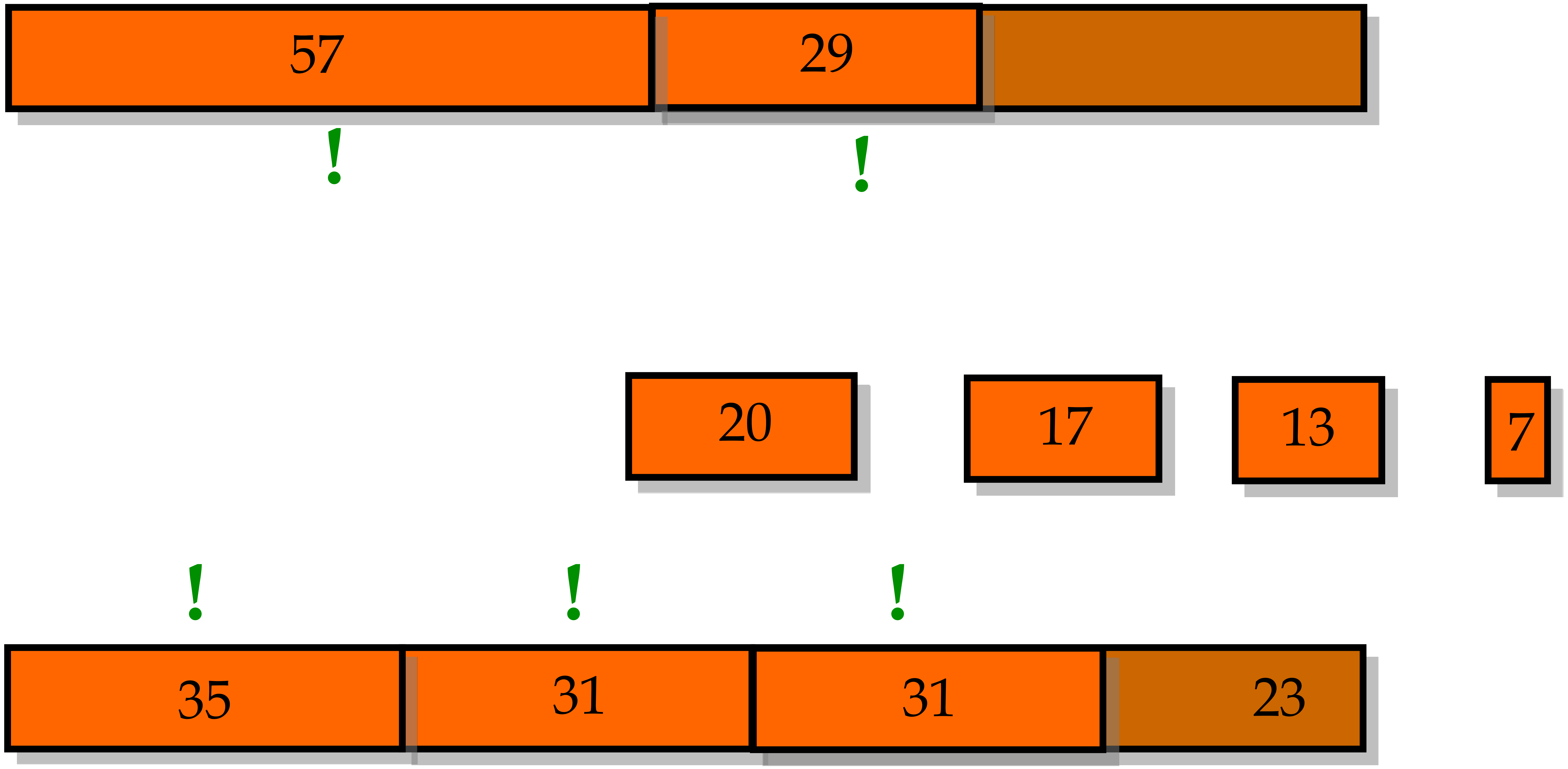
# Keine Lösung?!



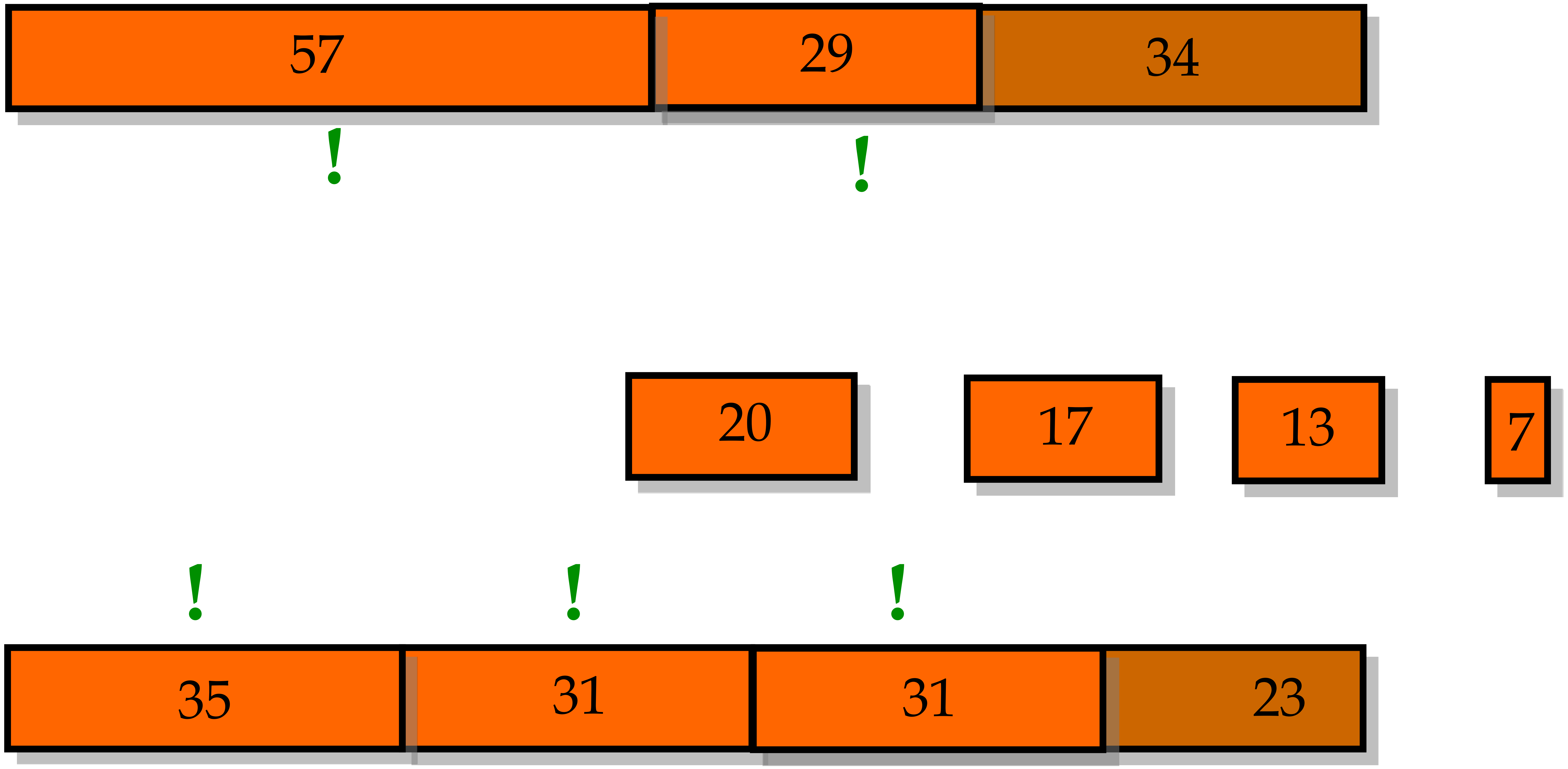
# Keine Lösung?!



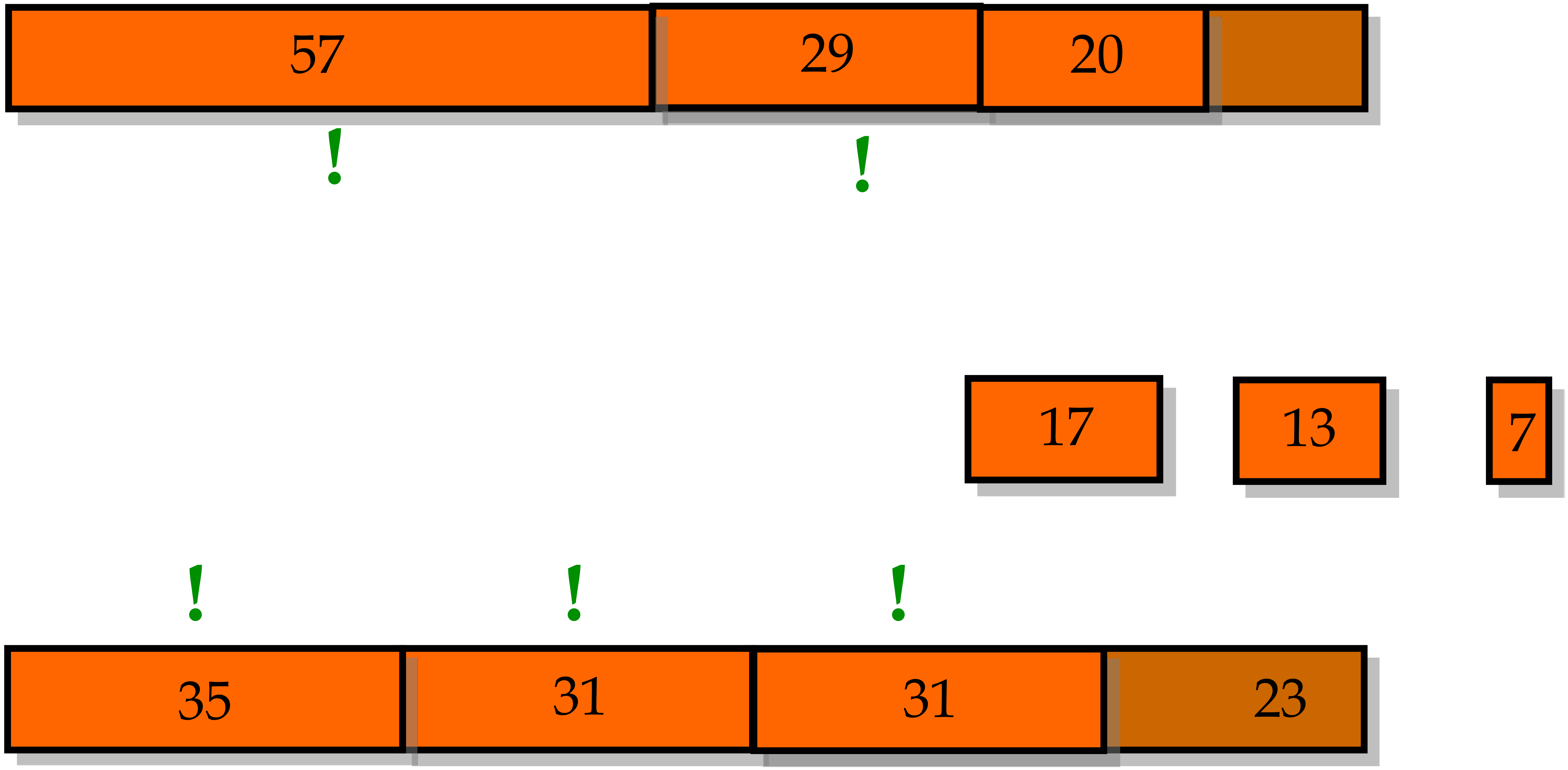
# Keine Lösung?!



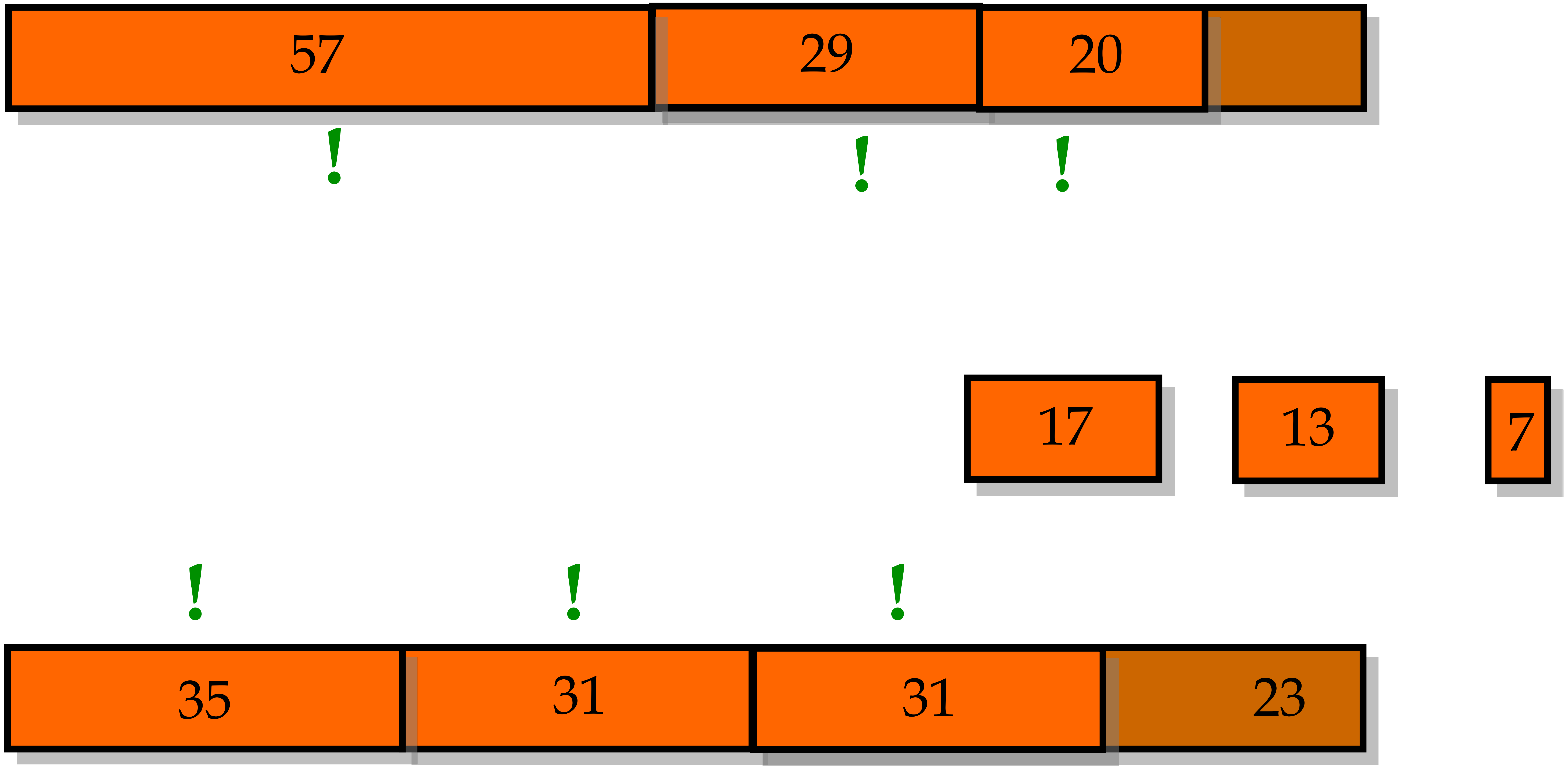
# Keine Lösung?!



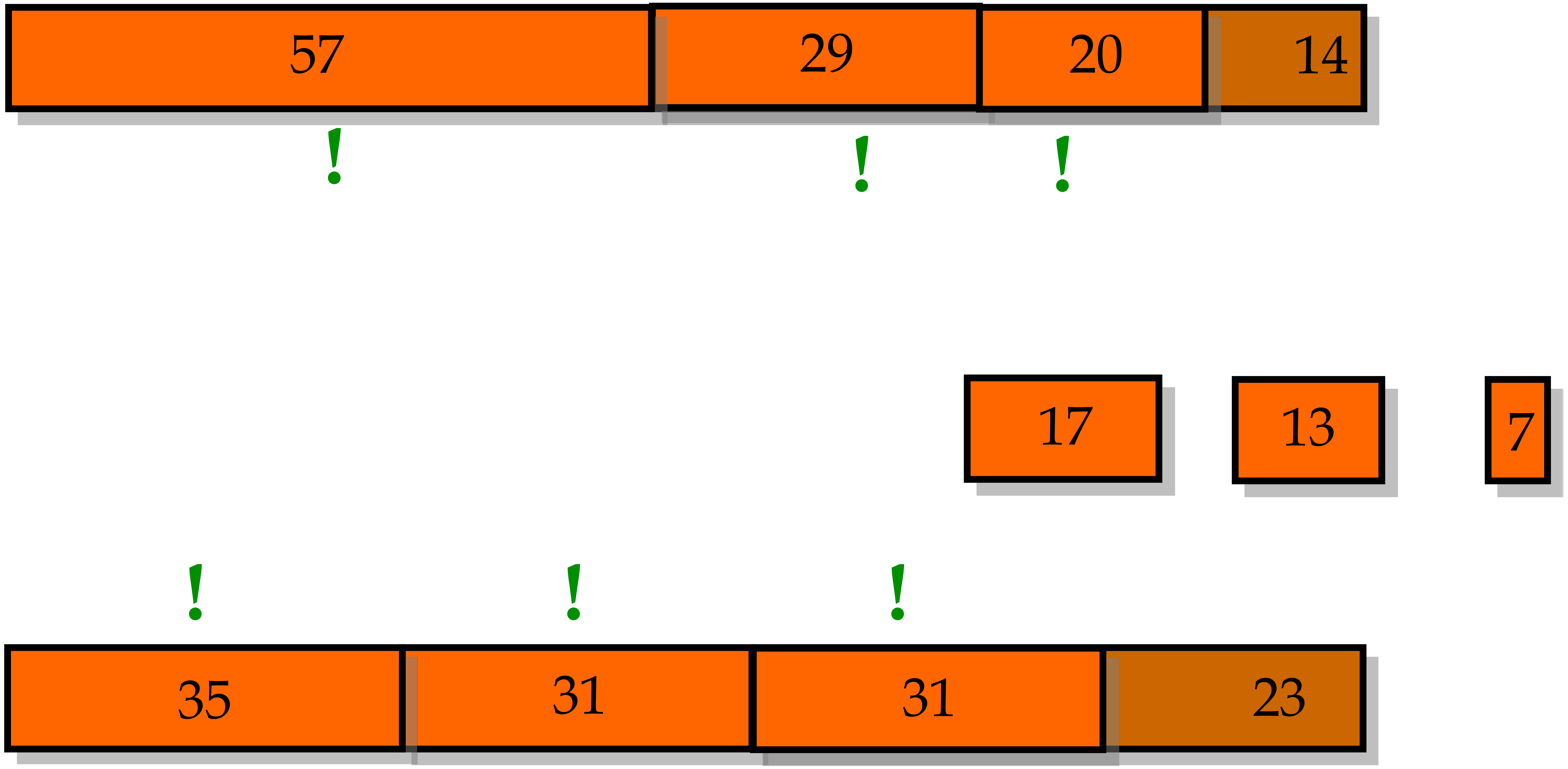
# Keine Lösung?!



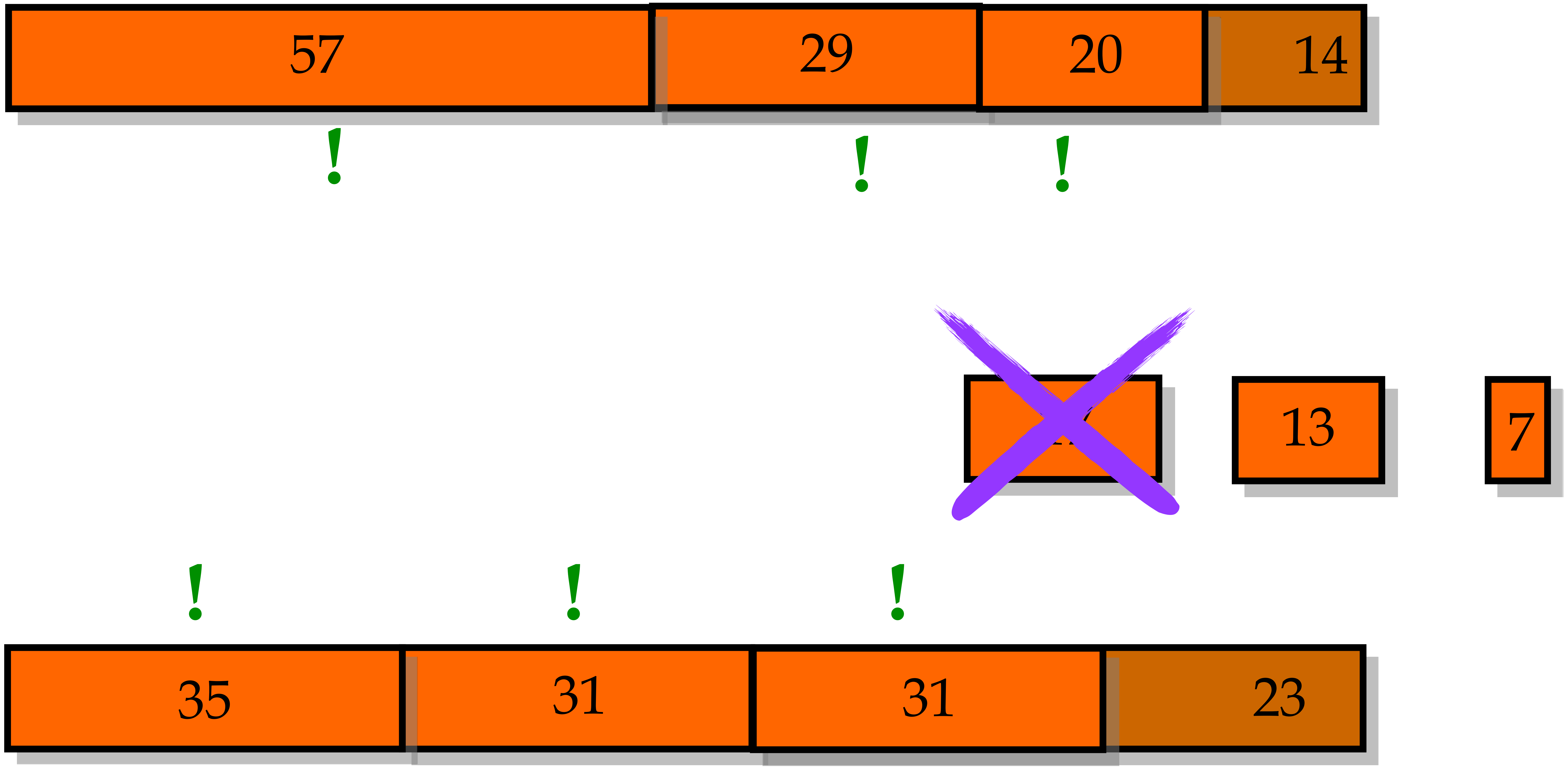
# Keine Lösung?!



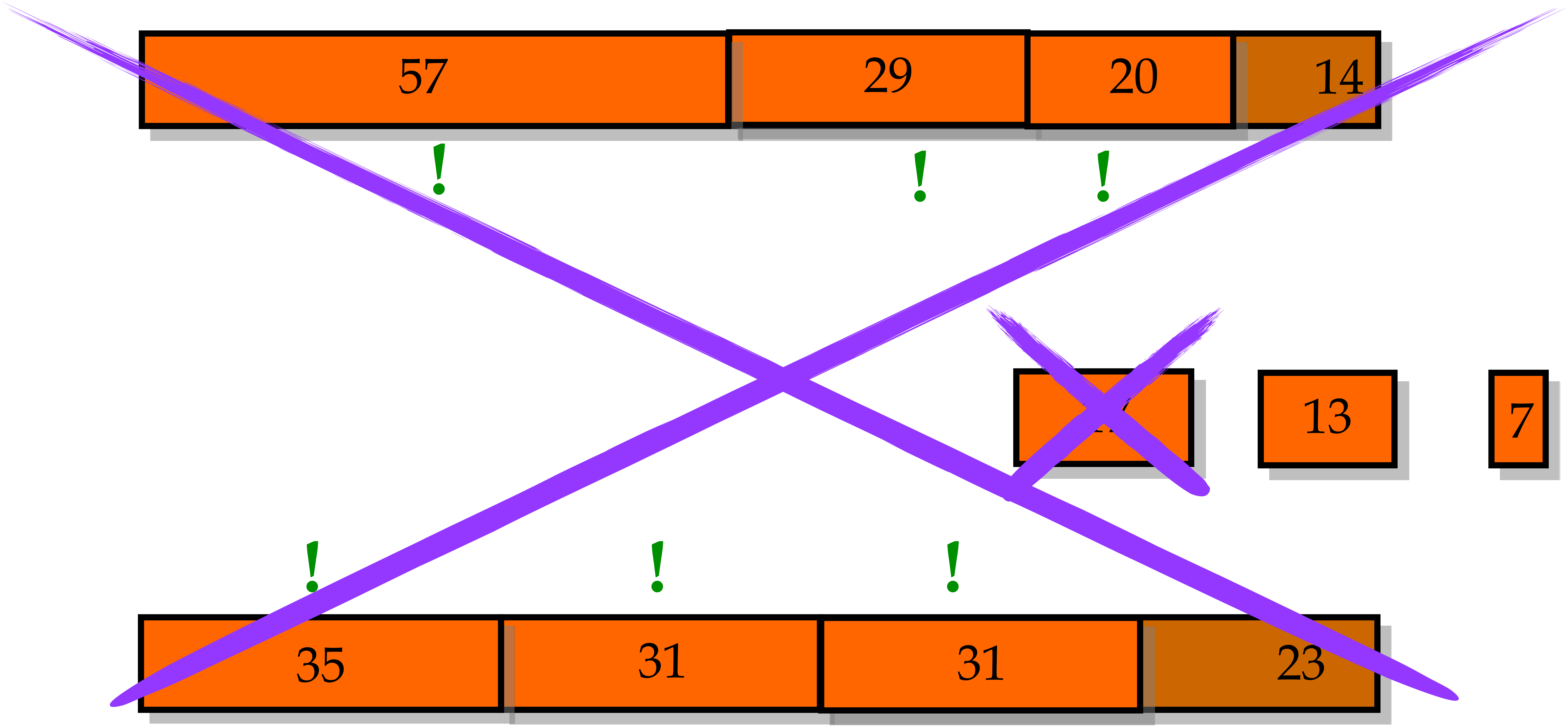
# Keine Lösung?!



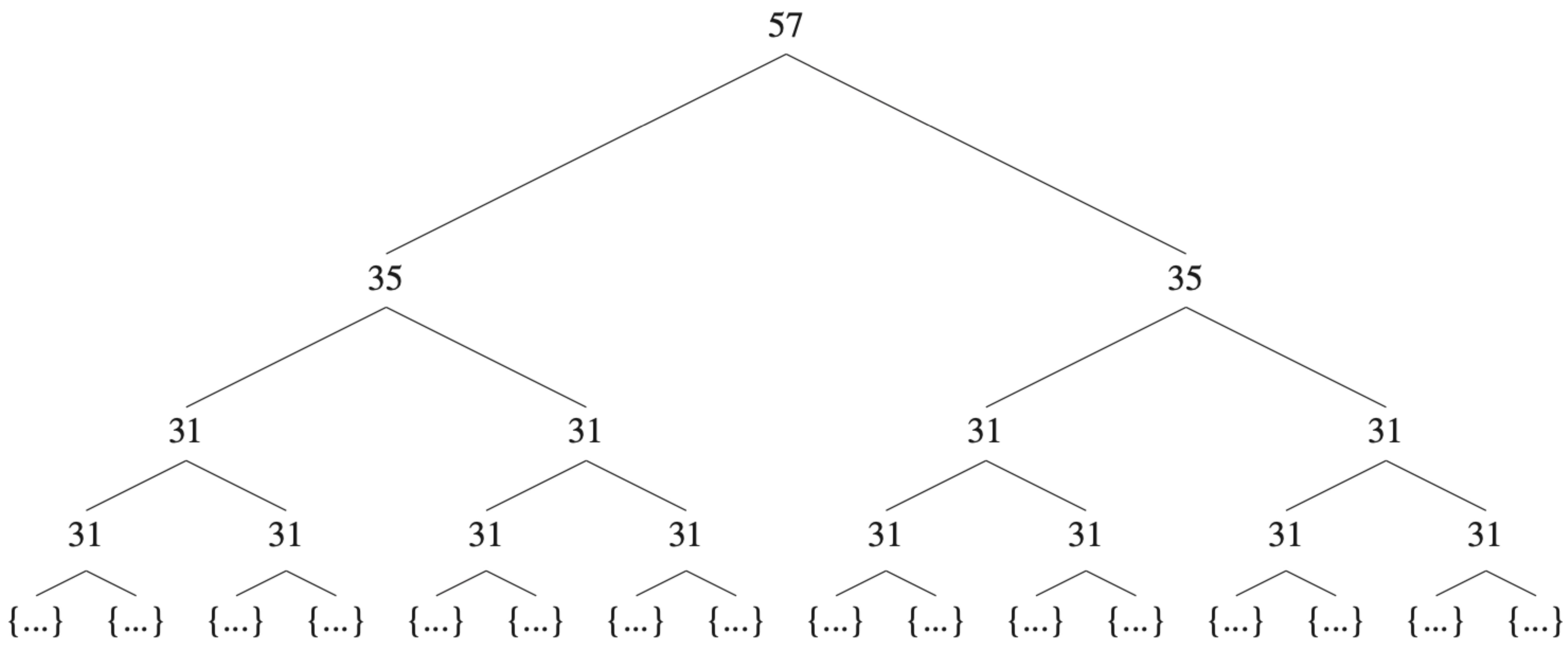
# Keine Lösung?!



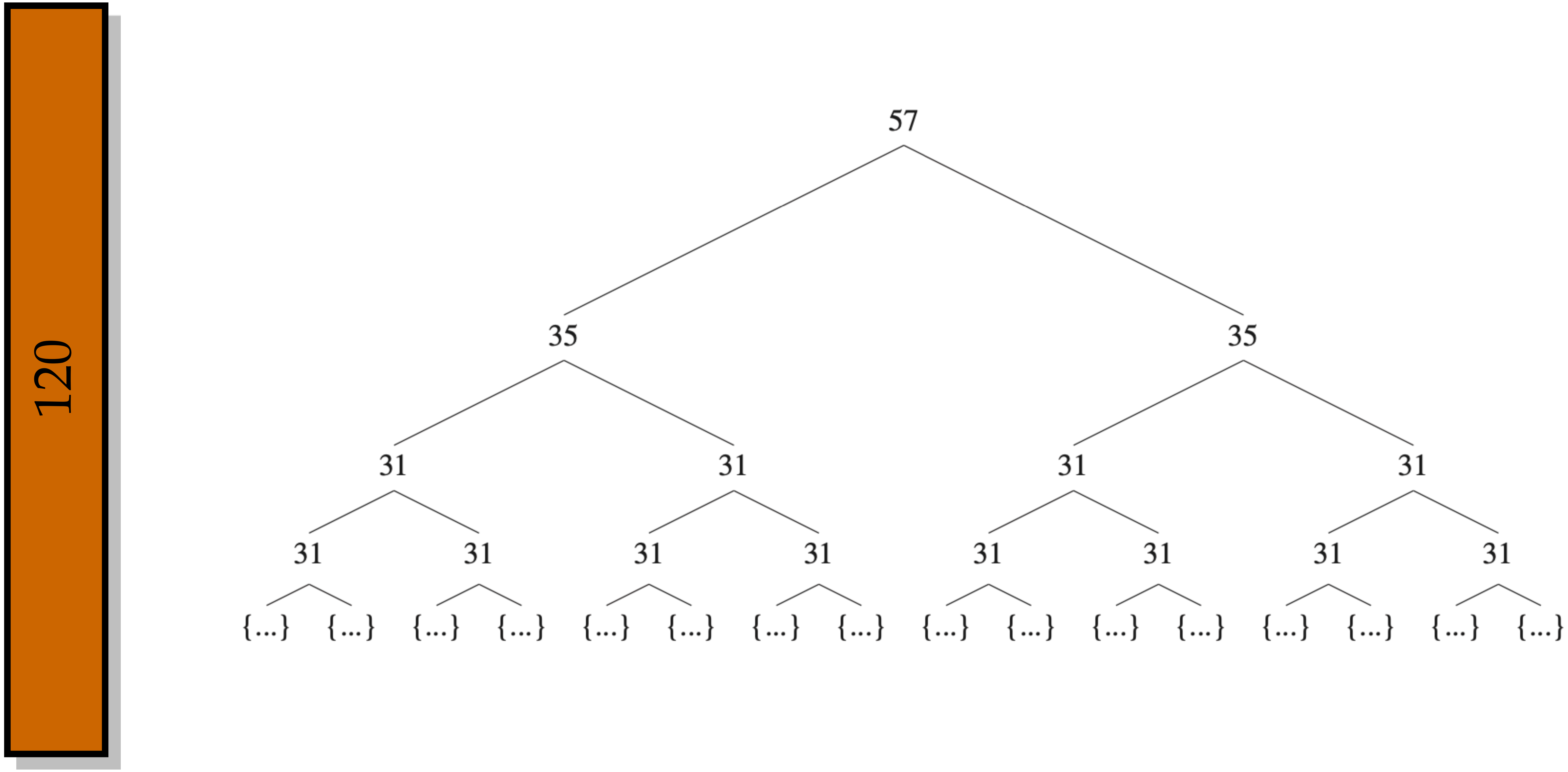
# Keine Lösung?!



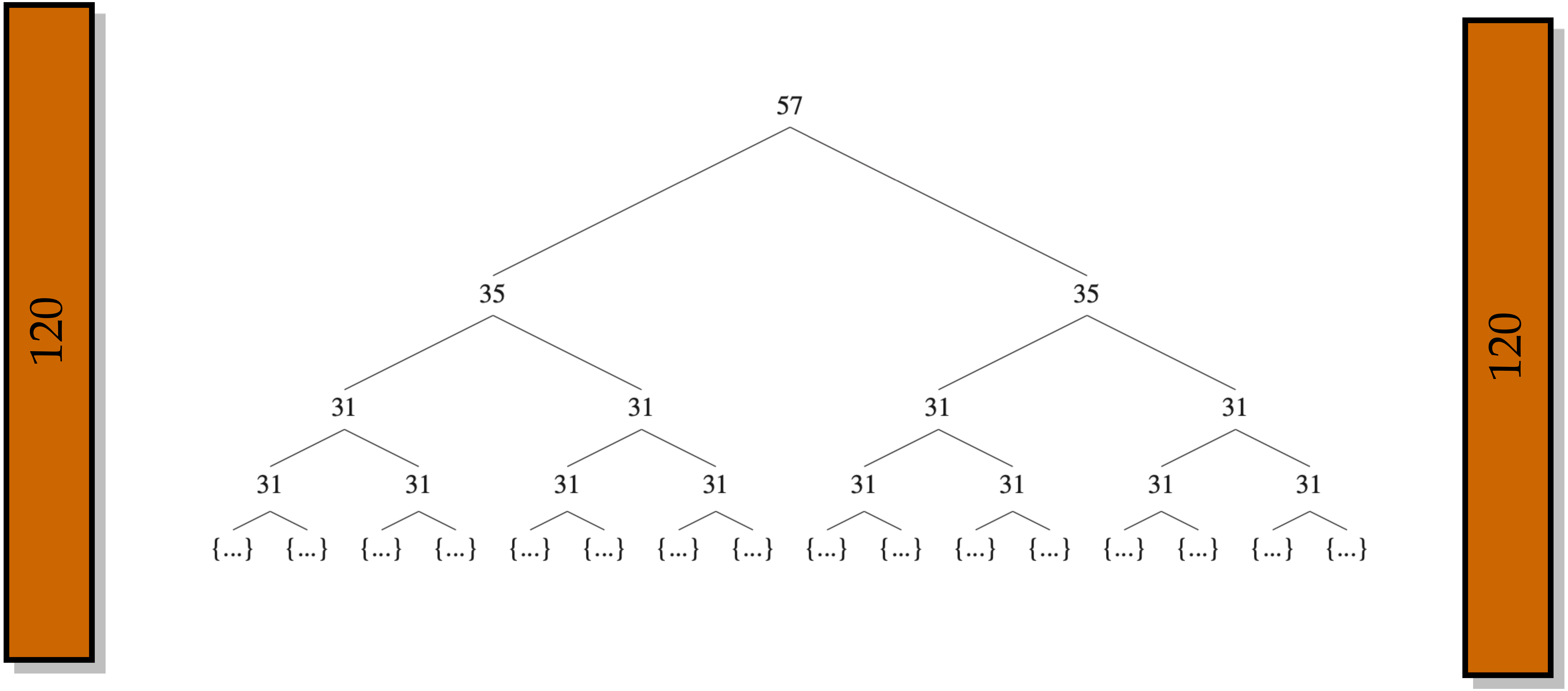
# Enumerationsprinzip



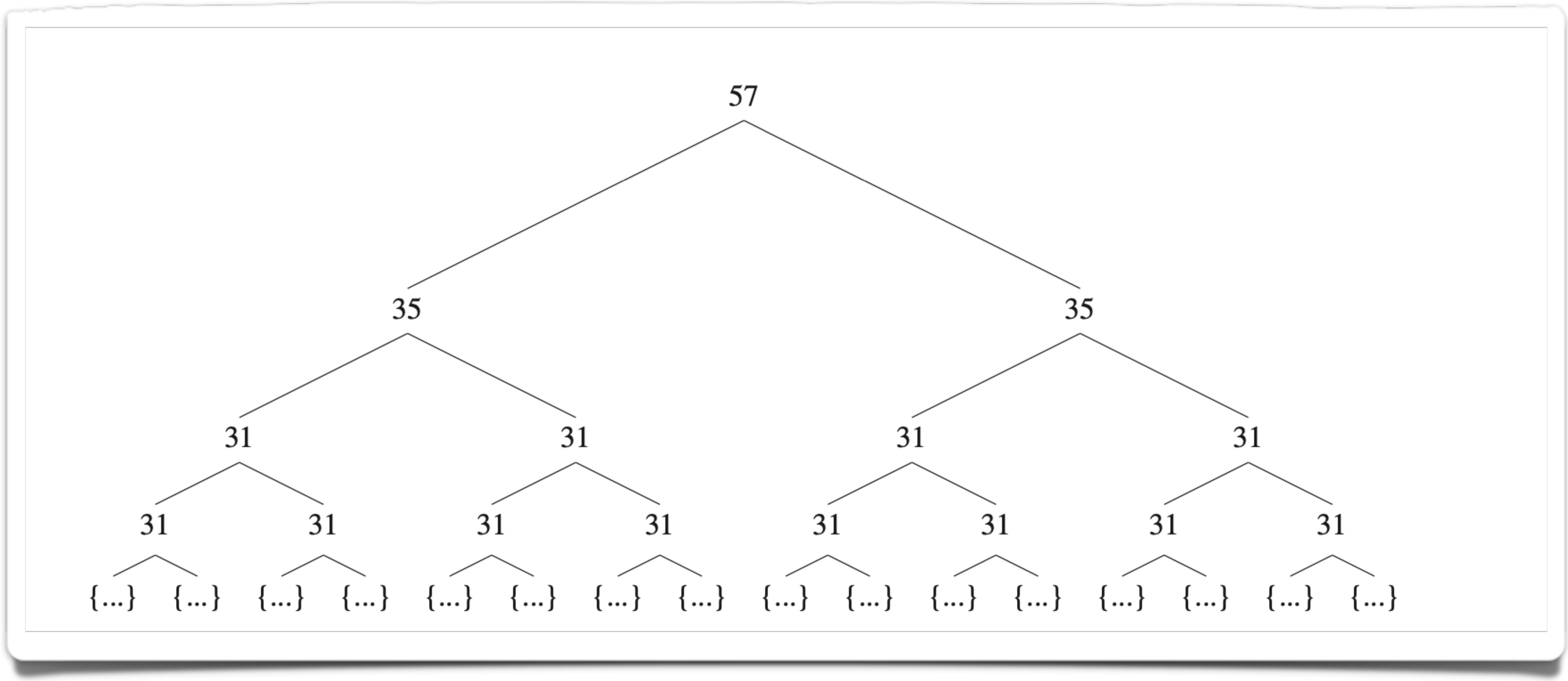
# Enumerationsprinzip



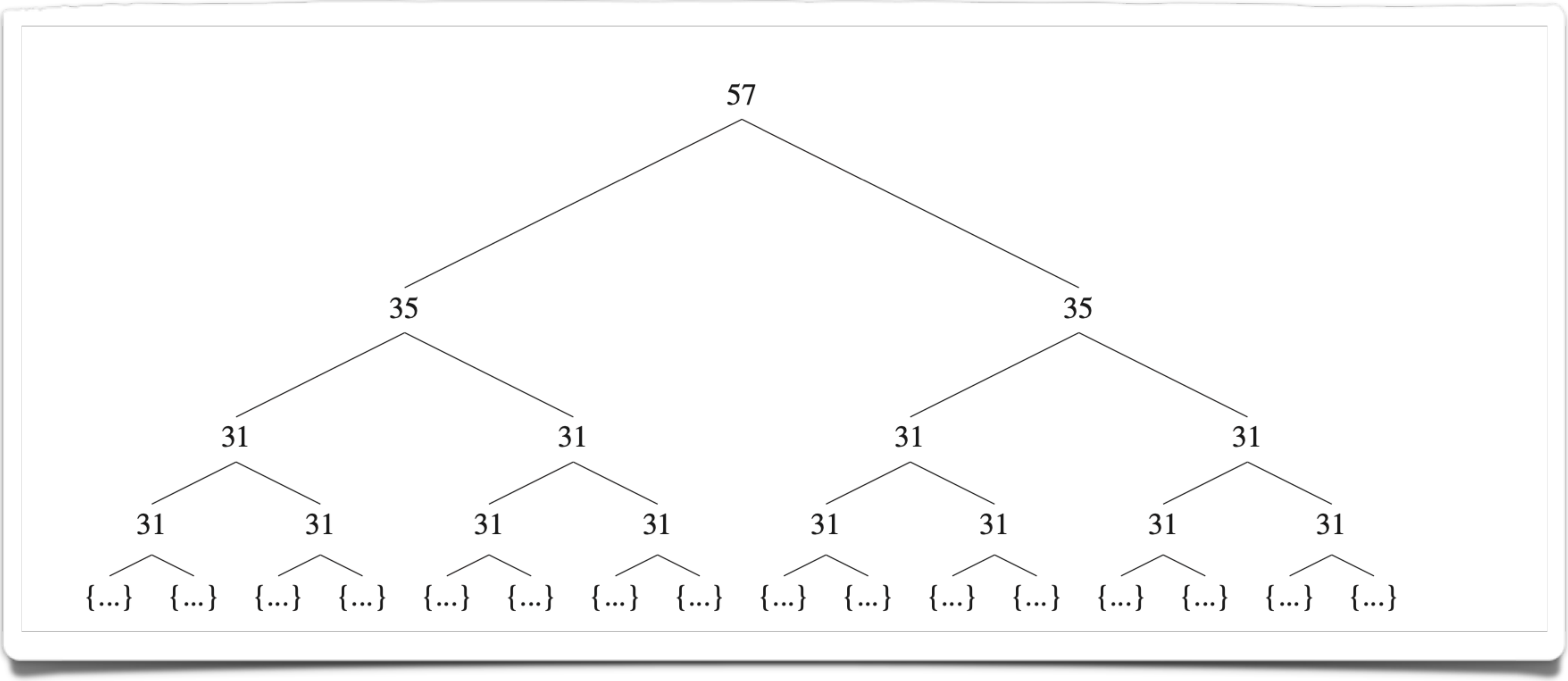
# Enumerationsprinzip



# Enumerationsprinzip

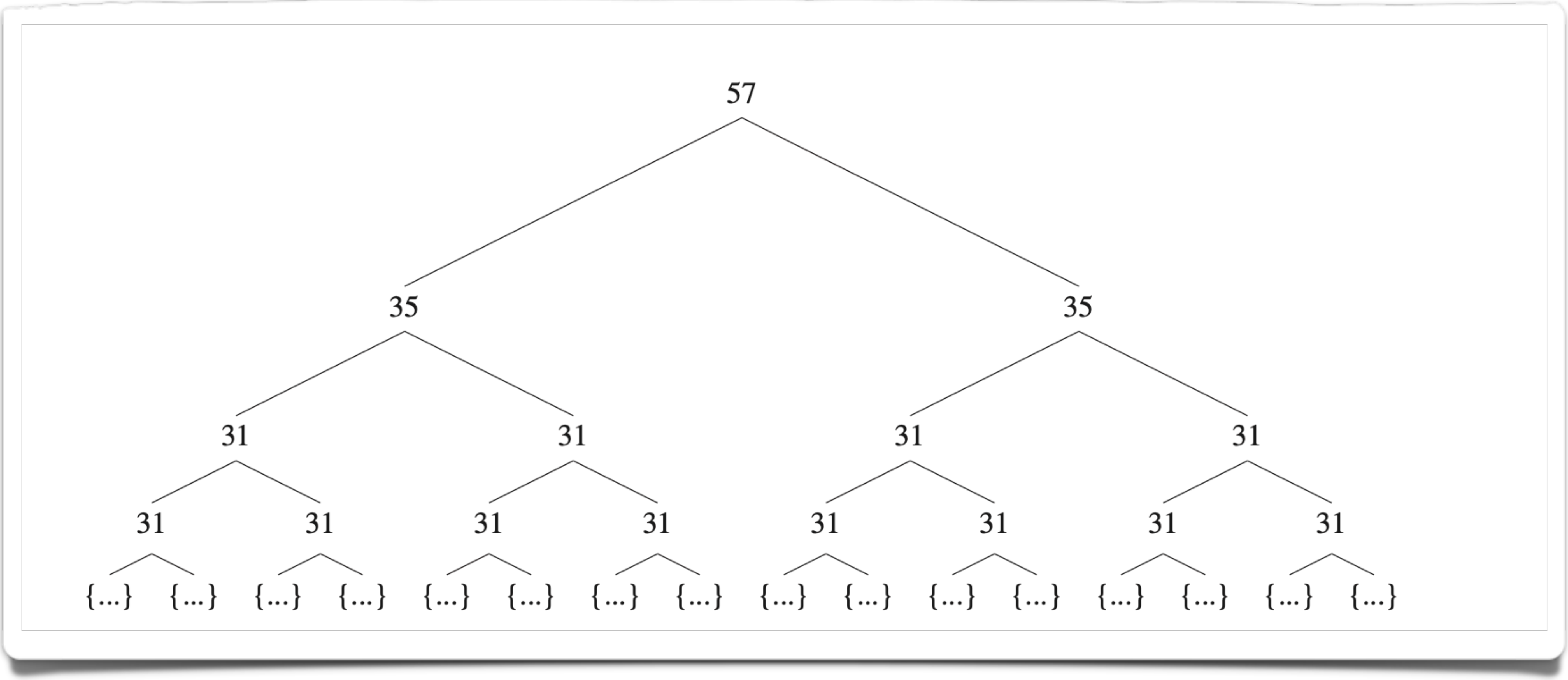


# Enumerationsprinzip



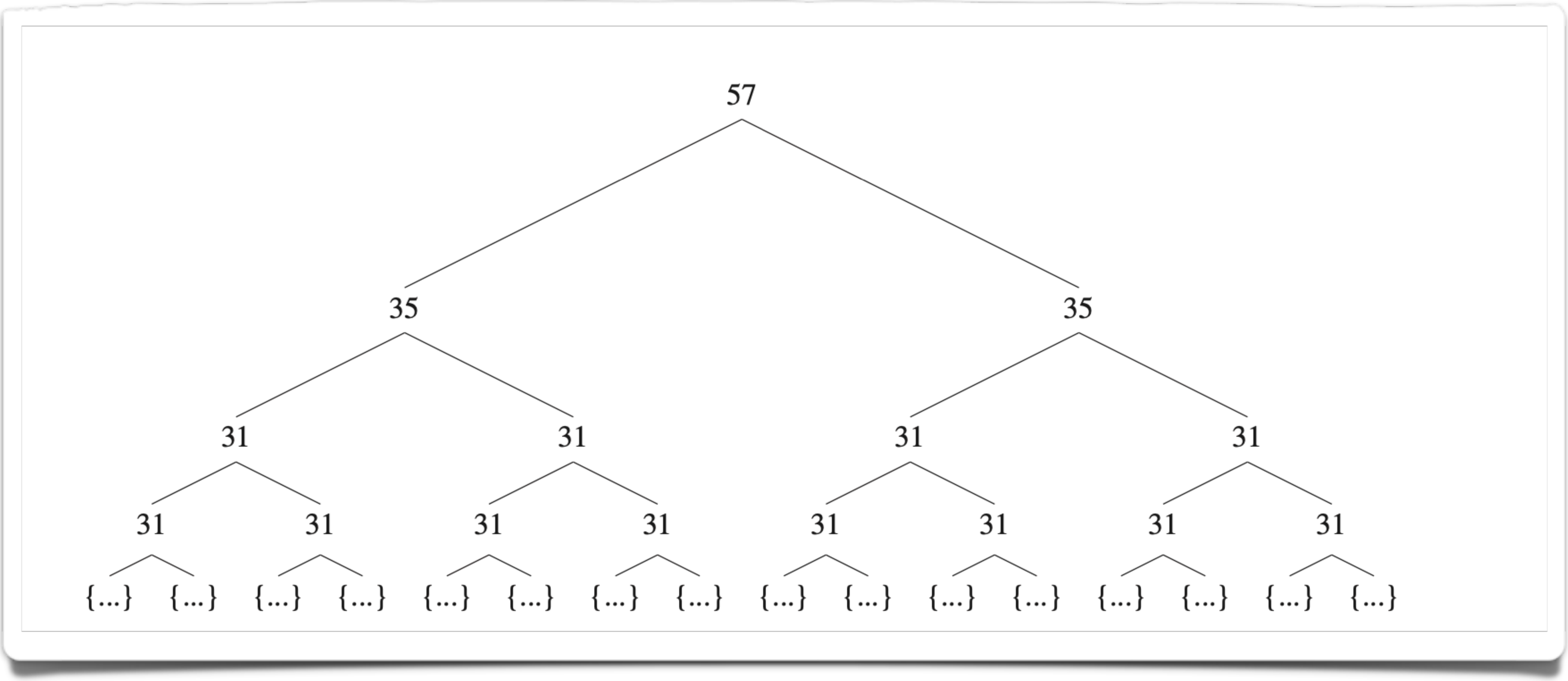

- Exponentiell viele Fälle!

# Enumerationsprinzip




- Exponentiell viele Fälle!
- Wie geht das systematisch?

# Enumerationsprinzip

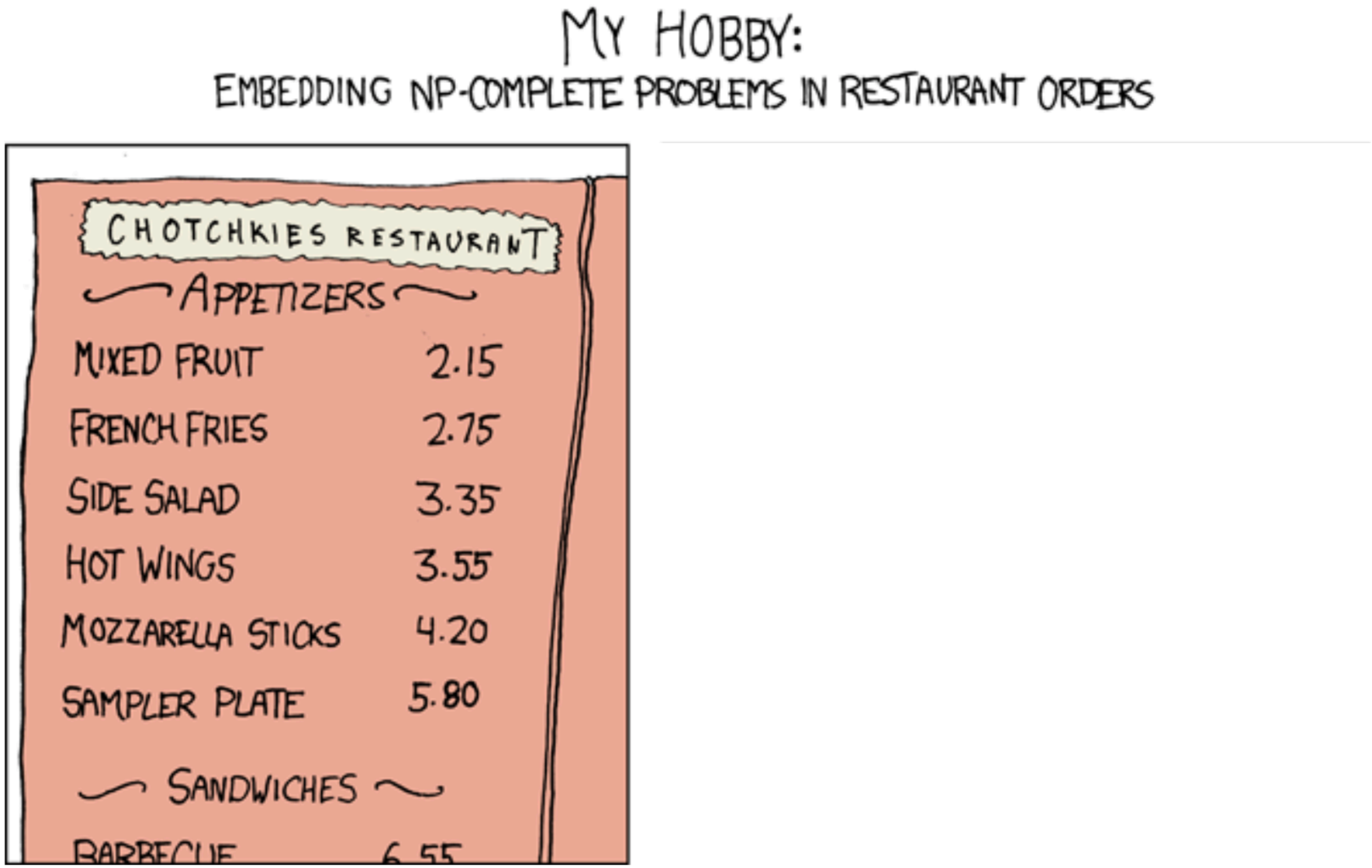



- Exponentiell viele Fälle!
- Wie geht das systematisch?
- Wo kann man Arbeit sparen?

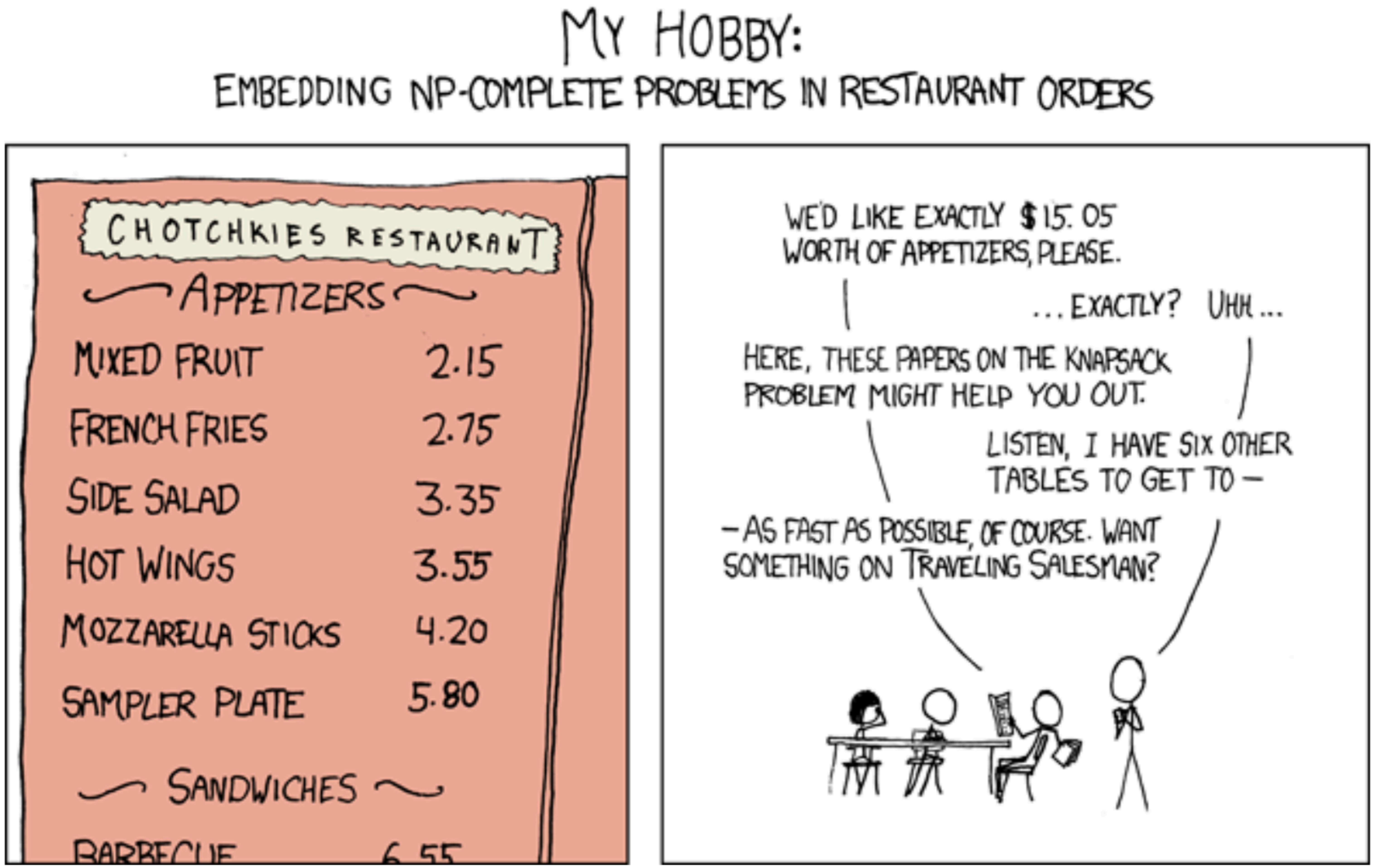
# Alltagsanwendung: xkcd #287

# Alltagsanwendung: xkcd #287

# Alltagsanwendung: xkcd #287



# Alltagsanwendung: xkcd #287



# *Vielen Dank!*

s.fekete@tu-bs.de