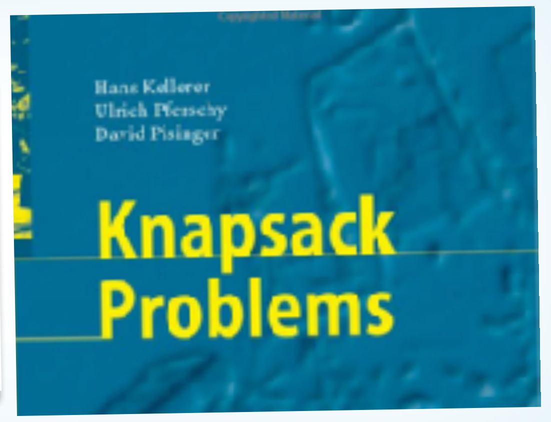
$$\text{maximize} \quad \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$
$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c,$$
$$x_j = 0 \text{ or } 1, \quad j = 1, \ldots, n,$$



1 Einführung: Knapsack-Probleme

Algorithmen und Datenstrukturen 2
Sommer 2021

Prof. Dr. Sándor Fekete

Teilaufgaben?!

Teilaufgaben?!

Problem 1.3 (FRACTIONAL KNAPSACK).

Gegeben:

- *n Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* $z_i > 0$ *Gewinn* $p_i > 0$
- *Größenschranke* Z

Gesucht:

Für jedes Objekt ein Wert

$$x_i \in [0, 1]$$

sodass

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

Teilaufgaben?!

Problem 1.3 (FRACTIONAL KNAPSACK).

Gegeben:

- *n Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* $z_i > 0$ *Gewinn* $p_i > 0$
- *Größenschranke* Z

Gesucht:

Für jedes Objekt ein Wert

$$\boxed{x_i \in [0, 1]}$$

sodass

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

Teilaufgaben?!

Teilaufgaben?!

$$\boxed{\text{nach Wert } \left(\frac{z_i}{p_i}\right) \text{ sortieren:}}$$

Teilaufgaben?!

$\boxed{\text{nach Wert } \left(\frac{z_i}{p_i}\right) \text{ sortieren:}}$

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

Teilaufgaben?!

$\boxed{\text{nach Wert } \left(\frac{z_i}{p_i}\right) \text{ sortieren:}}$

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 4$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 4$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 4$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 4$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 12$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 9$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 12$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 9$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 28$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 19$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 28$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 19$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 48$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 28$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 48$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 28$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 56$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 30$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 56$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 30$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

x_{15}

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

x_{15}

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

x_{15}

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

x_{15}

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

$x_{15} = 0{,}6$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 40$$

$x_{15} = 0{,}6$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$$

$x_{15} = 0{,}6$

Algorithmus

Algorithmus

Algorithmus 1.4. *(Greedy-Algorithmus)*

Algorithmus

Algorithmus 1.4. *(Greedy-Algorithmus)*

Eingabe: $z_i, \ldots, z_n, Z, p_i, \ldots, p_n$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. *(Greedy-Algorithmus)*

Eingabe: $z_i, \ldots, z_n, Z, p_i, \ldots, p_n$

Ausgabe: $x_i, \ldots, x_n \in [0, 1]$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. *(Greedy-Algorithmus)*

Eingabe: $z_i, \ldots, z_n, Z, p_i, \ldots, p_n$

Ausgabe: $x_i, \ldots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. *(Greedy-Algorithmus)*

Eingabe: $z_i, \ldots, z_n, Z, p_i, \ldots, p_n$

Ausgabe: $x_i, \ldots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. *(Greedy-Algorithmus)*

Eingabe: $z_i, \ldots, z_n, Z, p_i, \ldots, p_n$

Ausgabe: $x_i, \ldots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

1: *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*

Algorithmus

Algorithmus 1.4. *(Greedy-Algorithmus)*

Eingabe: $z_i, \ldots, z_n, Z, p_i, \ldots, p_n$

Ausgabe: $x_i, \ldots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

1: *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*
Dies ergibt die Permutation $\pi(1), \ldots, \pi(n)$.

Algorithmus

Algorithmus 1.4. *(Greedy-Algorithmus)*

Eingabe: $z_i, ..., z_n, Z, p_i, ..., p_n$

Ausgabe: $x_i, ..., x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

1: *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*
Dies ergibt die Permutation $\pi(1), ..., \pi(n)$.
Setze $j = 1$.

Algorithmus

Algorithmus 1.4. *(Greedy-Algorithmus)*

Eingabe: $z_i, ..., z_n, Z, p_i, ..., p_n$

Ausgabe: $x_i, ..., x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

1: *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*
Dies ergibt die Permutation $\pi(1), ..., \pi(n)$.
Setze $j = 1$.

2: ***while*** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ ***do***

Algorithmus

Algorithmus 1.4. *(Greedy-Algorithmus)*

Eingabe: $z_i, \ldots, z_n, Z, p_i, \ldots, p_n$

Ausgabe: $x_i, \ldots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

1: *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*
Dies ergibt die Permutation $\pi(1), \ldots, \pi(n)$.
Setze $j = 1$.

2: ***while*** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ ***do***

3: $\quad x_{\pi(j)} := 1$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. *(Greedy-Algorithmus)*

Eingabe: $z_i, ..., z_n, Z, p_i, ..., p_n$

Ausgabe: $x_i, ..., x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

1: *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*
Dies ergibt die Permutation $\pi(1), ..., \pi(n)$.
Setze $j = 1$.
2: ***while*** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ ***do***
3: $\quad x_{\pi(j)} := 1$
4: $\quad j := j + 1$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. *(Greedy-Algorithmus)*

Eingabe: $z_i, \ldots, z_n, Z, p_i, \ldots, p_n$

Ausgabe: $x_i, \ldots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

1: *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*
Dies ergibt die Permutation $\pi(1), \ldots, \pi(n)$.
Setze $j = 1$.

2: **while** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**

3: $\quad x_{\pi(j)} := 1$

4: $\quad j := j + 1$

5: *Setze* $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. *(Greedy-Algorithmus)*

Eingabe: $z_i, \ldots, z_n, Z, p_i, \ldots, p_n$

Ausgabe: $x_i, \ldots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

1: *Sortiere {1,...,n} nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*
Dies ergibt die Permutation $\pi(1), \ldots, \pi(n)$.
Setze $j = 1$.
2: ***while*** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ ***do***
3: $\quad x_{\pi(j)} := 1$
4: $\quad j := j + 1$
5: *Setze* $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
6: ***return***

Das klappt immer!

Das klappt immer!

Satz 1.5. *Algorithmus* $\boxed{1.4}$ *liefert eine optimale Lösung für Problem* $\boxed{1.3}$.

Das klappt immer!

Satz 1.5. *Algorithmus $\boxed{1.4}$ liefert eine optimale Lösung für Problem $\boxed{1.3}$.*

Beweis:

Das klappt immer!

Satz 1.5. *Algorithmus 1.4 liefert eine optimale Lösung für Problem 1.3.*

Beweis:

O.B.d.A. sei $\sum_{i=1}^{n} z_{\pi(i)} > Z$ - sonst nimmt man einfach alles.

Das klappt immer!

Satz 1.5. *Algorithmus 1.4 liefert eine optimale Lösung für Problem 1.3.*

Beweis:
O.B.d.A. sei $\sum_{i=1}^{n} z_{\pi(i)} > Z$ - sonst nimmt man einfach alles.

(1) Wir bekommen eine zulässige Lösung.

Das klappt immer!

Satz 1.5. *Algorithmus 1.4 liefert eine optimale Lösung für Problem 1.3.*

Beweis:

O.B.d.A. sei $\sum_{i=1}^{n} z_{\pi(i)} > Z$ - sonst nimmt man einfach alles.

(1) Wir bekommen eine zulässige Lösung.

(2) Wir bekommen eine optimale Lösung.

(1) Zulässigkeit

(1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.

2: ***while*** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ ***do***

3: $\quad x_{\pi(j)} := 1$

4: $\quad j := j + 1$

5: Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

6: ***return***

(1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.

2: **while** $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**

3: $\quad x_{\pi(j)} := 1$

4: $\quad j := j + 1$

5: Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

6: **return**

(1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
while $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
    $x_{\pi(j)} := 1$
    $j := j + 1$
Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
return

Sei j^* der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

(1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.

while $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**

  $x_{\pi(j)} := 1$

  $j := j + 1$

Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

return

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei j^* der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

(1) Zulässigkeit

Setze $j = 1.$
while $\left(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z\right)$ **do**
  $x_{\pi(j)} := 1$
  $j := j + 1$
Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
return

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei j^* der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist

(1) Zulässigkeit

$$
\begin{array}{l}
\textit{Setze } j = 1. \\
\textbf{while } \left(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z\right) \textbf{ do} \\
\quad x_{\pi(j)} := 1 \\
\quad j := j+1 \\
\textit{Setze } x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}} \\
\textbf{return}
\end{array}
$$

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei j^* der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $$\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$$

(1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
while $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
  $x_{\pi(j)} := 1$
  $j := j + 1$
Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
return

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	**24**	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	**6**	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei j^* der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und

(1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
while $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
  $x_{\pi(j)} := 1$
  $j := j + 1$
Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
return

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei j^* der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und $\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

(1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
while $\left(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z\right)$ **do**
  $x_{\pi(j)} := 1$
  $j := j + 1$
Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
return

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei j^* der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und $\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

Also ist

(1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
while $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
  $x_{\pi(j)} := 1$
  $j := j + 1$
Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
return

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei j^* der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und $\displaystyle\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

Also ist $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(j^*-1)} = 1$

(1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
while $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
  $x_{\pi(j)} := 1$
  $j := j + 1$
Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
return

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei j^* der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und $\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

Also ist $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(j^*-1)} = 1$ und

(1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.

while $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**

$\quad x_{\pi(j)} := 1$

$\quad j := j + 1$

Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

return

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei j^* der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und $\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

Also ist $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(j^*-1)} = 1$ und $x_{\pi(j^*)} \in [0, 1[$

(1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.

while $(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**

$\quad x_{\pi(j)} := 1$

$\quad j := j + 1$

Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

return

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei j^* der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\displaystyle\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und $\displaystyle\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

Also ist $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(j^*-1)} = 1$ und $x_{\pi(j^*)} \in [0, 1[$ und

(1) Zulässigkeit

Setze $j = 1$.
while $\left(\sum_{i=1}^{j} z_{\pi(i)} \leq Z\right)$ **do**
    $x_{\pi(j)} := 1$
    $j := j + 1$
Setze $x_{\pi(j)} := \dfrac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$
return

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i = 120$

$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 46$

$x_{15} = 0{,}6$

Sei j^* der letzte Index, für den die **while**-Bedingung getestet wird.

Dann ist $\sum_{i=1}^{j^*-1} z_{\pi(i)} \leq Z$ und $\sum_{i=1}^{j^*} z_{\pi(i)} > Z$

Also ist $x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(j^*-1)} = 1$ und $x_{\pi(j^*)} \in [0, 1[$ und $\sum_{i=1}^{j^*} x_{\pi(i)} z_{\pi(i)} = Z$

(2) Optimalität

(2) Optimalität

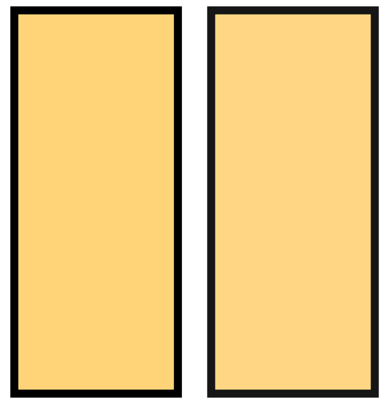
$$\frac{p_i}{z_i}$$

(2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$

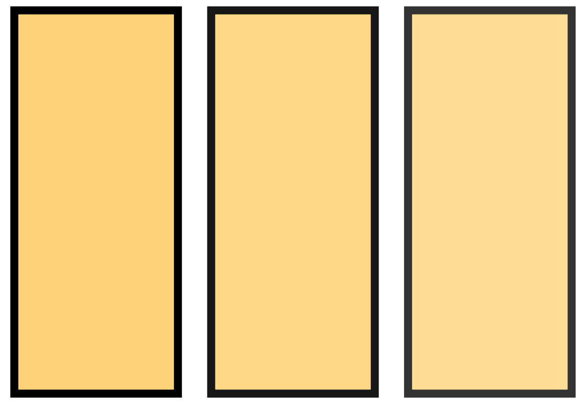
(2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



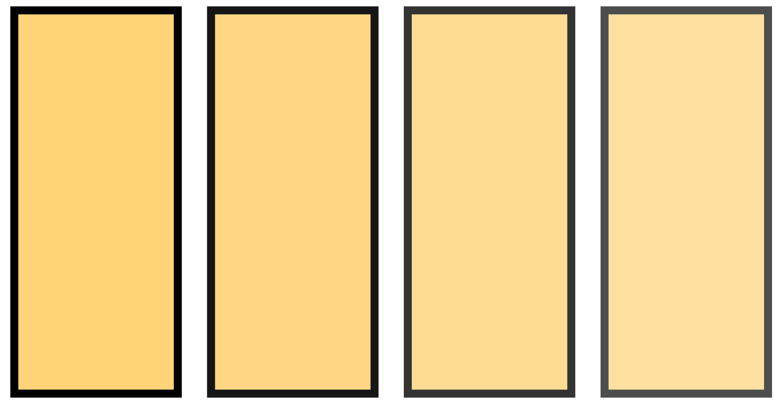
(2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



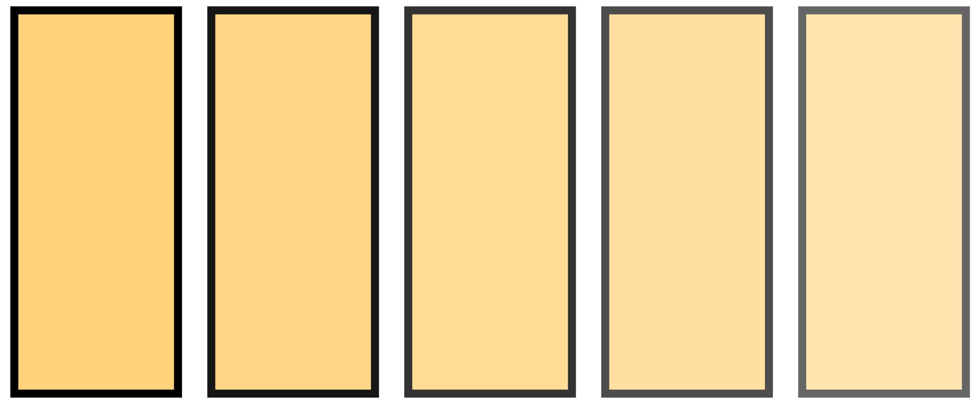
(2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



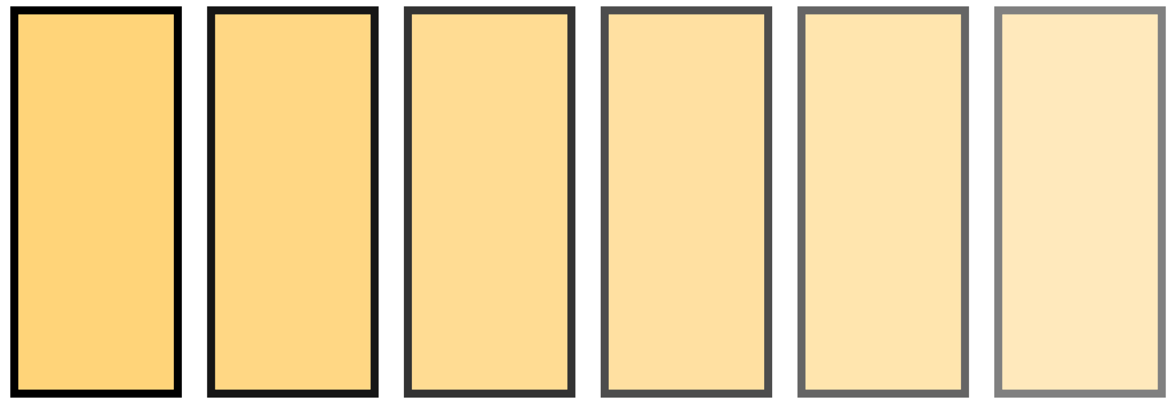
(2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



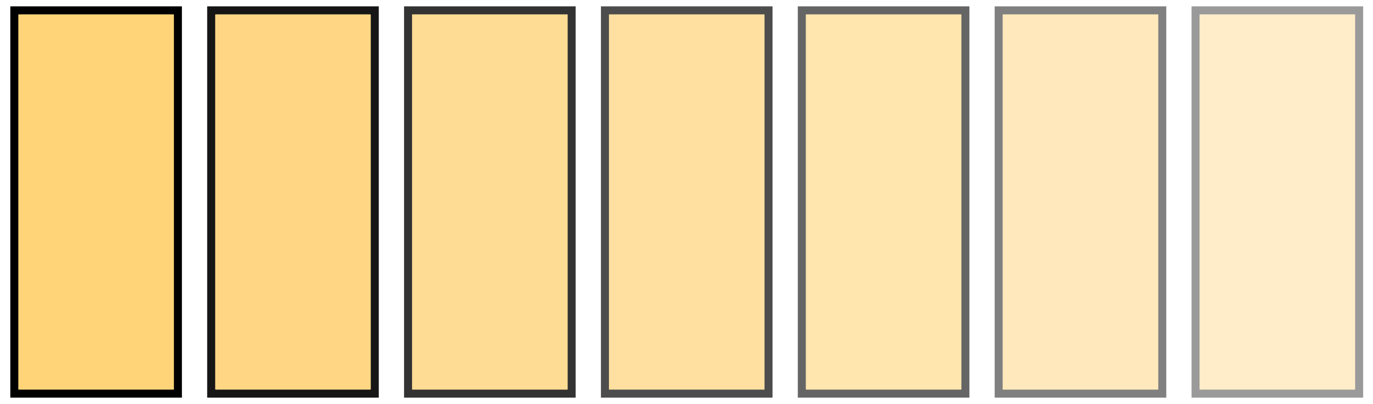
(2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



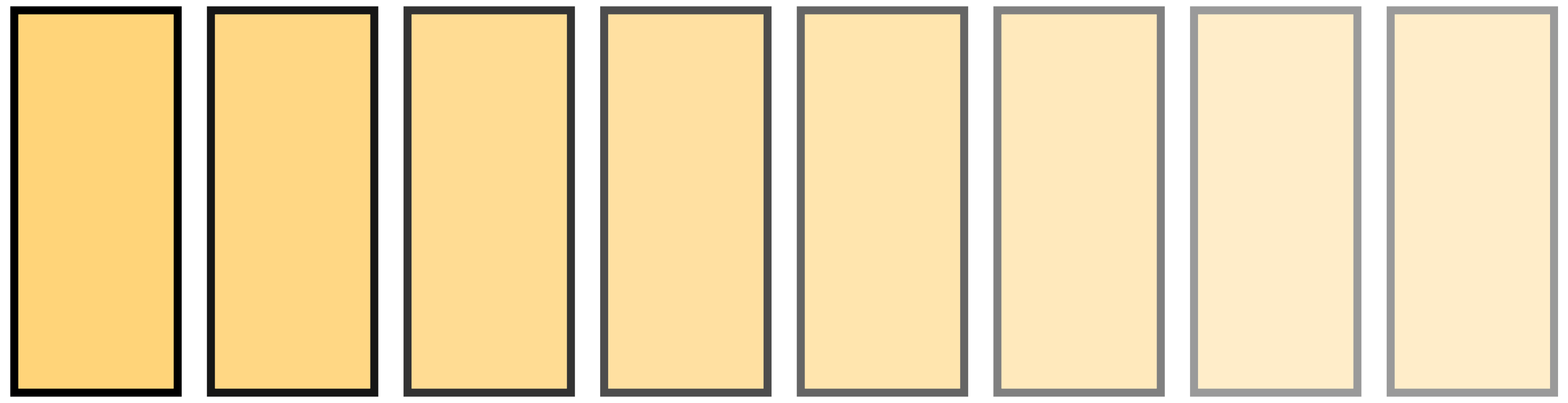
(2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



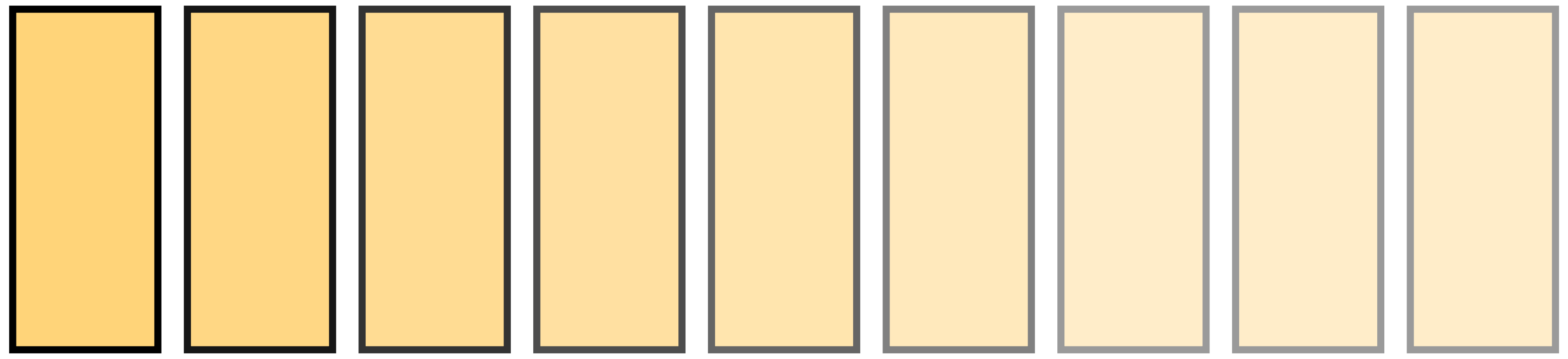
(2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



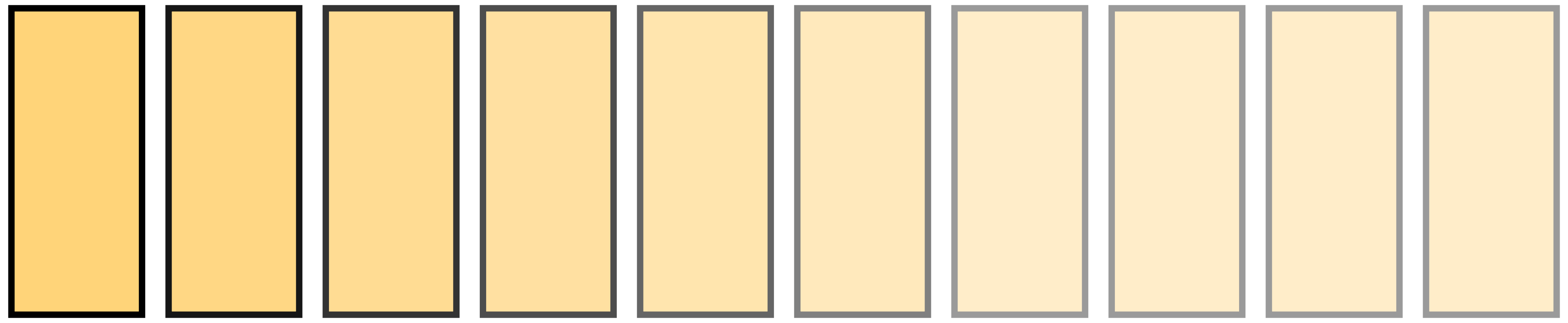
(2) Optimalität

$$\frac{p_i}{z_i}$$



(2) Optimalität

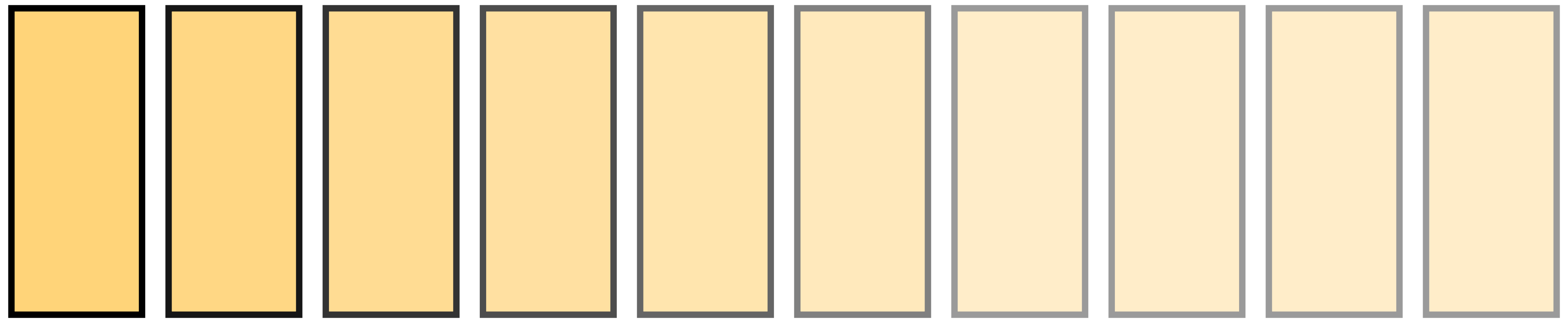
$$\frac{p_i}{z_i}$$



(2) Optimalität

x

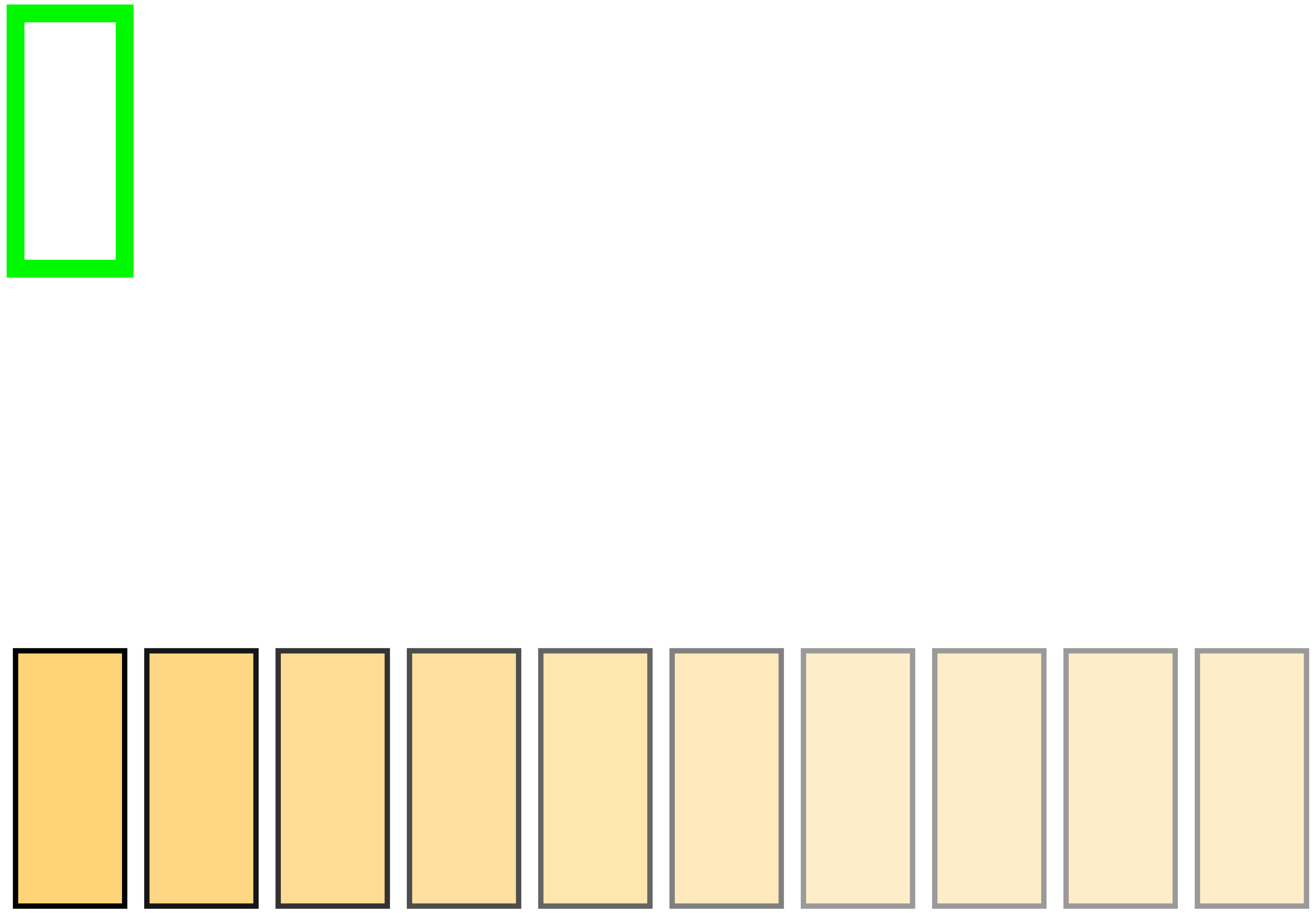
$\frac{p_i}{z_i}$



(2) Optimalität

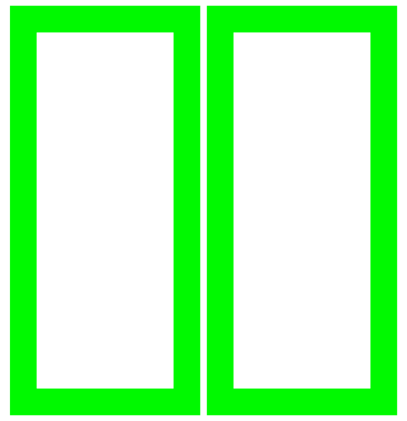
x

$\frac{p_i}{z_i}$

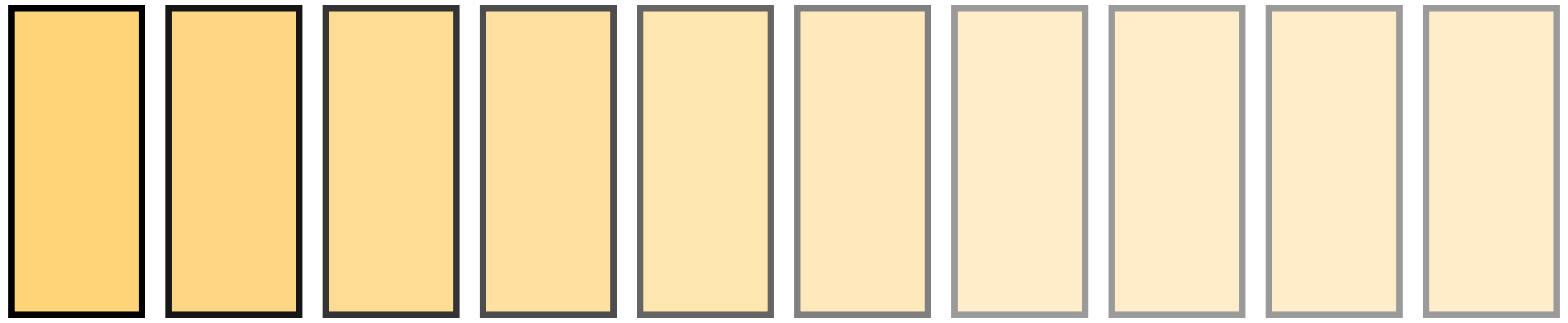


(2) Optimalität

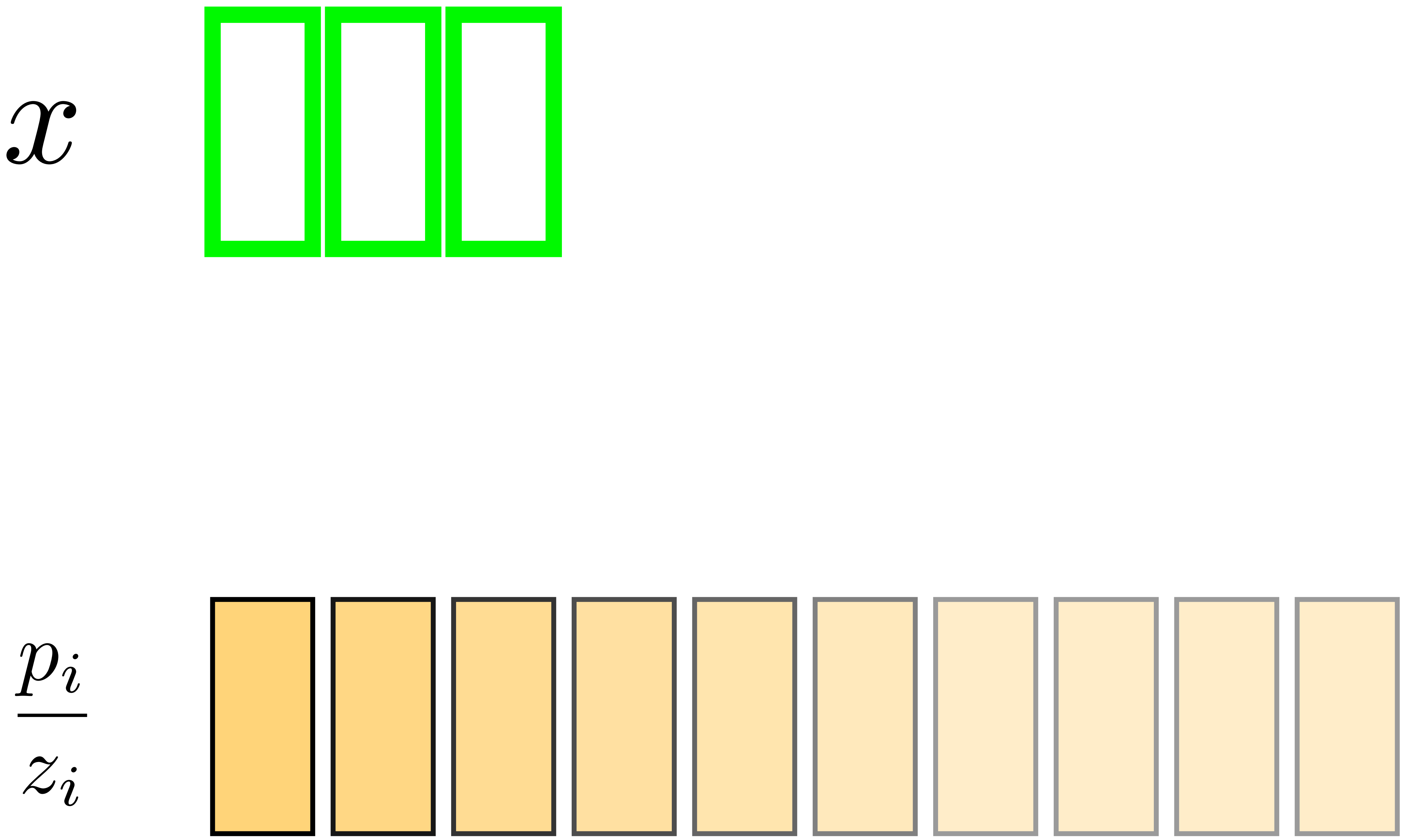
x



$\frac{p_i}{z_i}$



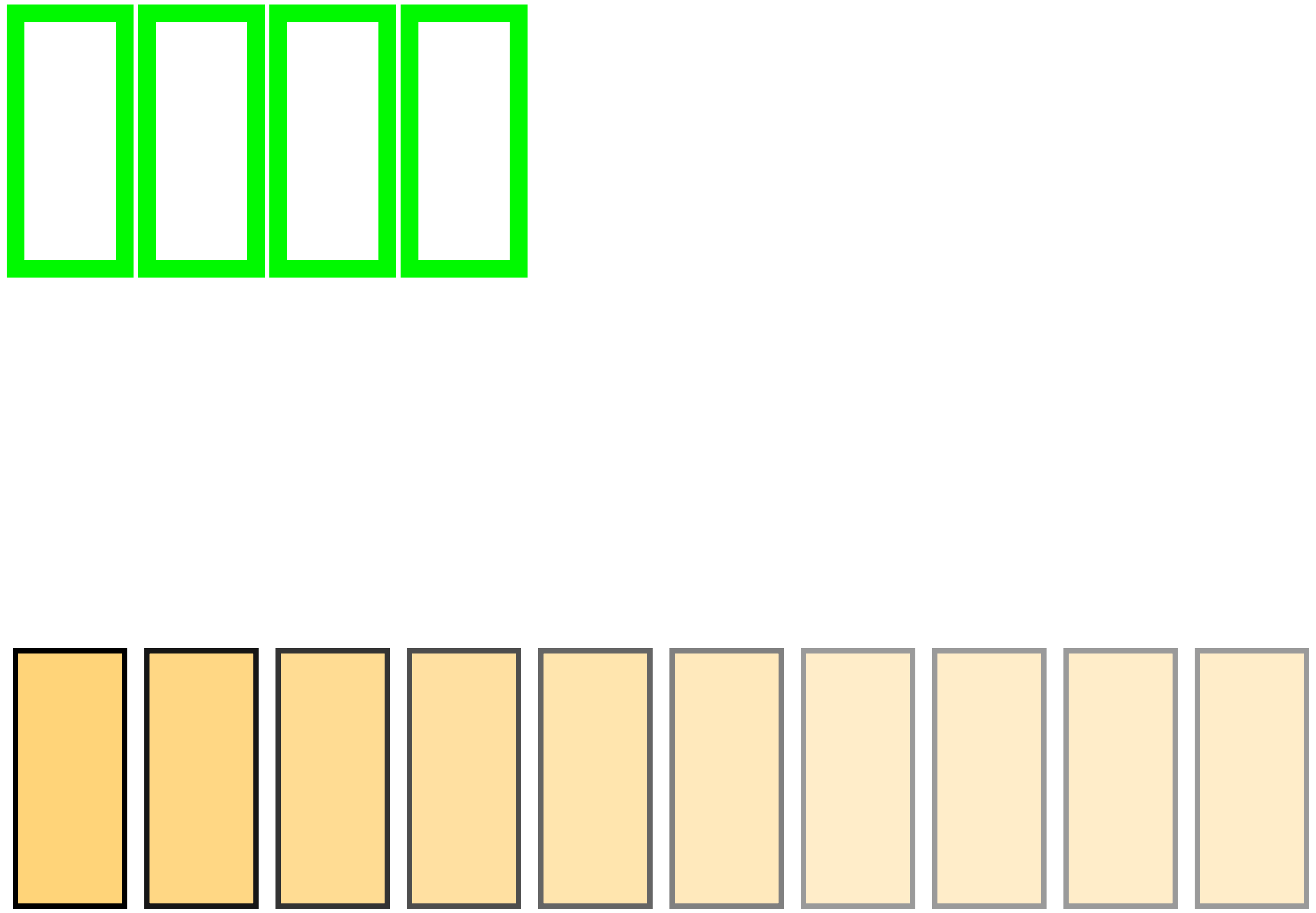
(2) Optimalität



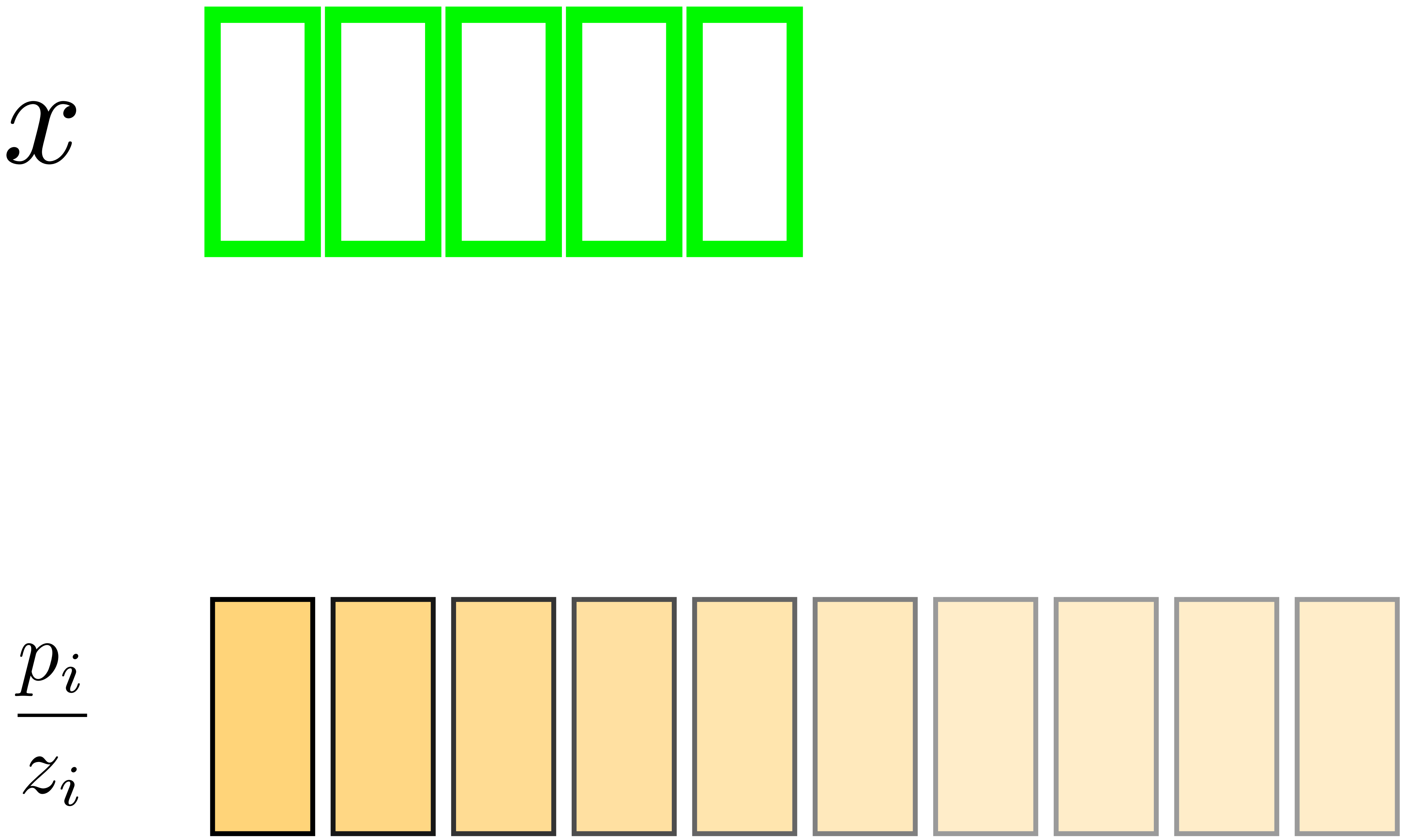
(2) Optimalität

x

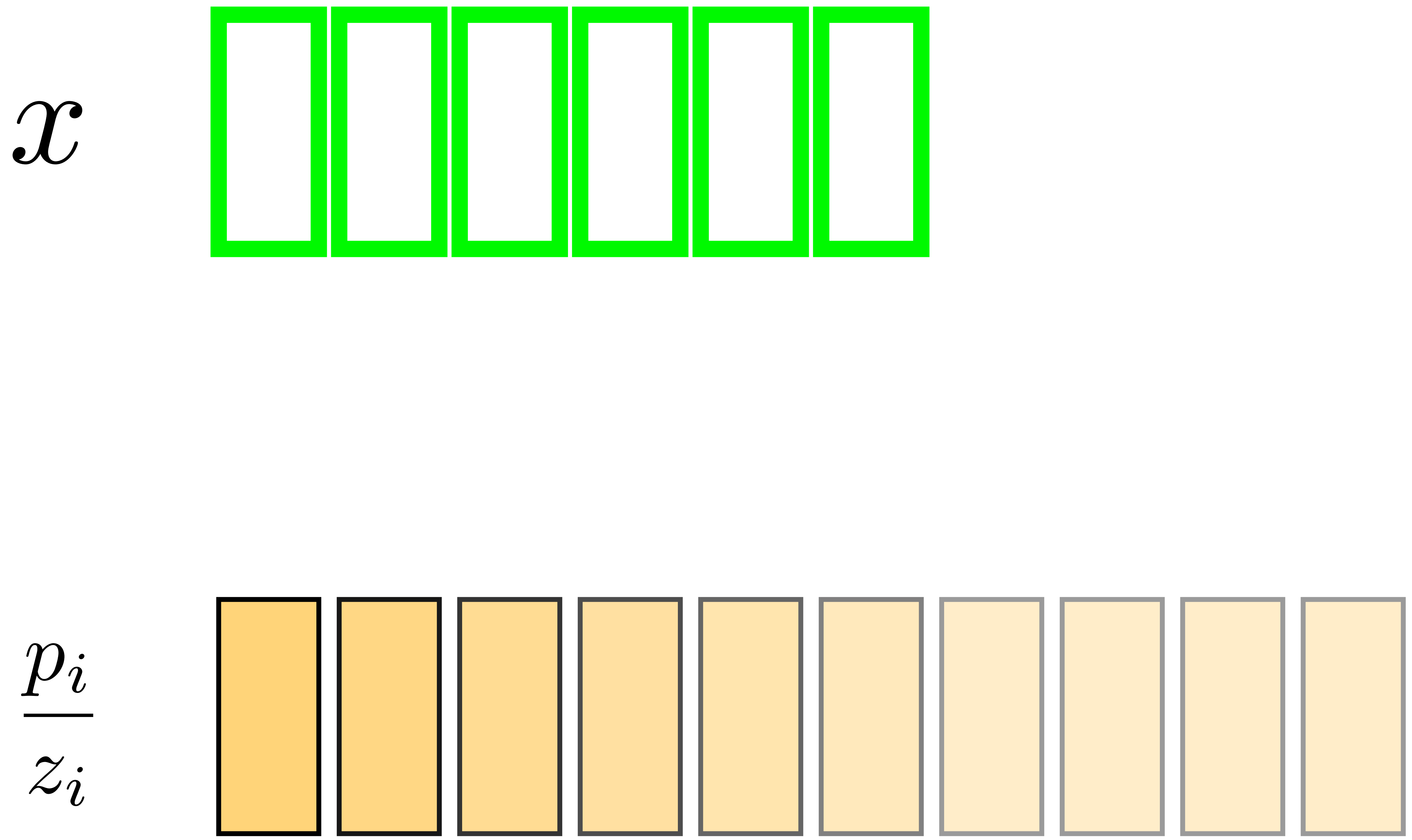
$\frac{p_i}{z_i}$



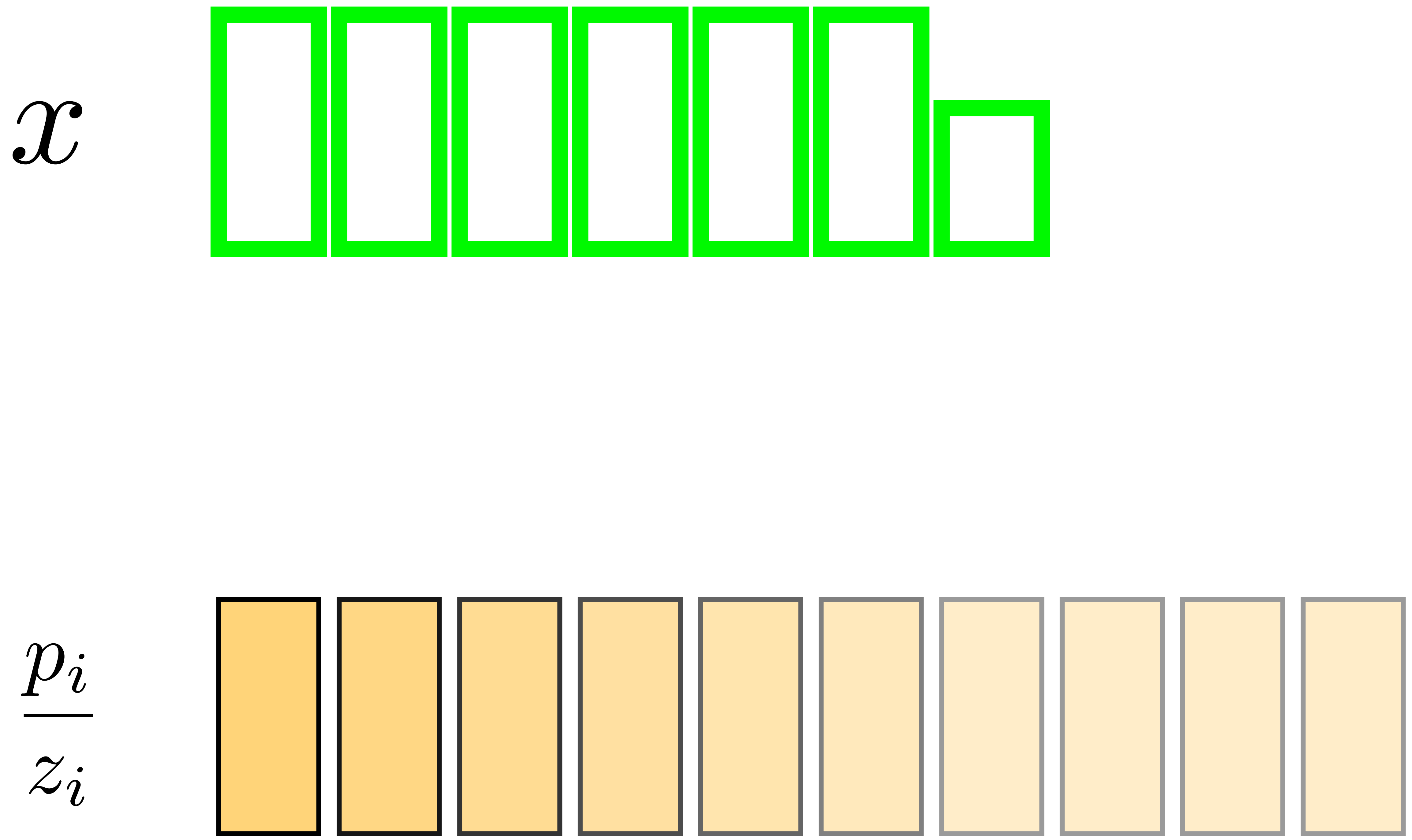
(2) Optimalität



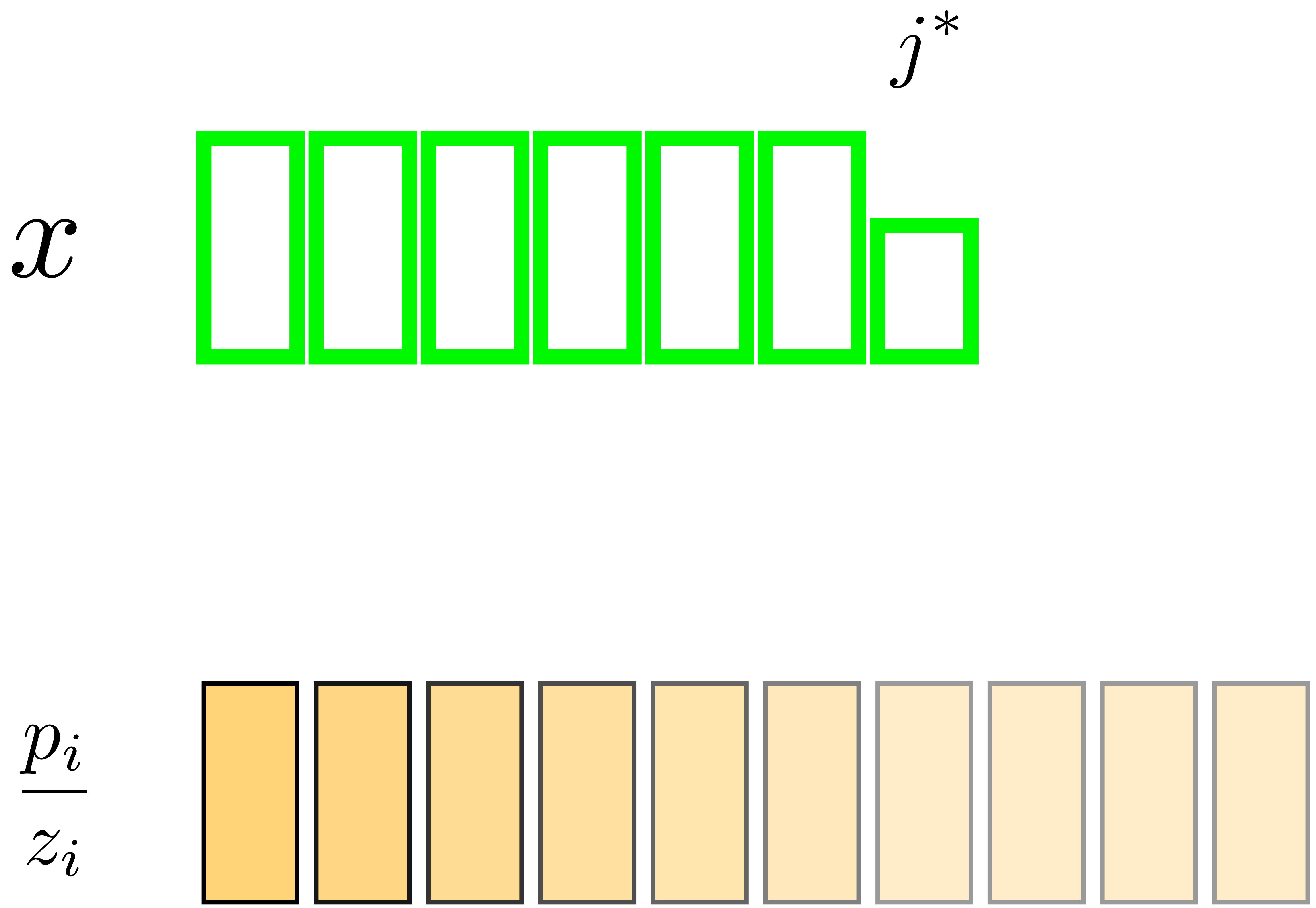
(2) Optimalität



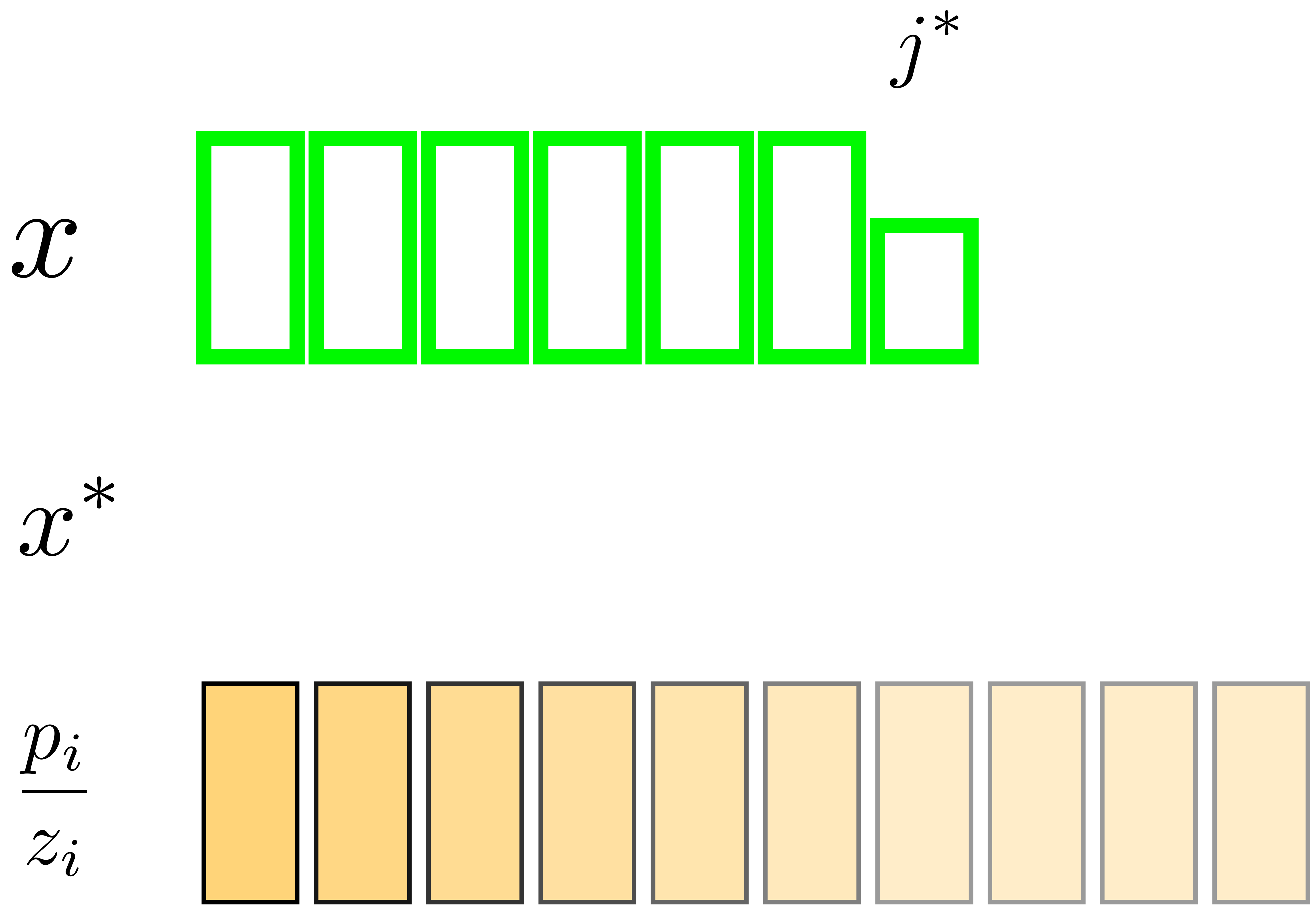
(2) Optimalität



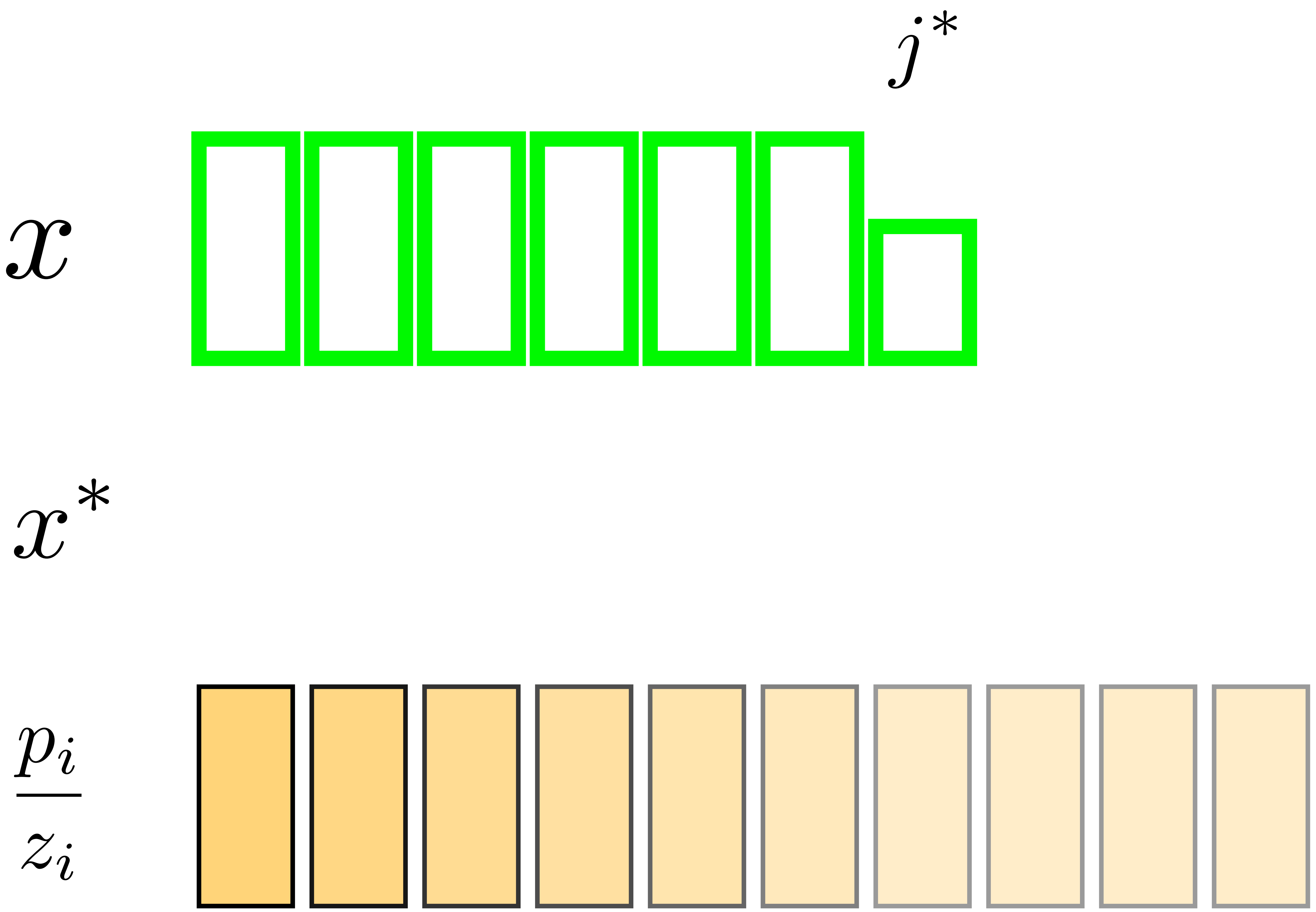
(2) Optimalität



(2) Optimalität

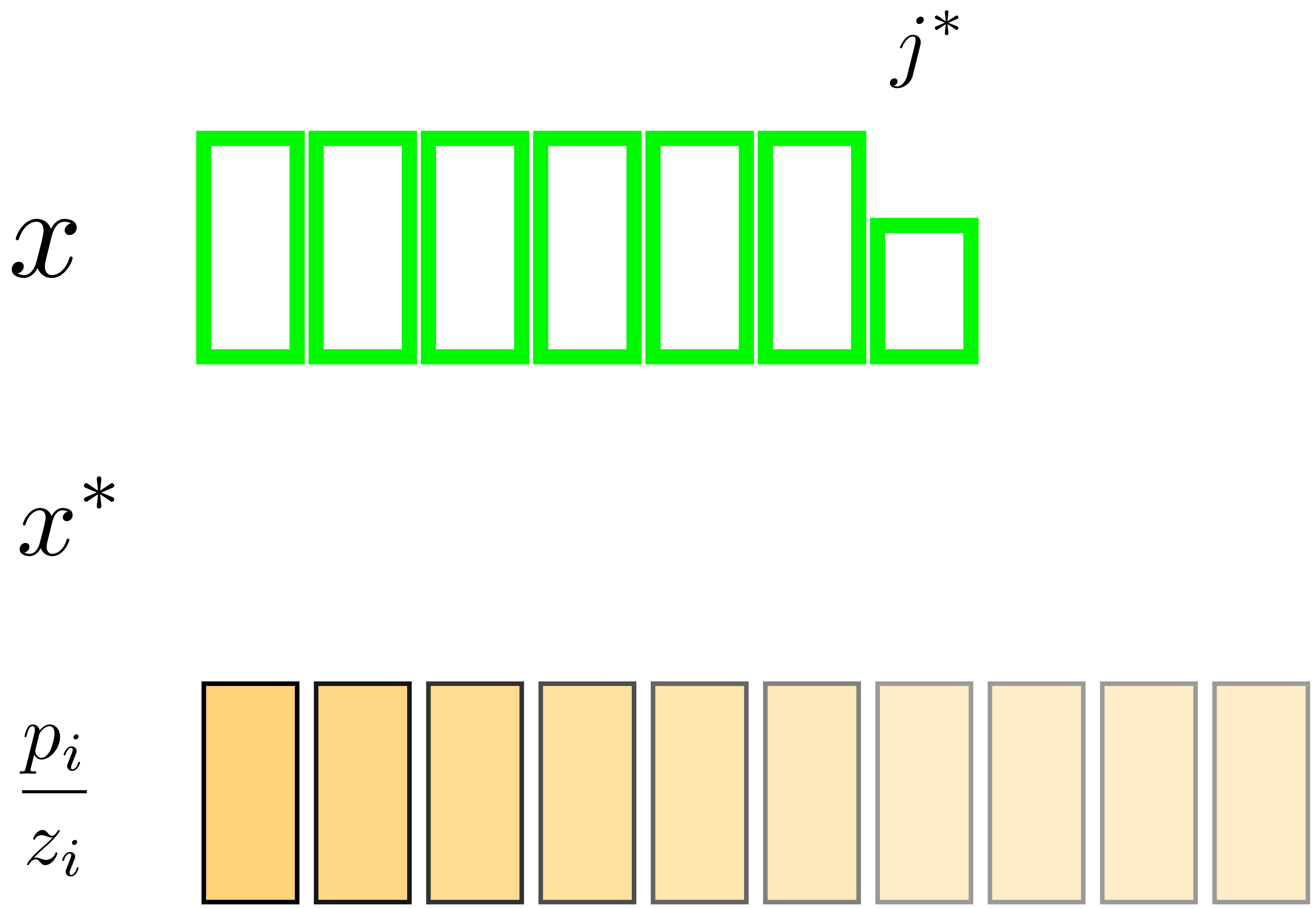


(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

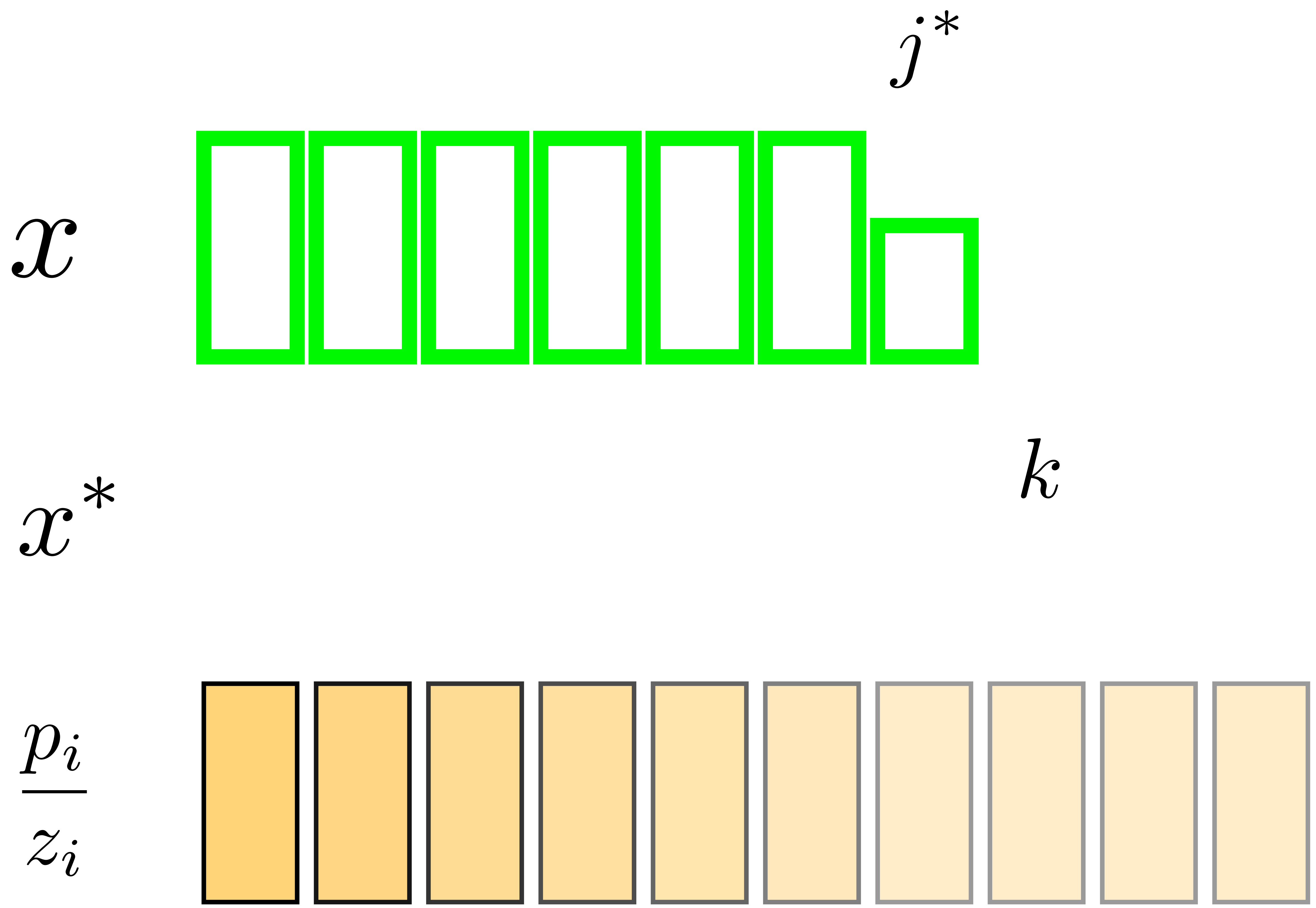
(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

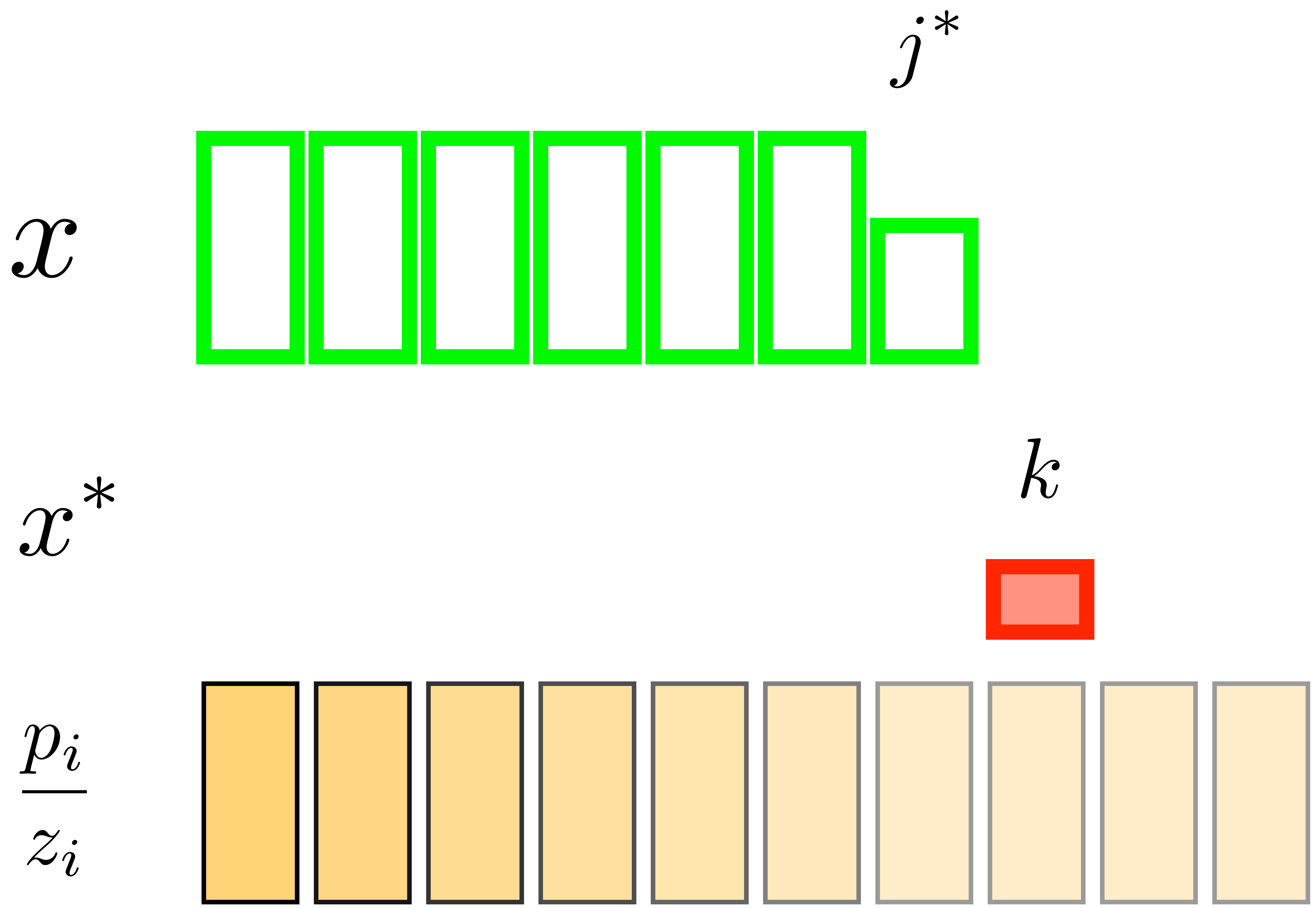
(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

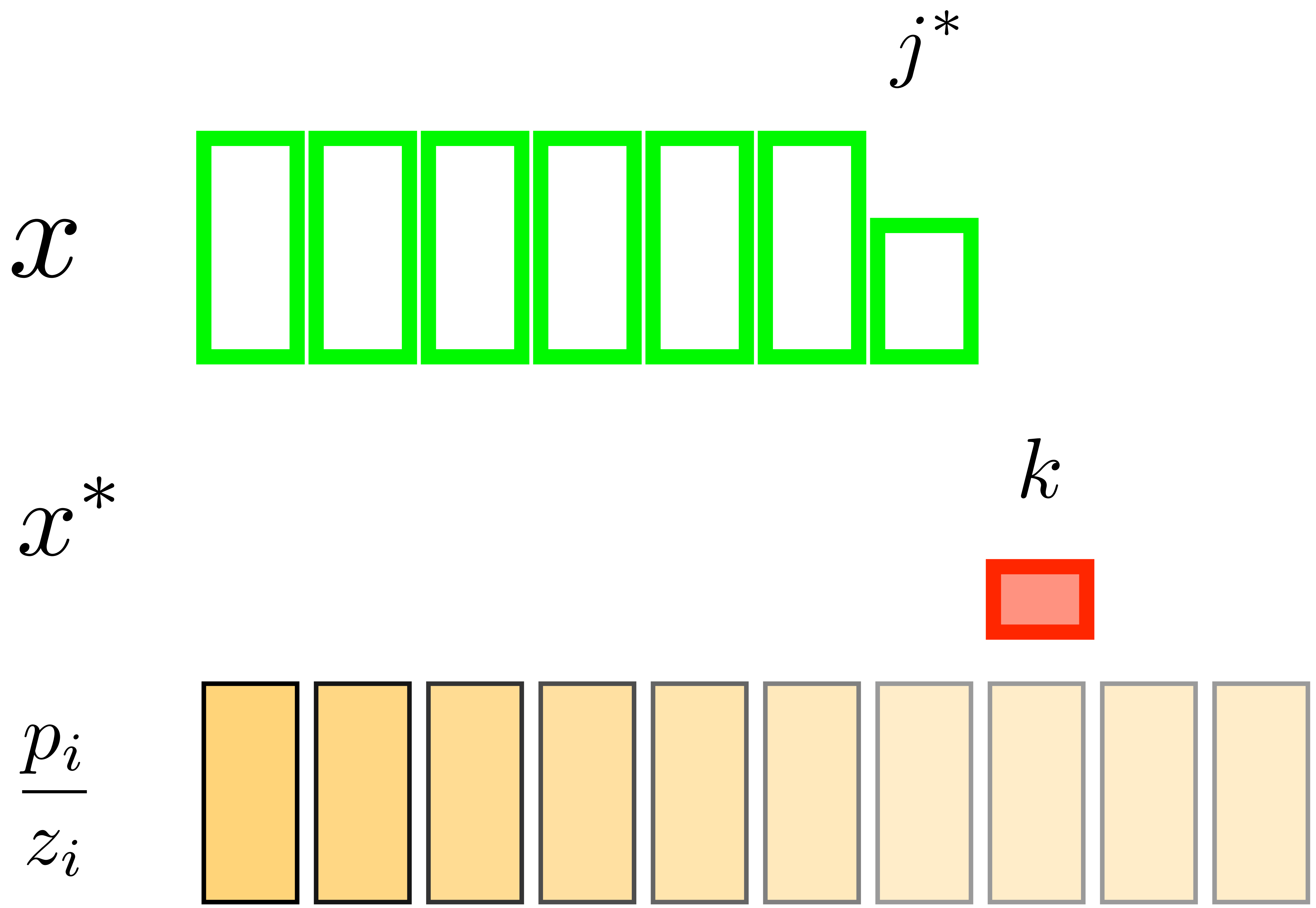
(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

(2) Optimalität

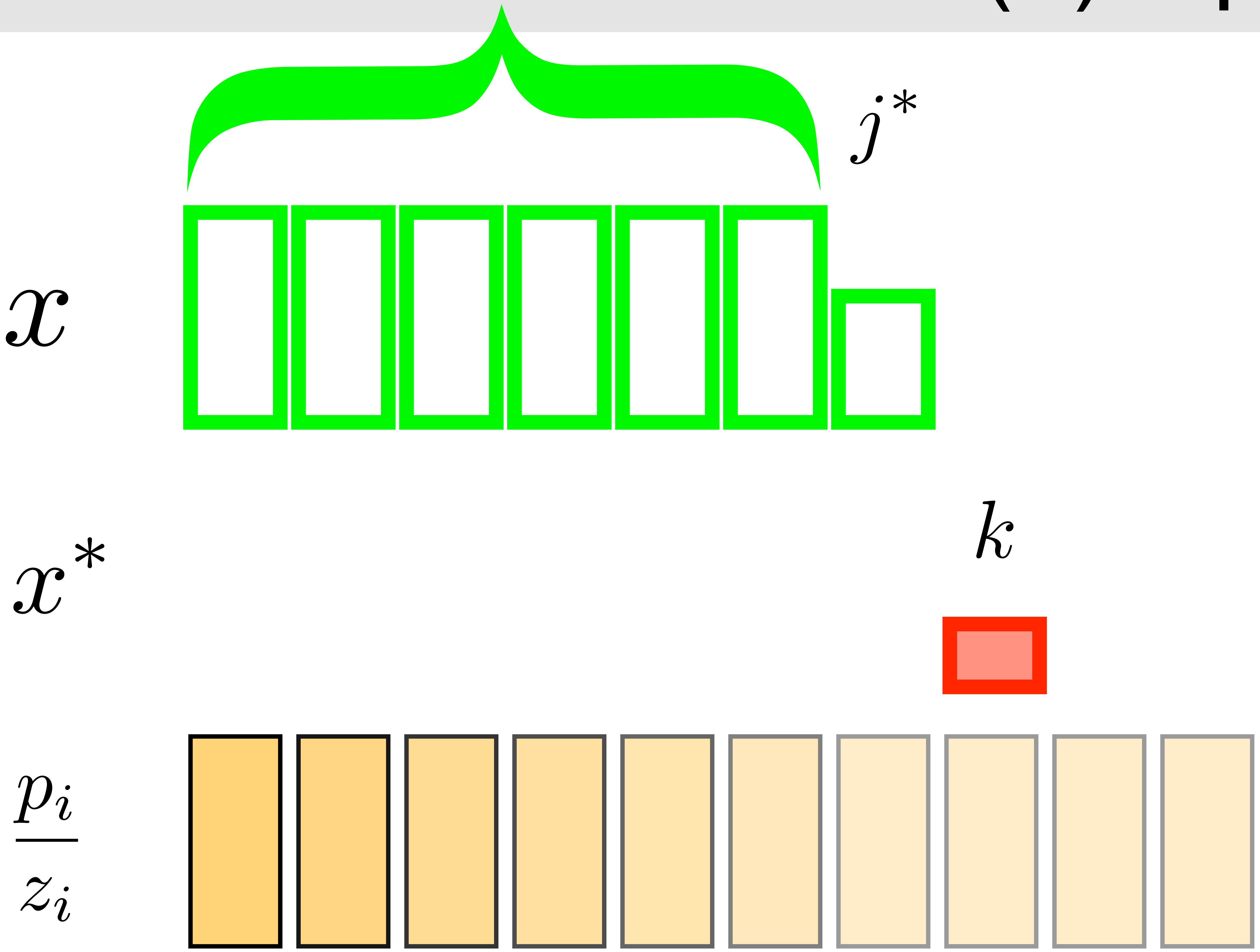


$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

(2) Optimalität

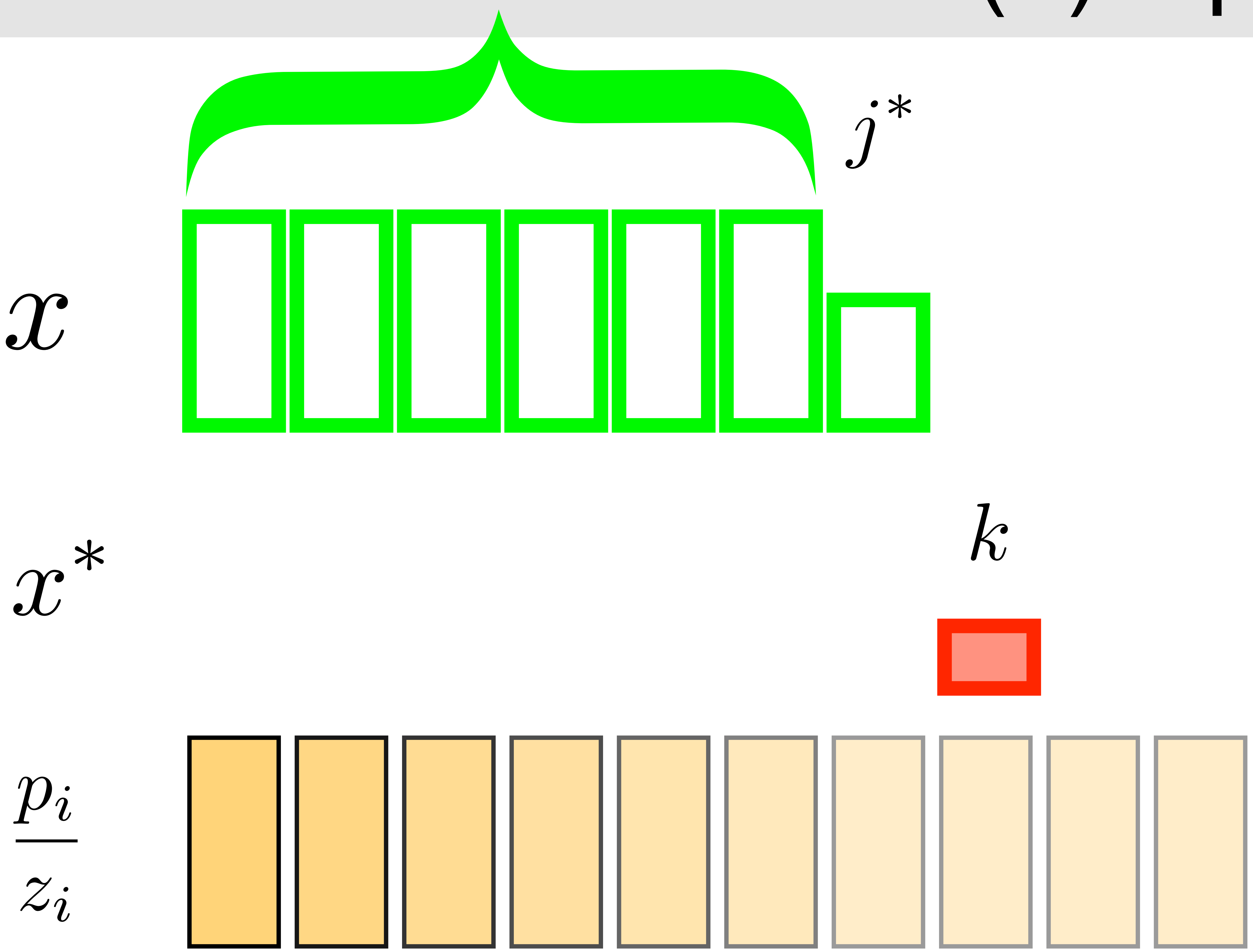


$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

(2) Optimalität



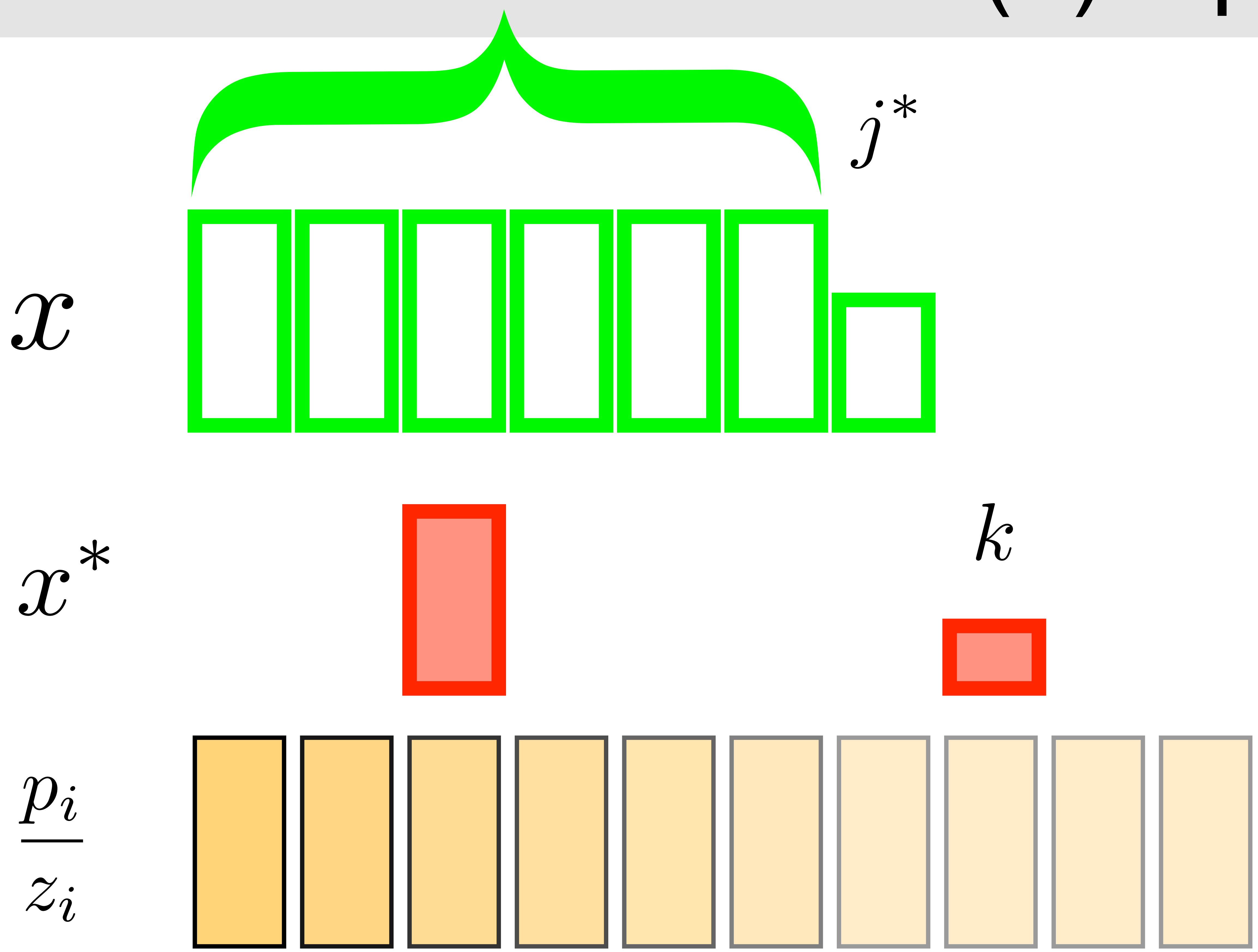
$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

(2) Optimalität



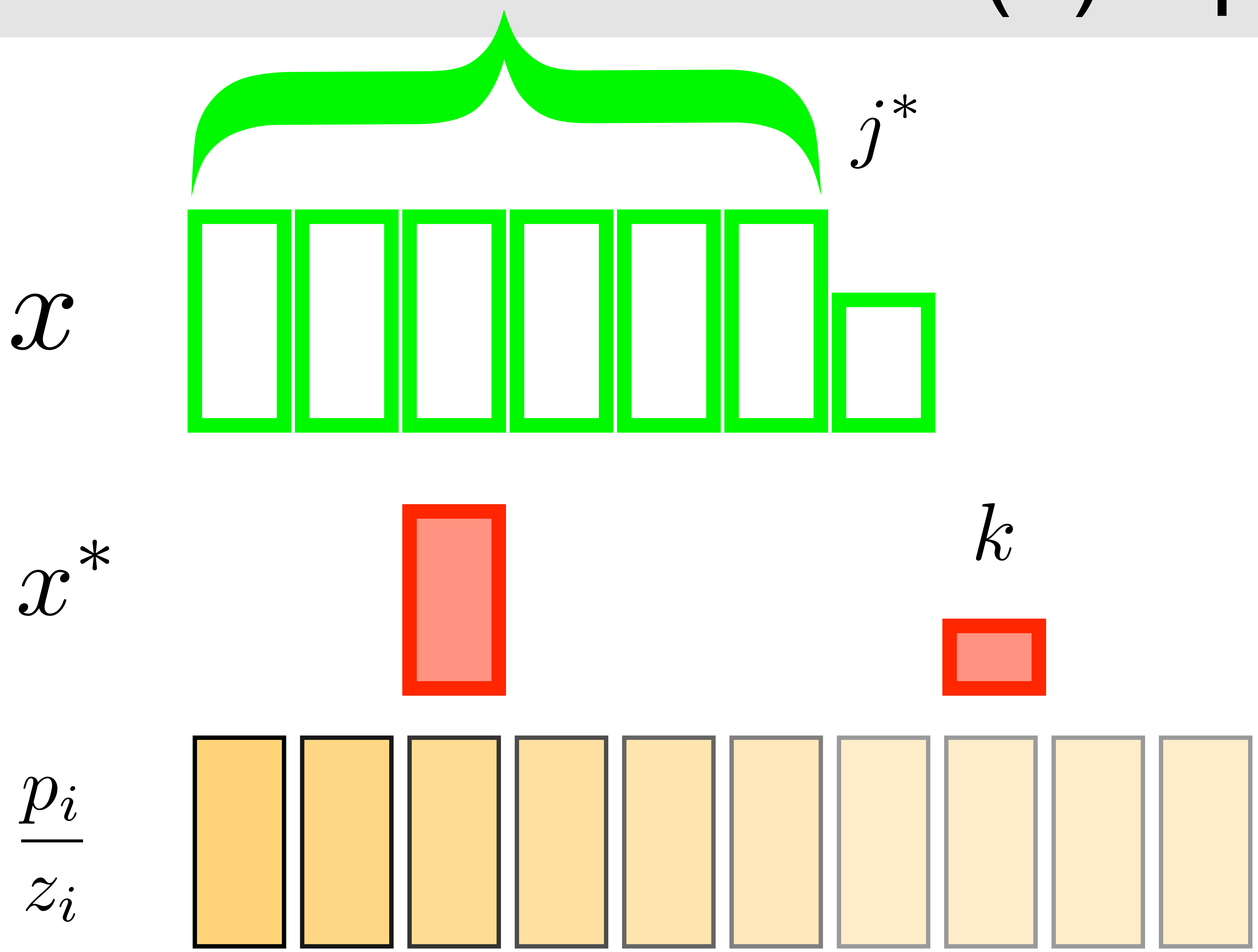
$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

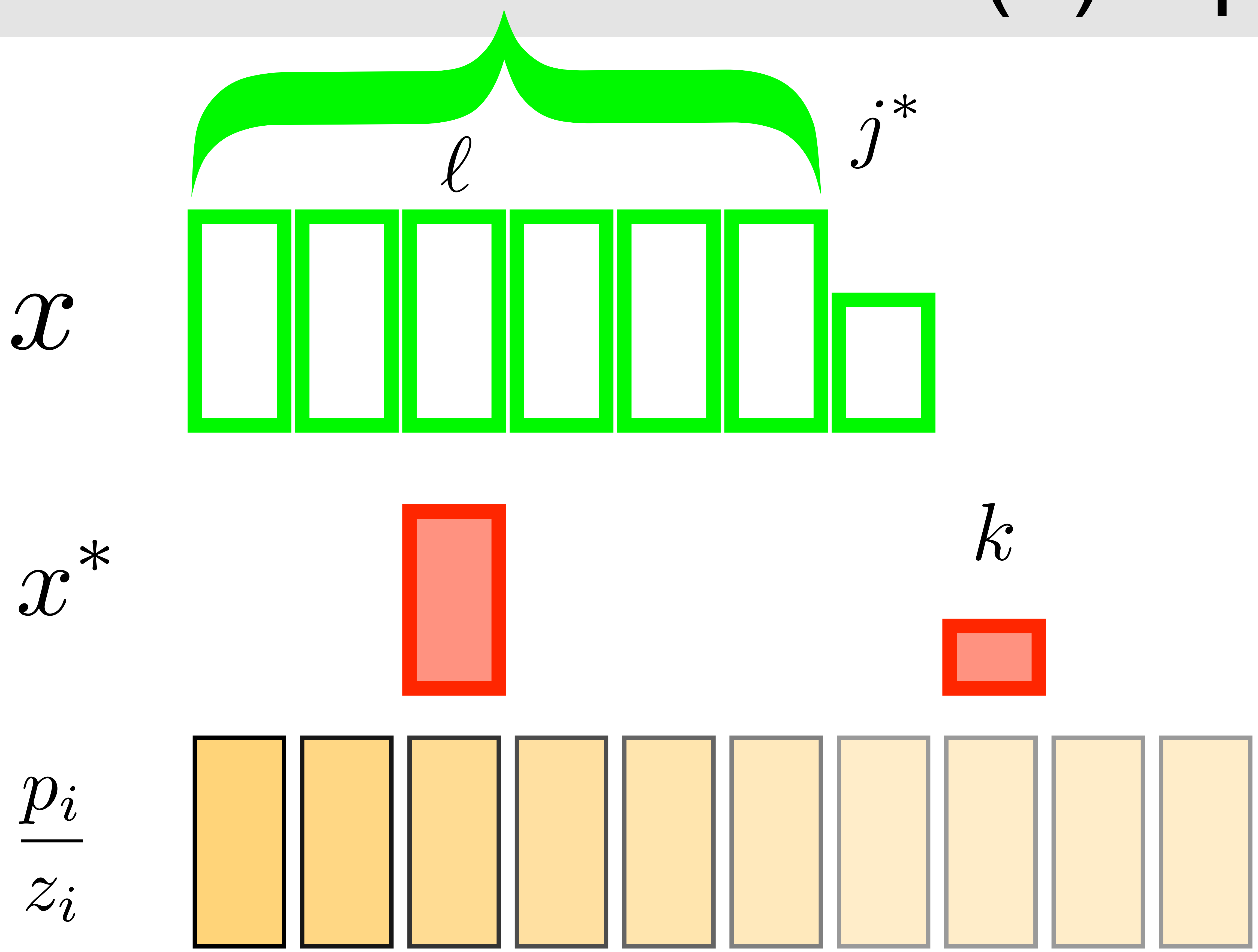
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

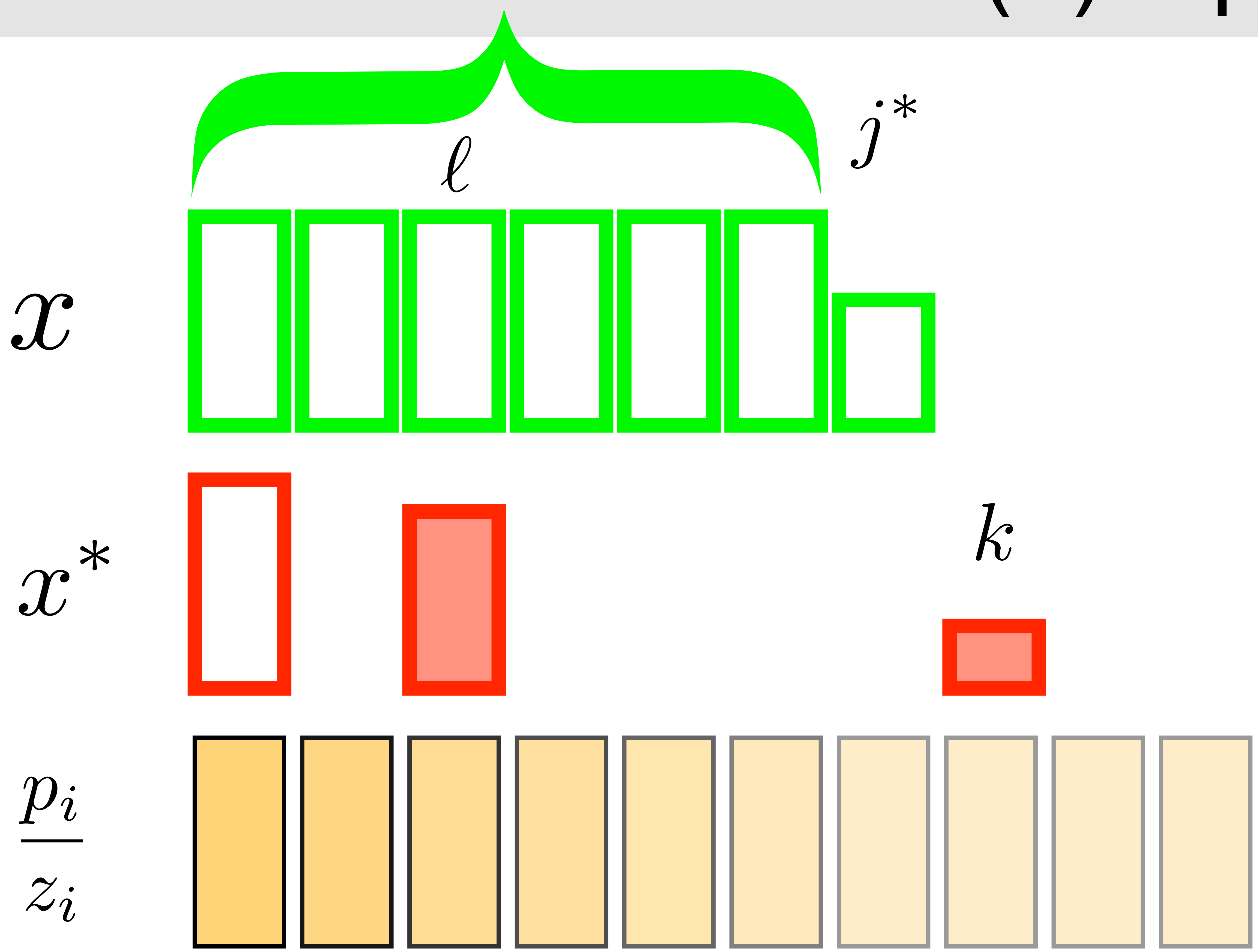
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1,\ldots,n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*,\ldots,n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1,\ldots,j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

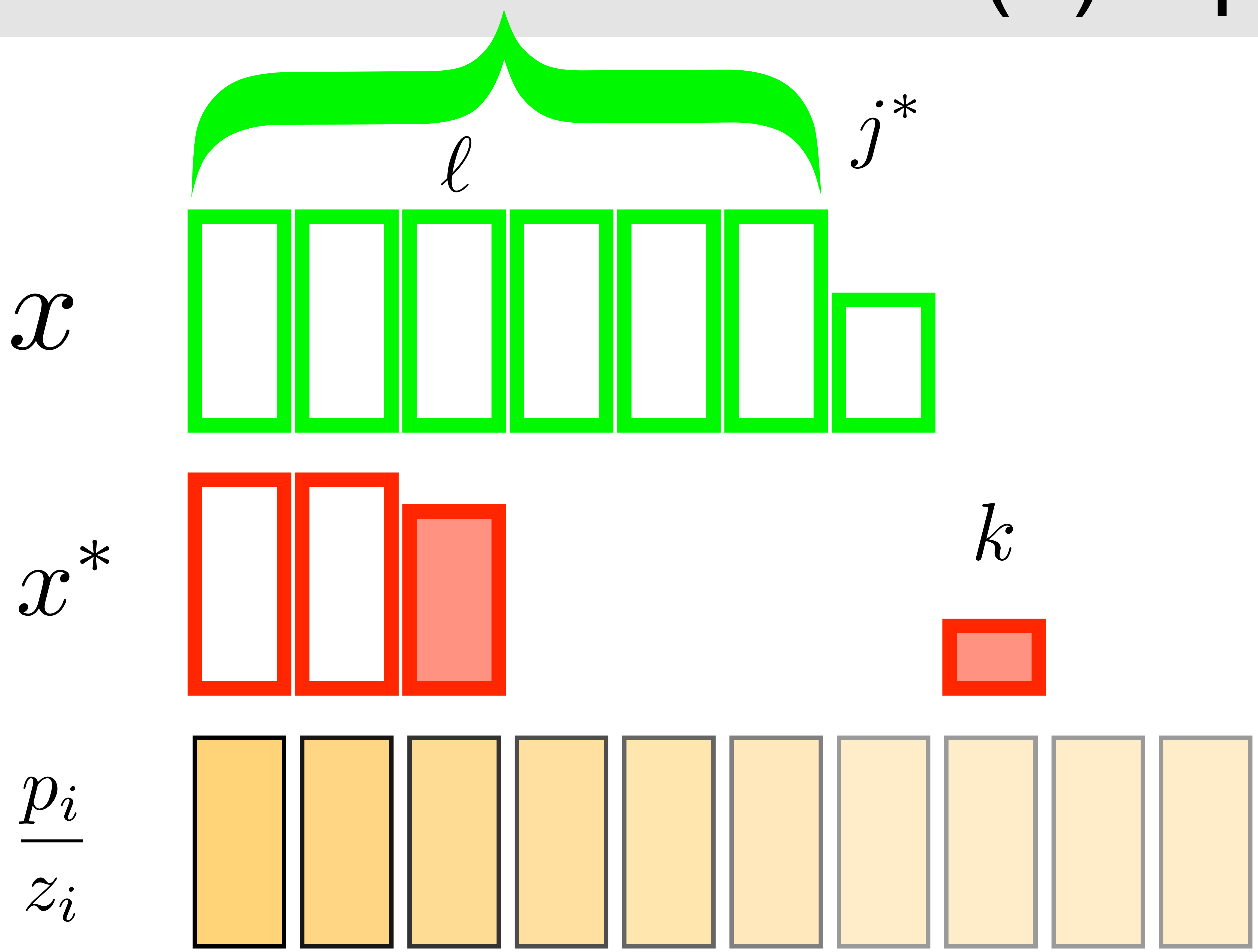
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

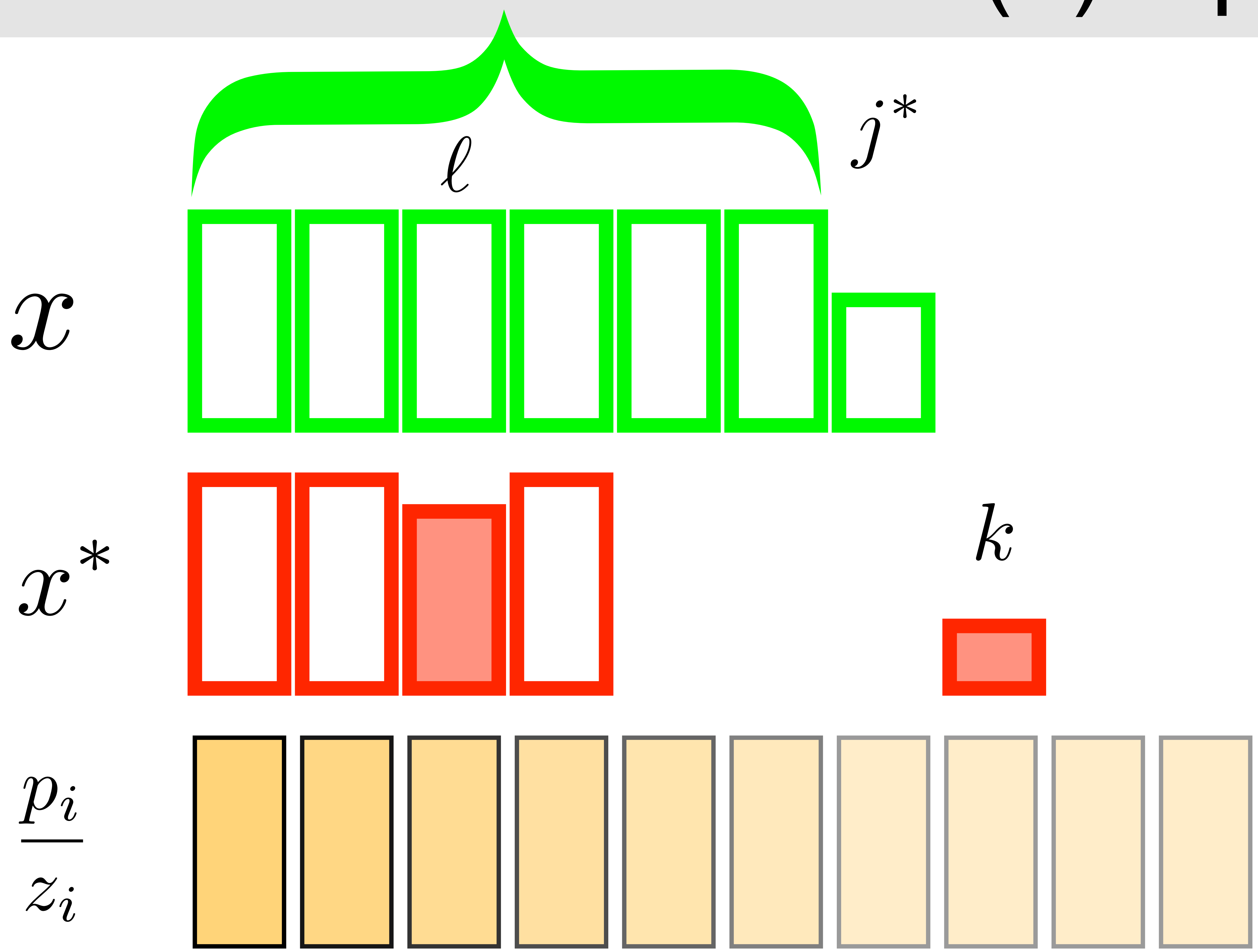
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1,\dots,n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*,\dots,n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1,\dots,j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

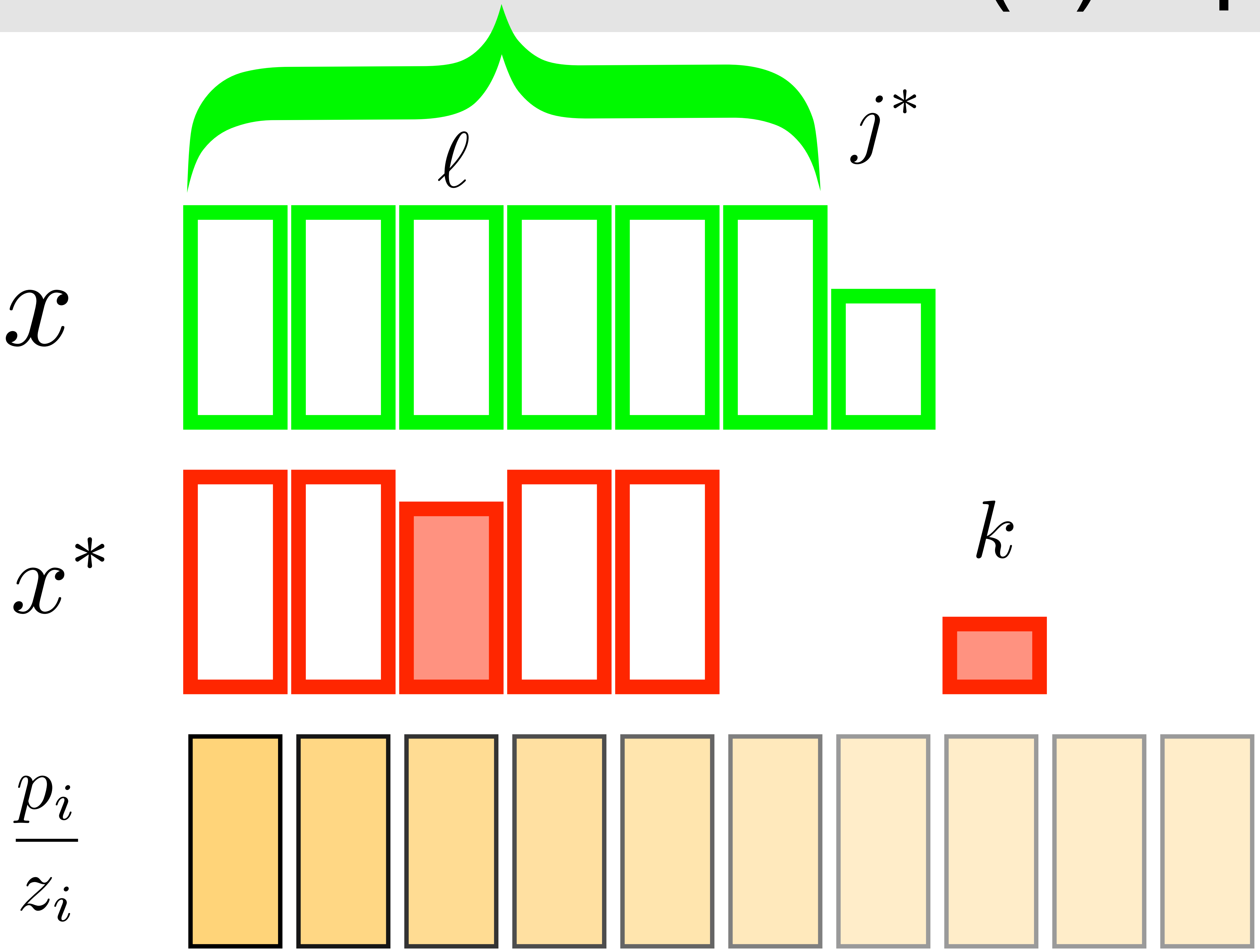
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \ \exists\, k \in \{1,\ldots,n\} : \ x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \ \exists\, k \in \{j^*,\ldots,n\} : \ x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \ \exists\, \ell \in \{1,\ldots,j^*\} : \ x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

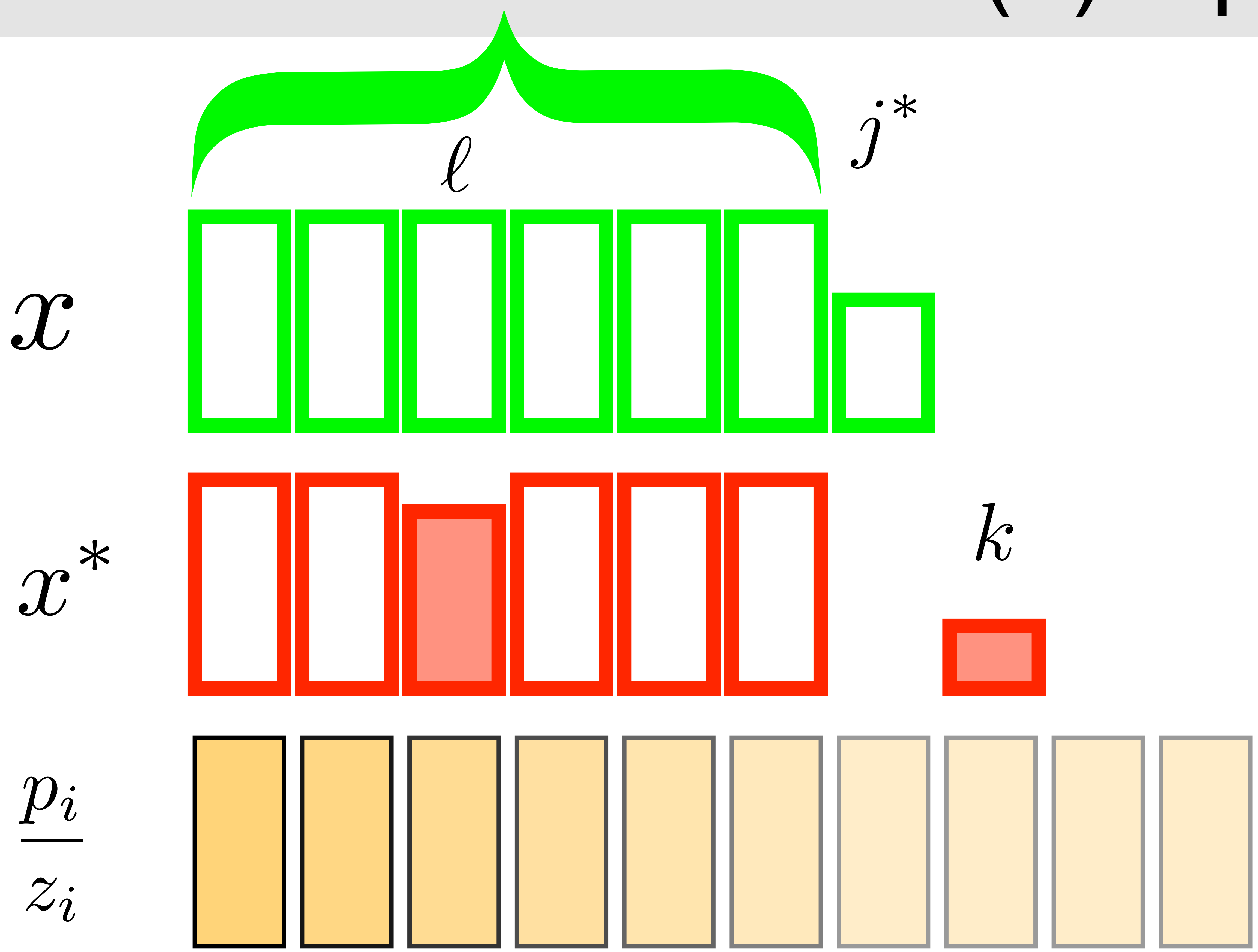
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

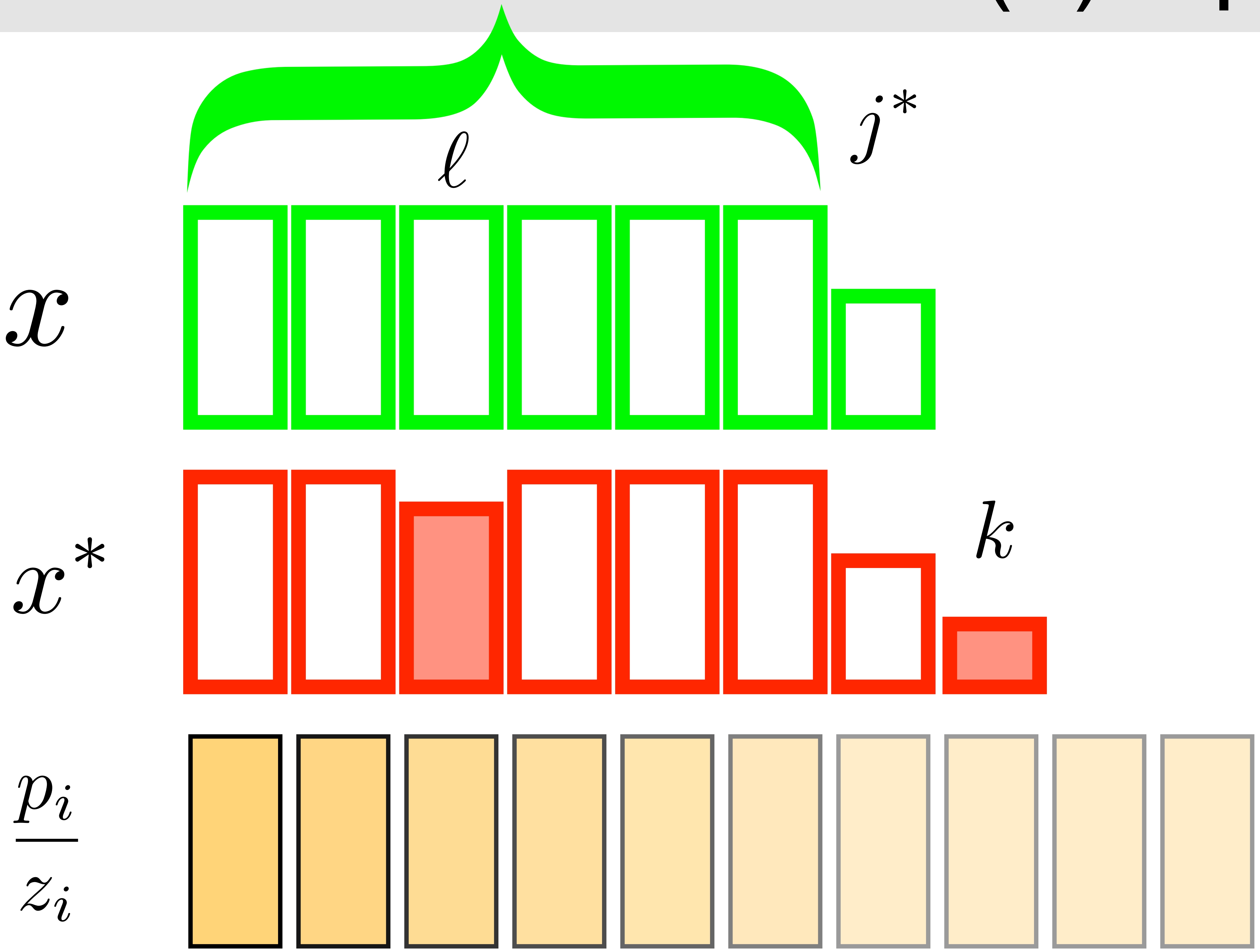
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \; \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \; \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \; \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

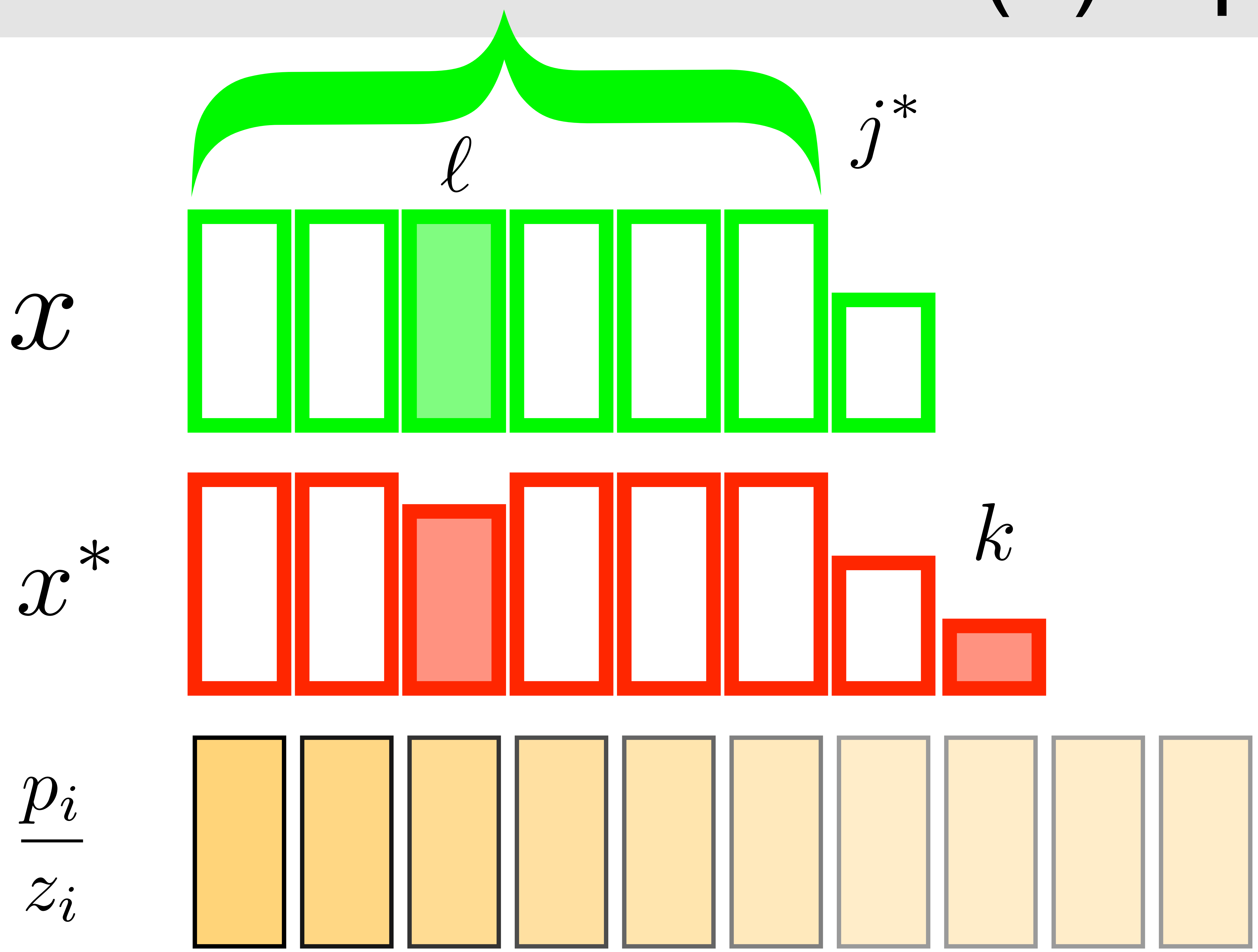
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

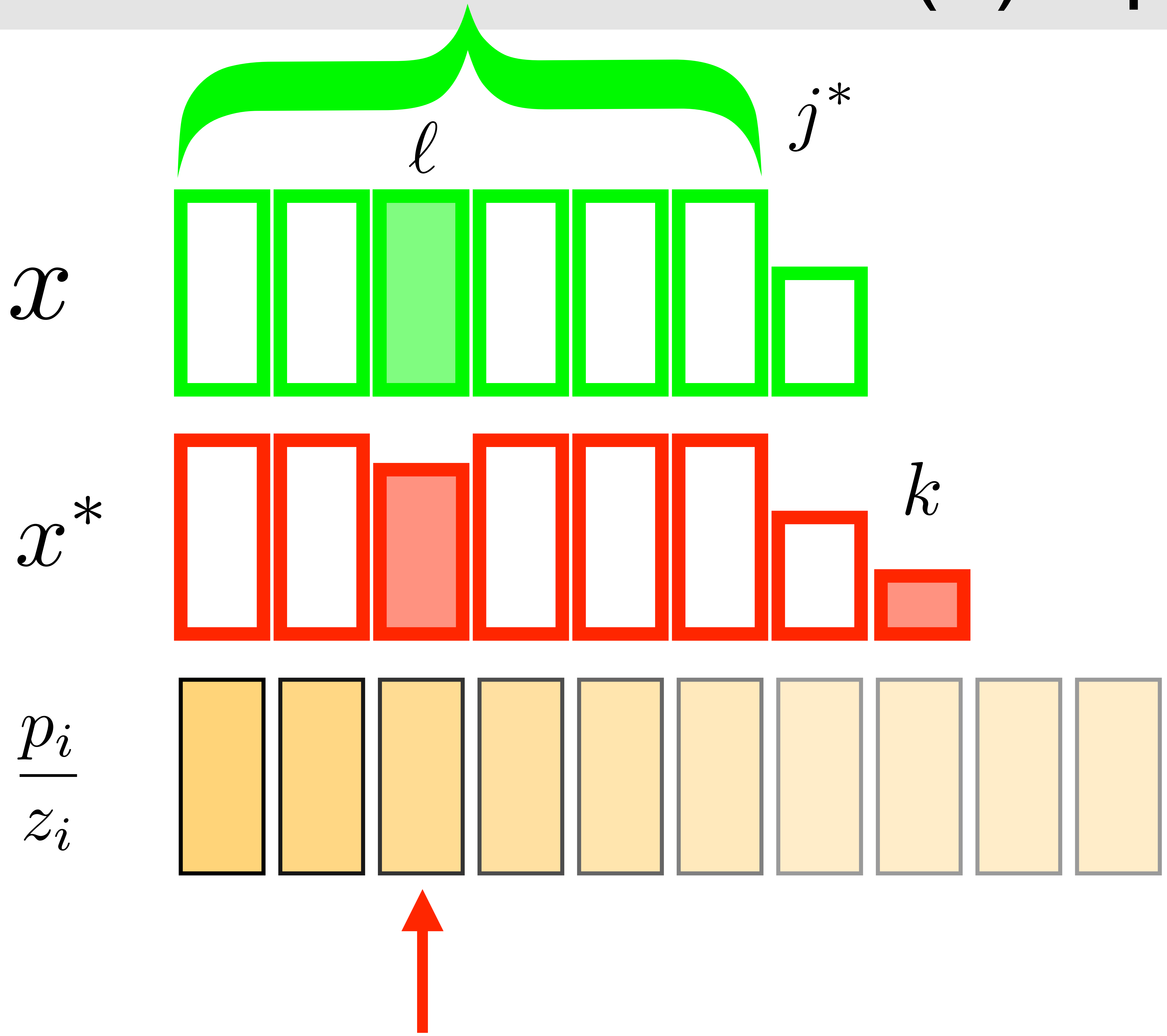
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

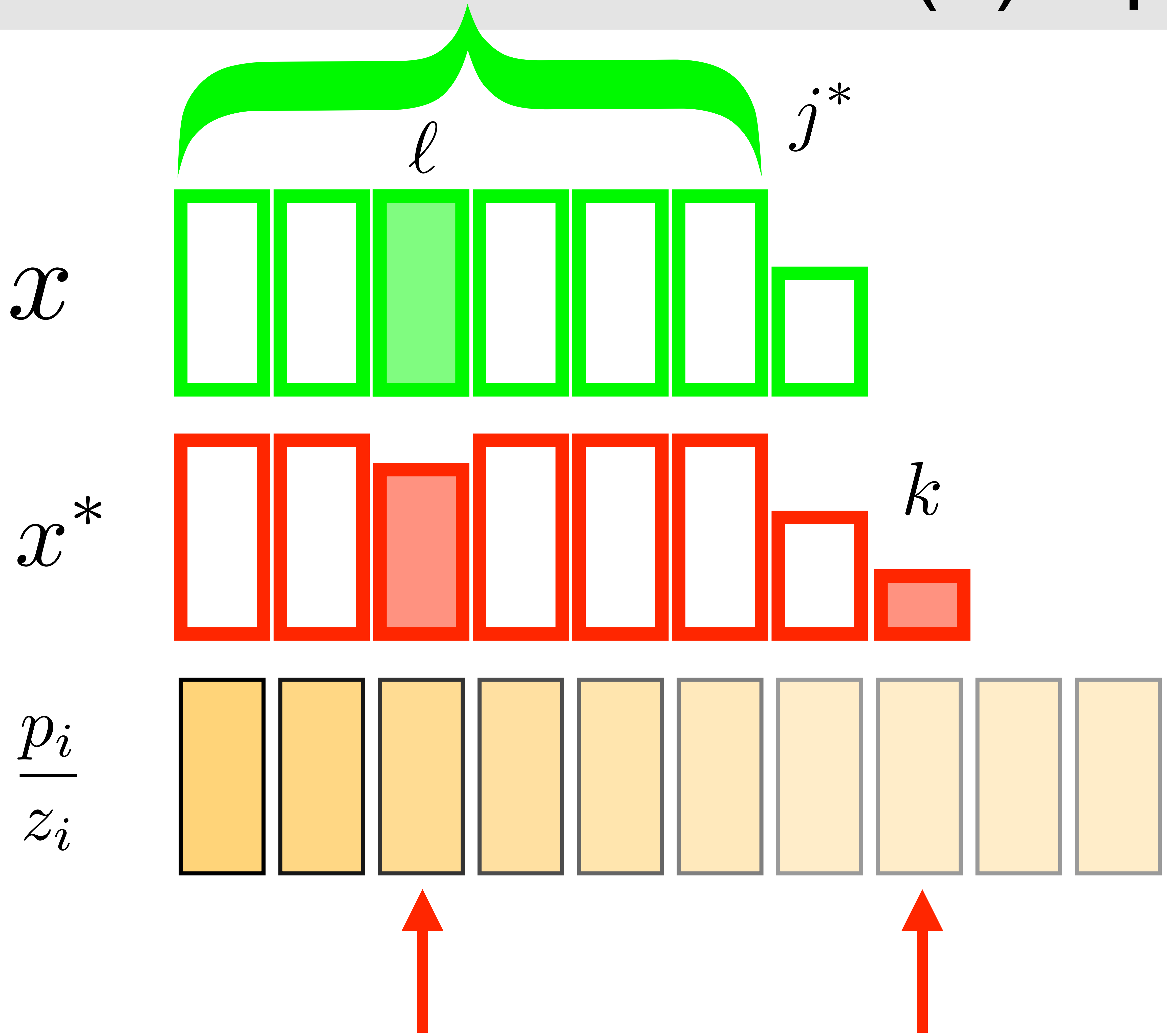
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \; \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \; \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \; \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

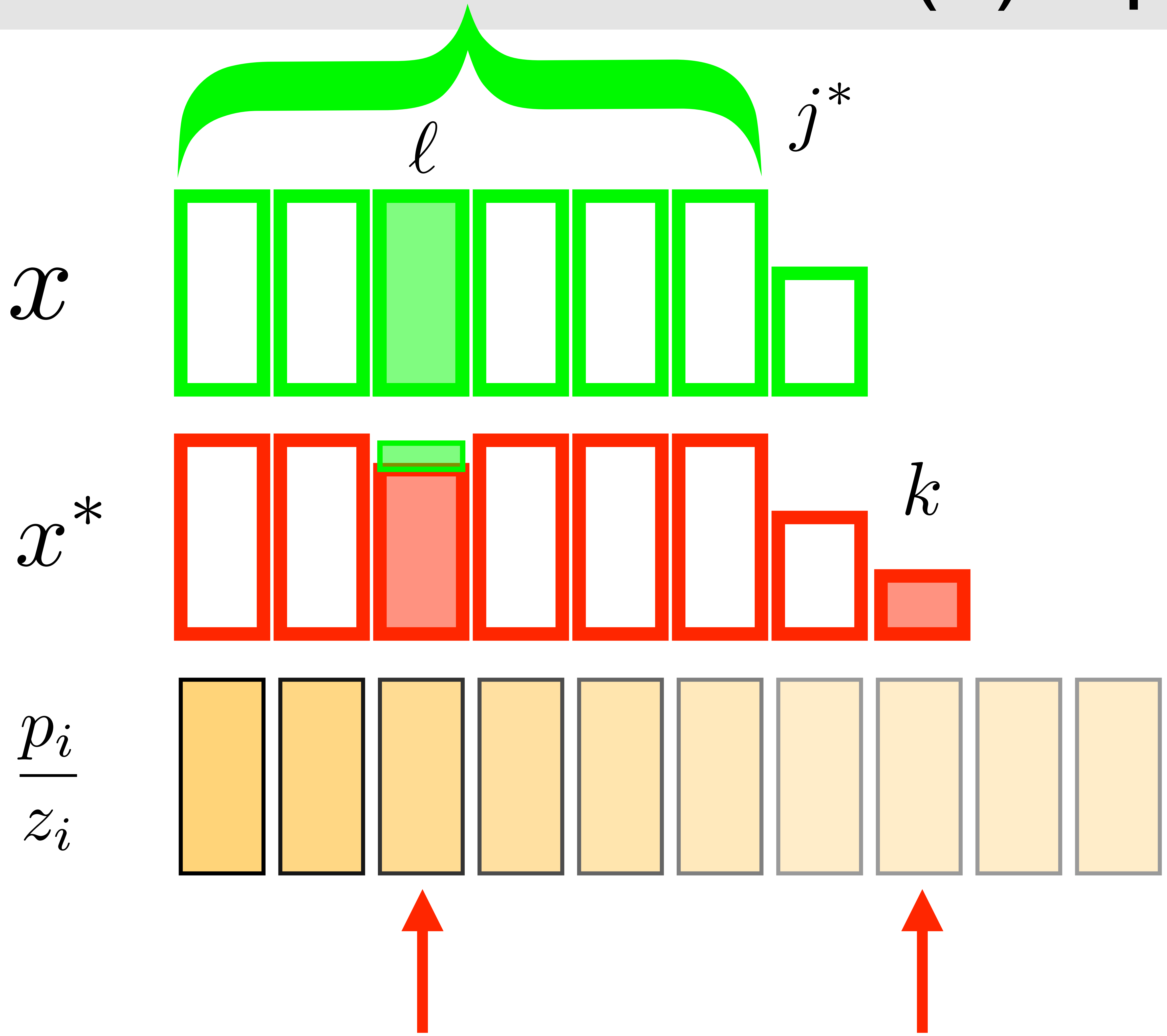
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

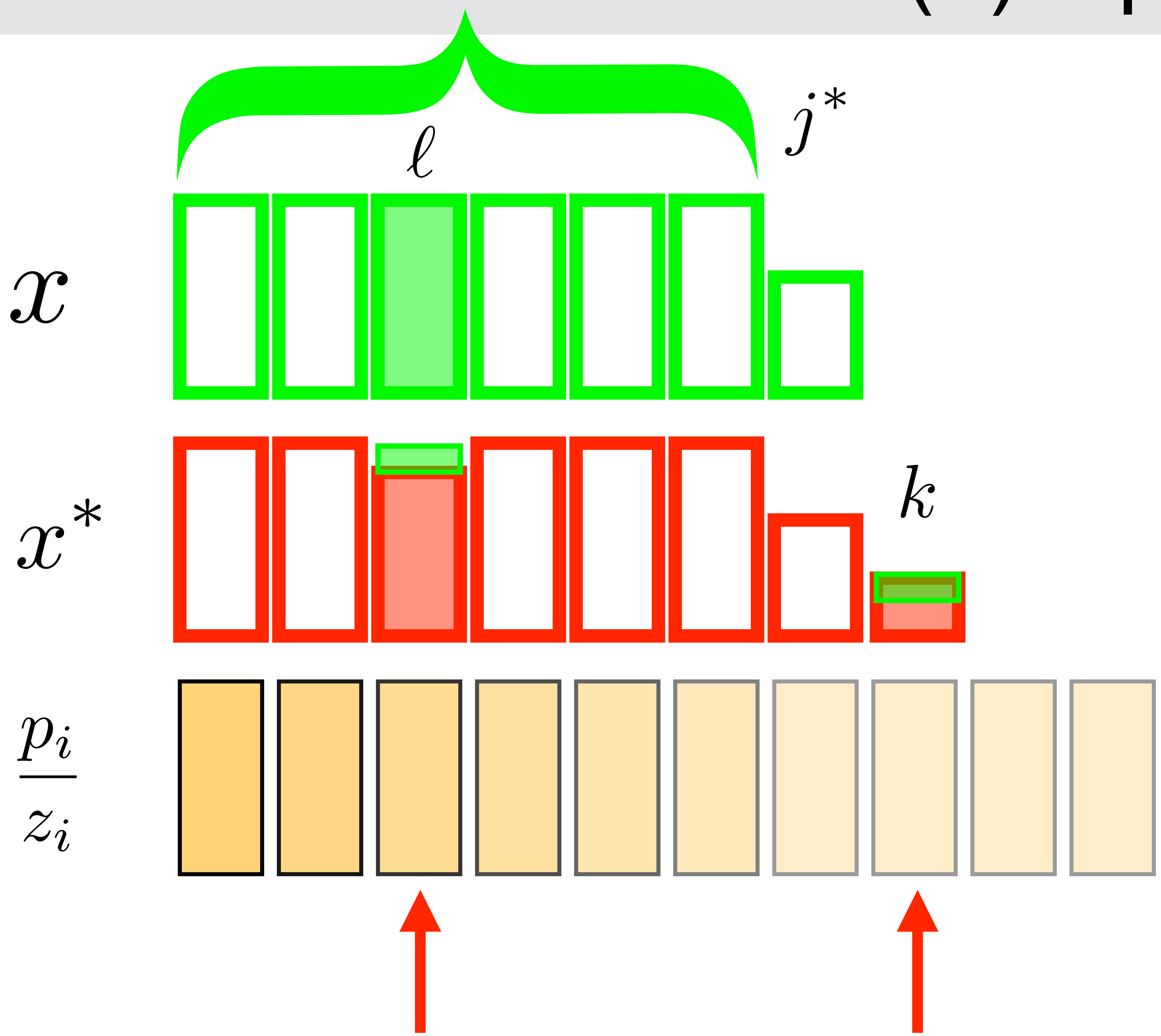
$$p_i > 0$$

$$\implies \exists\, k \in \{1,\ldots,n\}:\ x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\implies \exists\, k \in \{j^*,\ldots,n\}:\ x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\implies \exists\, \ell \in \{1,\ldots,j^*\}:\ x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

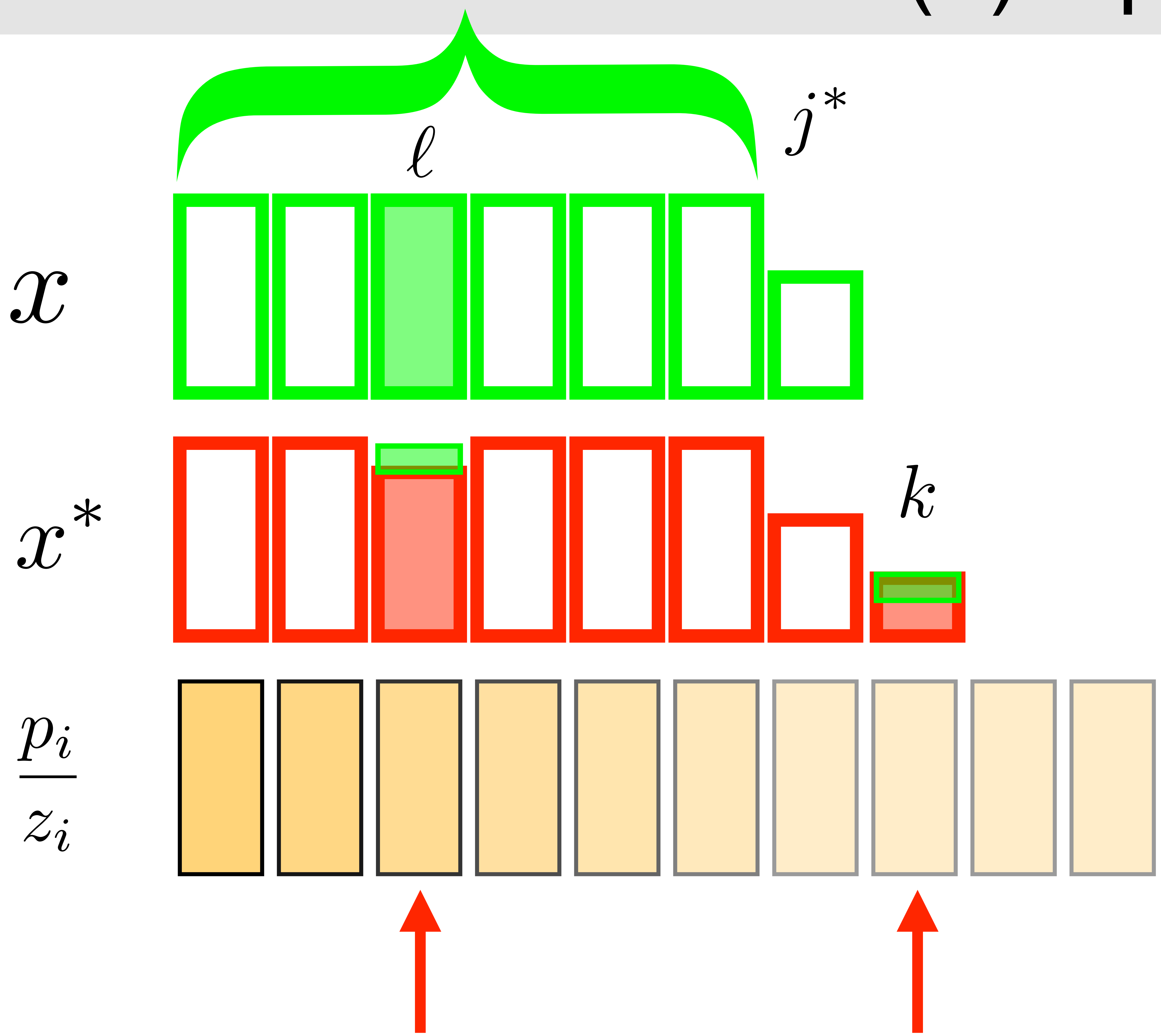
$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

(2) Optimalität



$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i < \sum_{i=1}^{n} x_i^* p_i$$

$$p_i > 0$$

$$\Longrightarrow \; \exists\, k \in \{1, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \; \exists\, k \in \{j^*, \ldots, n\} : \; x_{\pi(k)} < x^*_{\pi(k)}$$

$$\Longrightarrow \; \exists\, \ell \in \{1, \ldots, j^*\} : \; x_{\pi(\ell)} > x^*_{\pi(\ell)}$$

x^* nicht optimal!

Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

Problem 1.6 (INTEGER KNAPSACK).

Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

Problem 1.6 (INTEGER KNAPSACK).

Gegeben:

Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

Problem 1.6 (INTEGER KNAPSACK).

Gegeben:

- *n Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* z_i *Gewinn* p_i

Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

Problem 1.6 (INTEGER KNAPSACK).

Gegeben:

- *n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i*
- *Größenschranke Z*

Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

Problem 1.6 (INTEGER KNAPSACK).

Gegeben:

- *n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i*
- *Größenschranke Z*

Gesucht:

Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

Problem 1.6 (INTEGER KNAPSACK).

Gegeben:

- *n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i*
- *Größenschranke Z*

Gesucht:

Für jedes Objekt ein Wert

Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

Problem 1.6 (INTEGER KNAPSACK).

Gegeben:

- *n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i*
- *Größenschranke Z*

Gesucht:

Für jedes Objekt ein Wert

$$x_i \in \mathbb{N}$$

Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

Problem 1.6 (INTEGER KNAPSACK).

Gegeben:

- *n Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* z_i *Gewinn* p_i
- *Größenschranke* Z

Gesucht:

Für jedes Objekt ein Wert

$$x_i \in \mathbb{N}$$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

Problem 1.6 (INTEGER KNAPSACK).

Gegeben:

- *n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i*
- *Größenschranke Z*

Gesucht:

Für jedes Objekt ein Wert

$$x_i \in \mathbb{N}$$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Maximal$$

Verallgemeinerung: Mehrfachverwendung

Problem 1.6 (INTEGER KNAPSACK).

Gegeben:

- n *Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* z_i *Gewinn* p_i
- *Größenschranke* Z

Gesucht:

Für jedes Objekt ein Wert

$$\boxed{x_i \in \mathbb{N}}$$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \mathit{Maximal}$$

Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

Problem 1.7.

Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

Problem 1.7.

Gegeben:

Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

Problem 1.7.

Gegeben:

- n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i

Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

Problem 1.7.

Gegeben:

- n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i
- Größenschranke Z

Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

Problem 1.7.

Gegeben:

- n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i
- Größenschranke Z

Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

Problem 1.7.

Gegeben:

- n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i
- Größenschranke Z

Gesucht:

Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

Problem 1.7.

Gegeben:

- n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i
- Größenschranke Z

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

Problem 1.7.

Gegeben:

- n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i
- Größenschranke Z

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

mit

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

Spezialfall: Alle Gewinndichten gleich

Problem 1.7.

Gegeben:

- n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i
- Größenschranke Z

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

mit

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i \in S} z_i = Maximal$$

Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

Problem 1.8 (SUBSET SUM).

Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

Problem 1.8 (SUBSET SUM).

Gegeben:

Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

Problem 1.8 (Subset Sum).

Gegeben:

- n *Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* z_i

Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

Problem 1.8 (Subset Sum).

Gegeben:

- *n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i*
- *Zielgröße Z*

Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

Problem 1.8 (Subset Sum).

Gegeben:

- n *Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* z_i
- *Zielgröße* Z

Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

Problem 1.8 (SUBSET SUM).

Gegeben:

- *n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i*
- *Zielgröße Z*

Gesucht:

Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

Problem 1.8 (Subset Sum).

Gegeben:

- *n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i*
- *Zielgröße Z*

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

Spezialfall des Spezialfalls: Größenschranke treffen

Problem 1.8 (Subset Sum).

Gegeben:

- *n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i*
- *Zielgröße Z*

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

mit

$$\sum_{i \in S} z_i = Z$$

Spezialfall^3: Partition

Spezialfall^3: Partition

Problem 1.9 (PARTITION).

Spezialfall^3: Partition

Problem 1.9 (PARTITION).

Gegeben:

Spezialfall ^{3}: Partition

Problem 1.9 (PARTITION).

Gegeben:

- *n Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* z_i

Spezialfall^3: Partition

Problem 1.9 (PARTITION).

Gegeben:

- n *Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* z_i

Gesucht:

Spezialfall^3: Partition

Problem 1.9 (Partition).

Gegeben:

- *n Objekte $1, \ldots, n$ mit jeweils Größe z_i*

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

Spezialfall³: Partition

Problem 1.9 (Partition).

Gegeben:

- *n Objekte* $1, \ldots, n$ *mit jeweils Größe* z_i

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

mit

$$\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \notin S} z_i$$

Beispiel

Beispiel

Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

Gesamtsumme: 240

Beispiel

Beispiel 1.10.

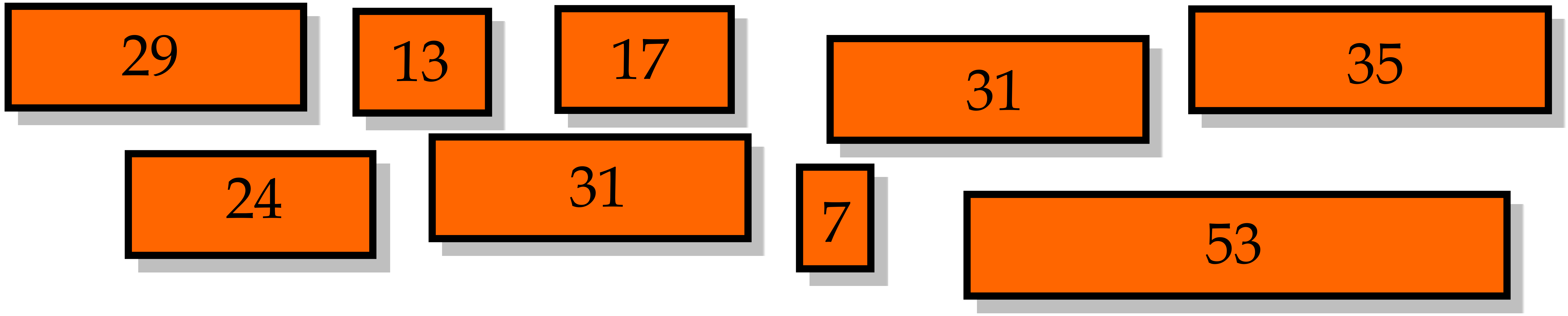
Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

Gesamtsumme: 240

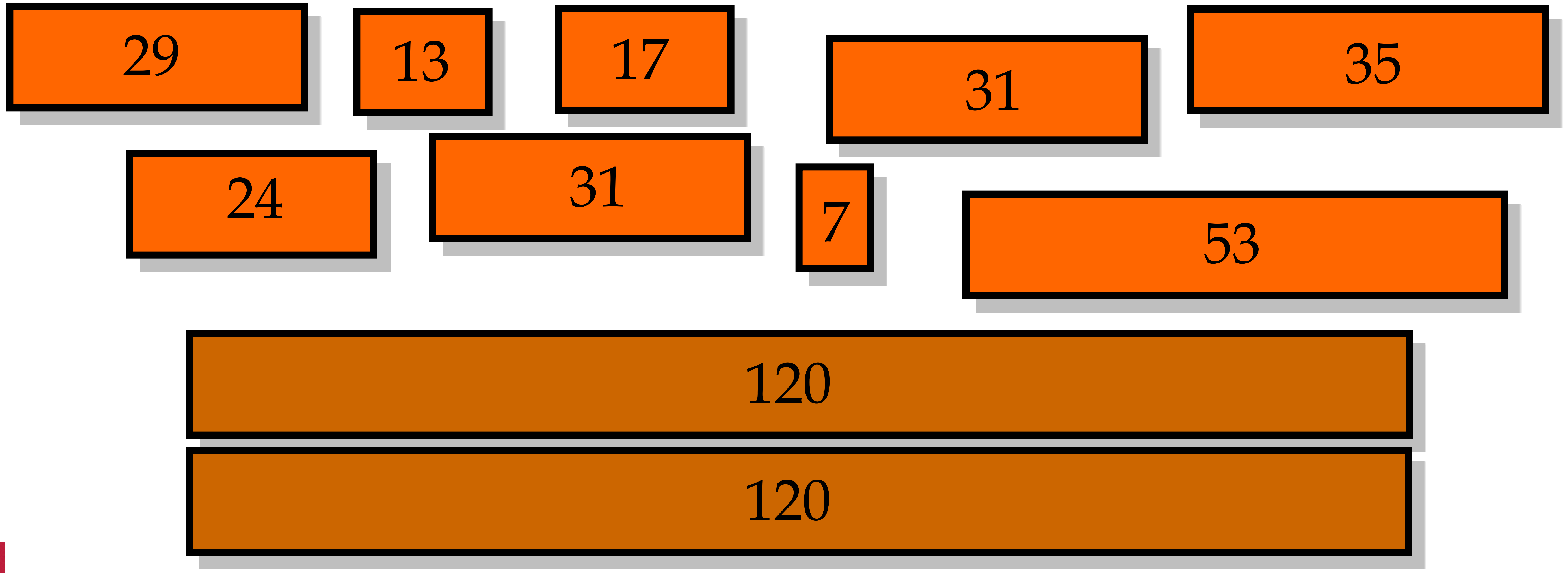
Finde Aufteilung in zwei gleiche Teilmengen!

Ein Bild hilft

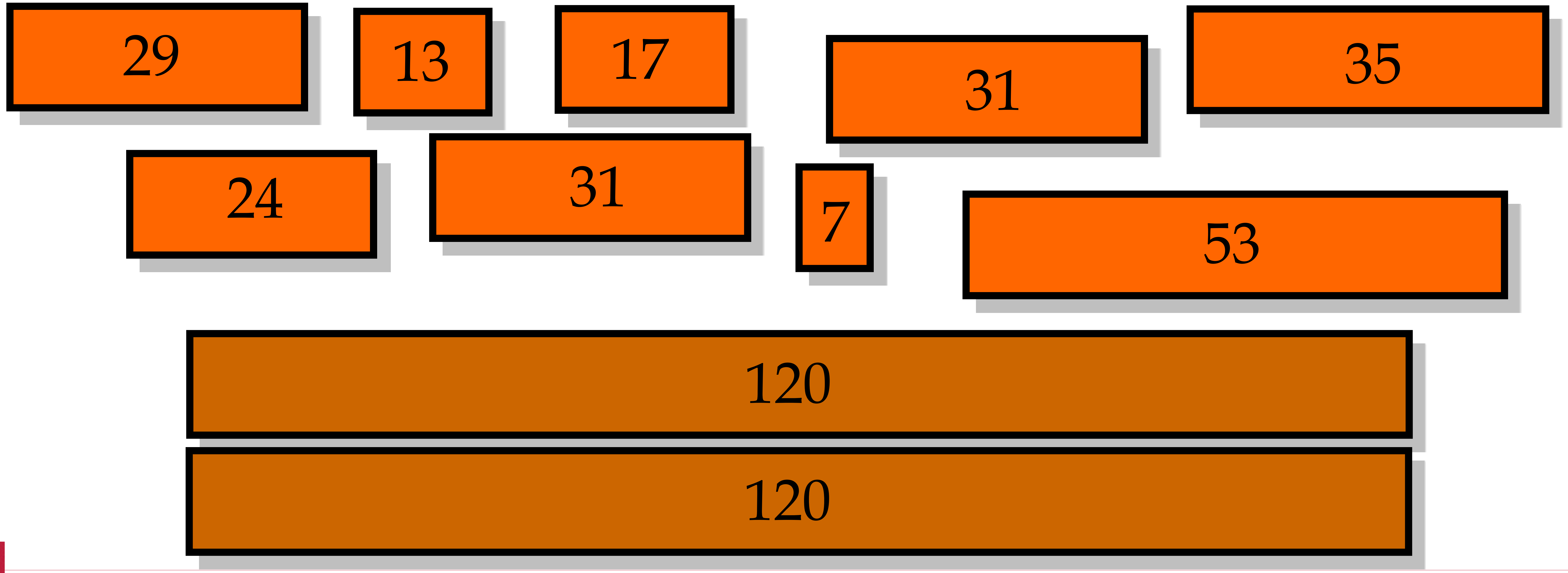
Ein Bild hilft



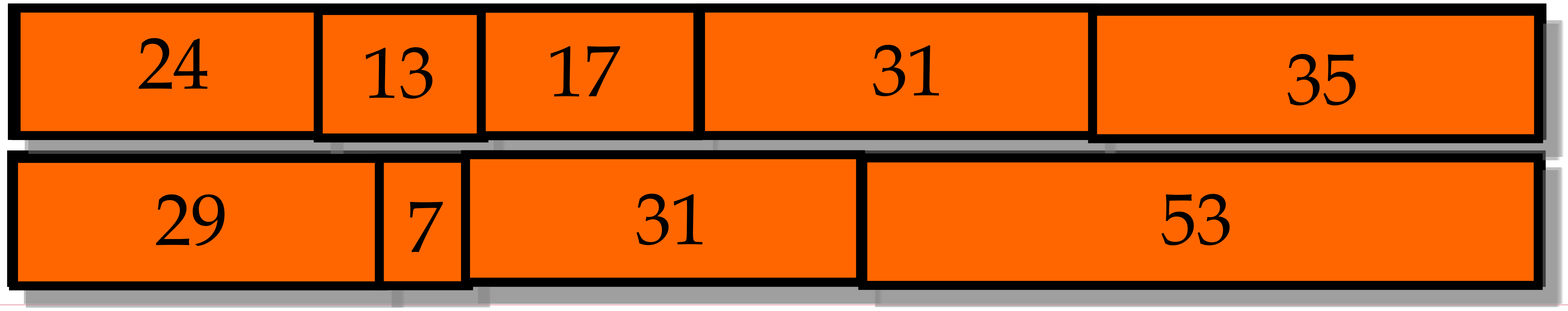
Ein Bild hilft



Ein Bild hilft



Ein Bild hilft

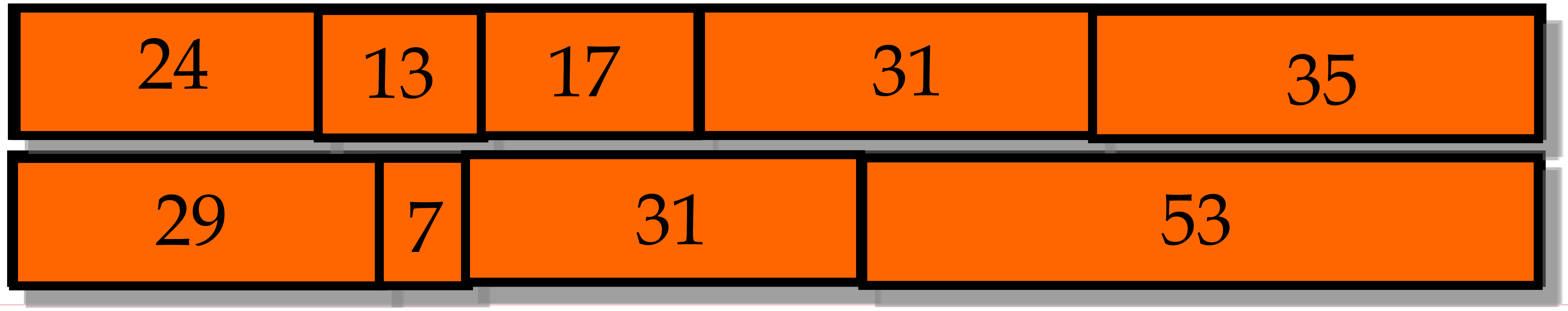


Ein Bild hilft

Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

Gesamtsumme: 240

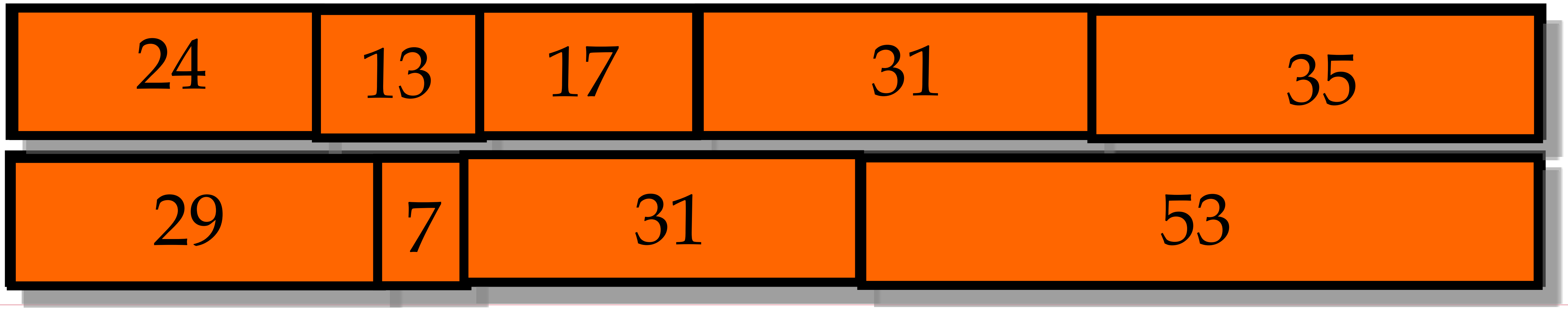


Ein Bild hilft

Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

Gesamtsumme: 240

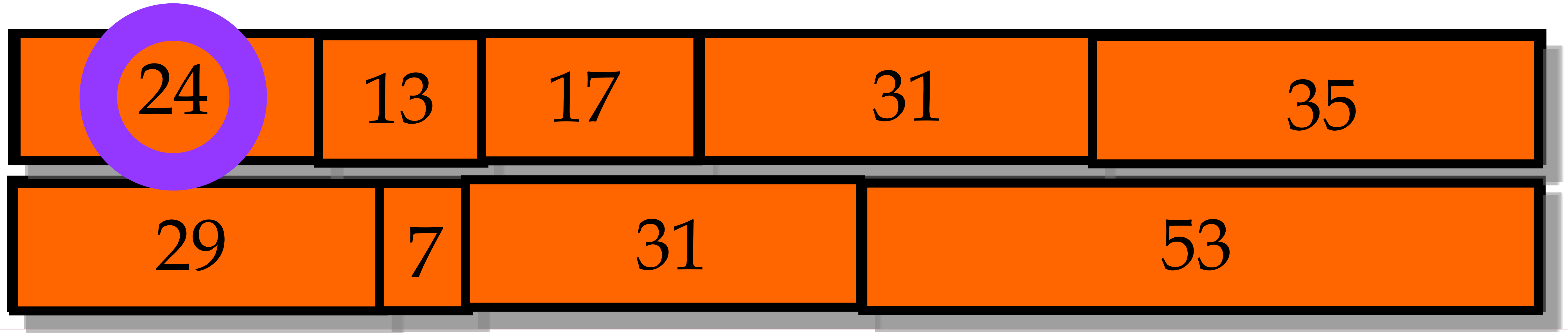


Ein Bild hilft

Beispiel 1.10.

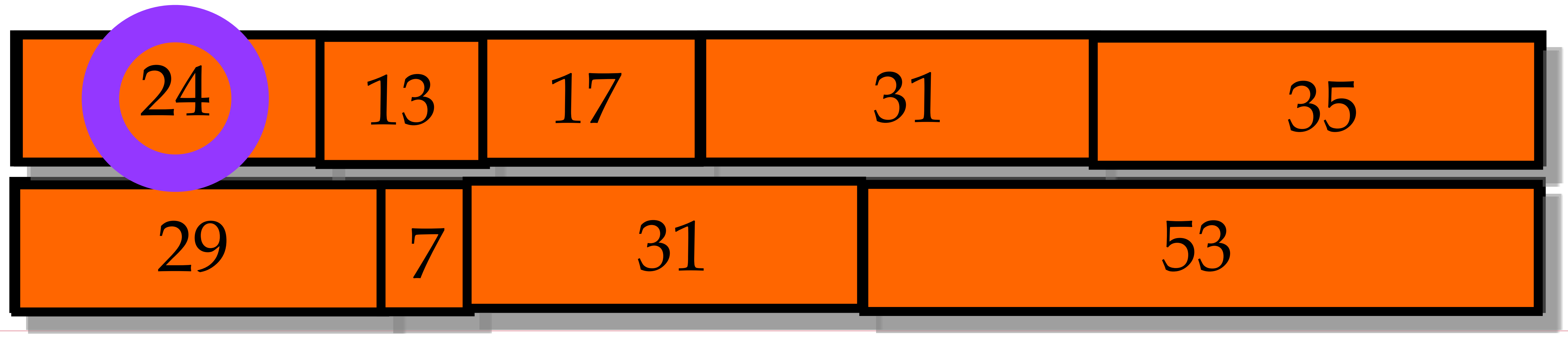
Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

Gesamtsumme: 240



Ein Bild hilft

Beispiel 1.10.
Partition für $\{z_1, ..., z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$
Gesamtsumme: 240

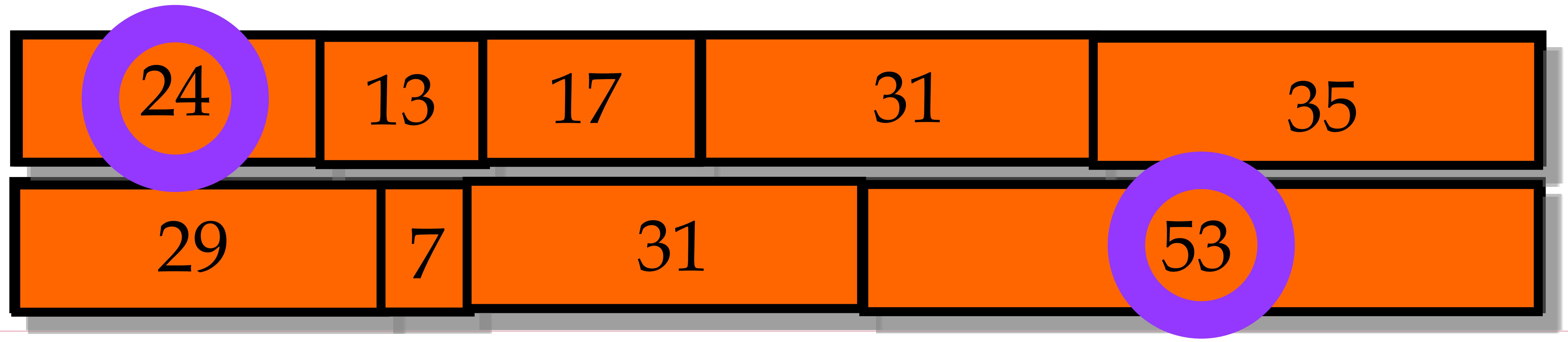


Ein Bild hilft

Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, \ldots, z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

Gesamtsumme: 240



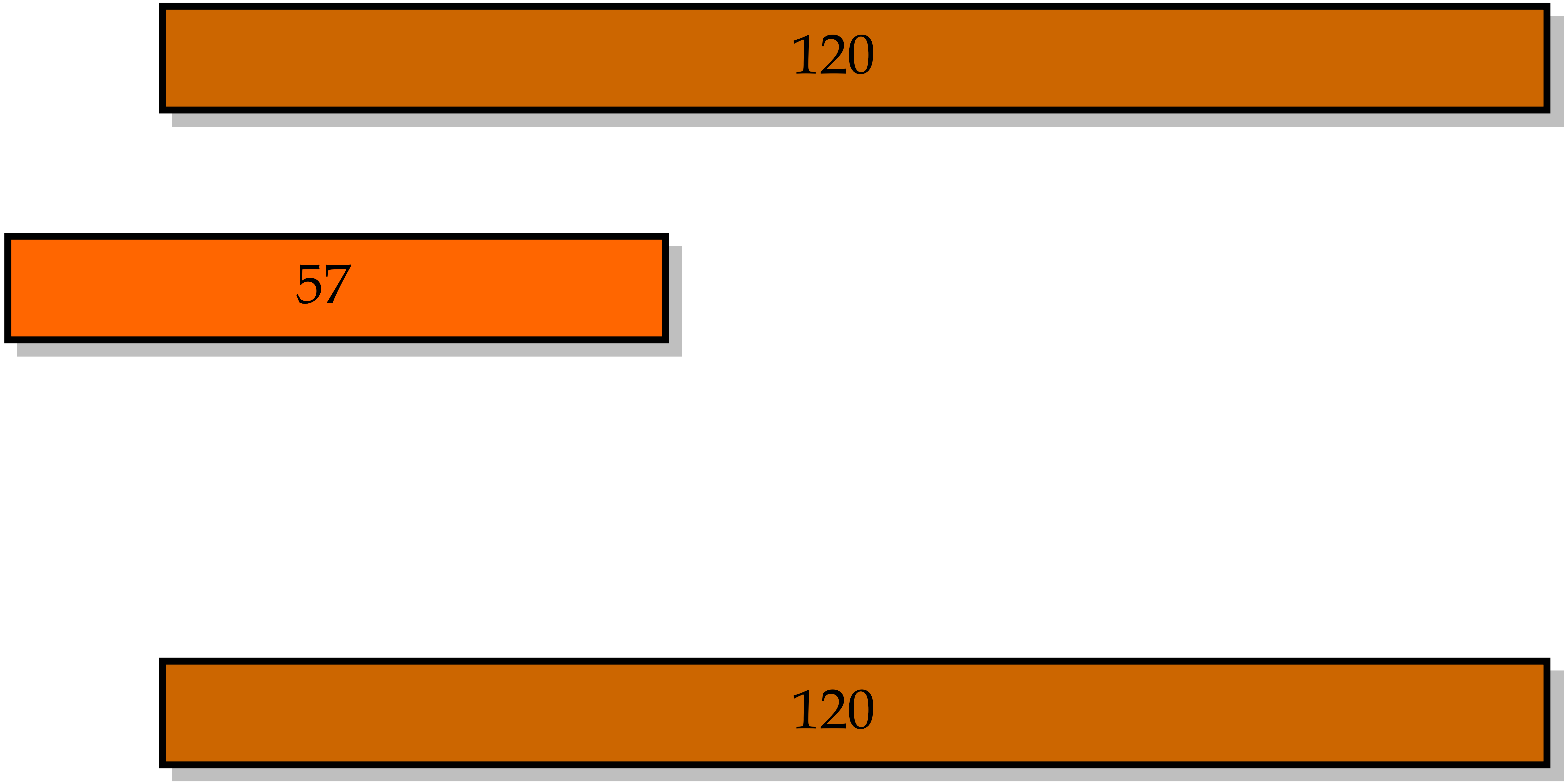
Keine Lösung?!

Keine Lösung?!

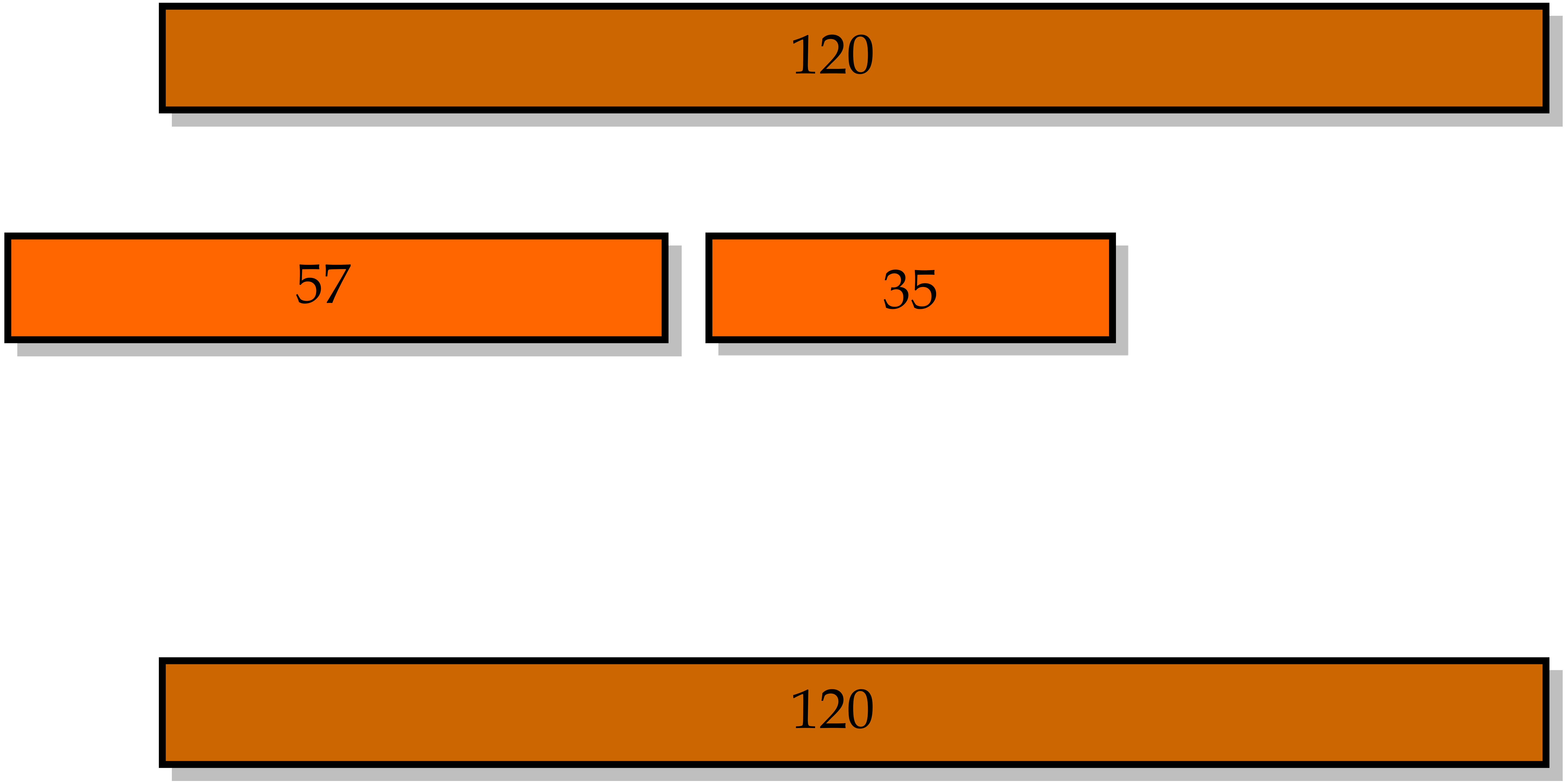
120

120

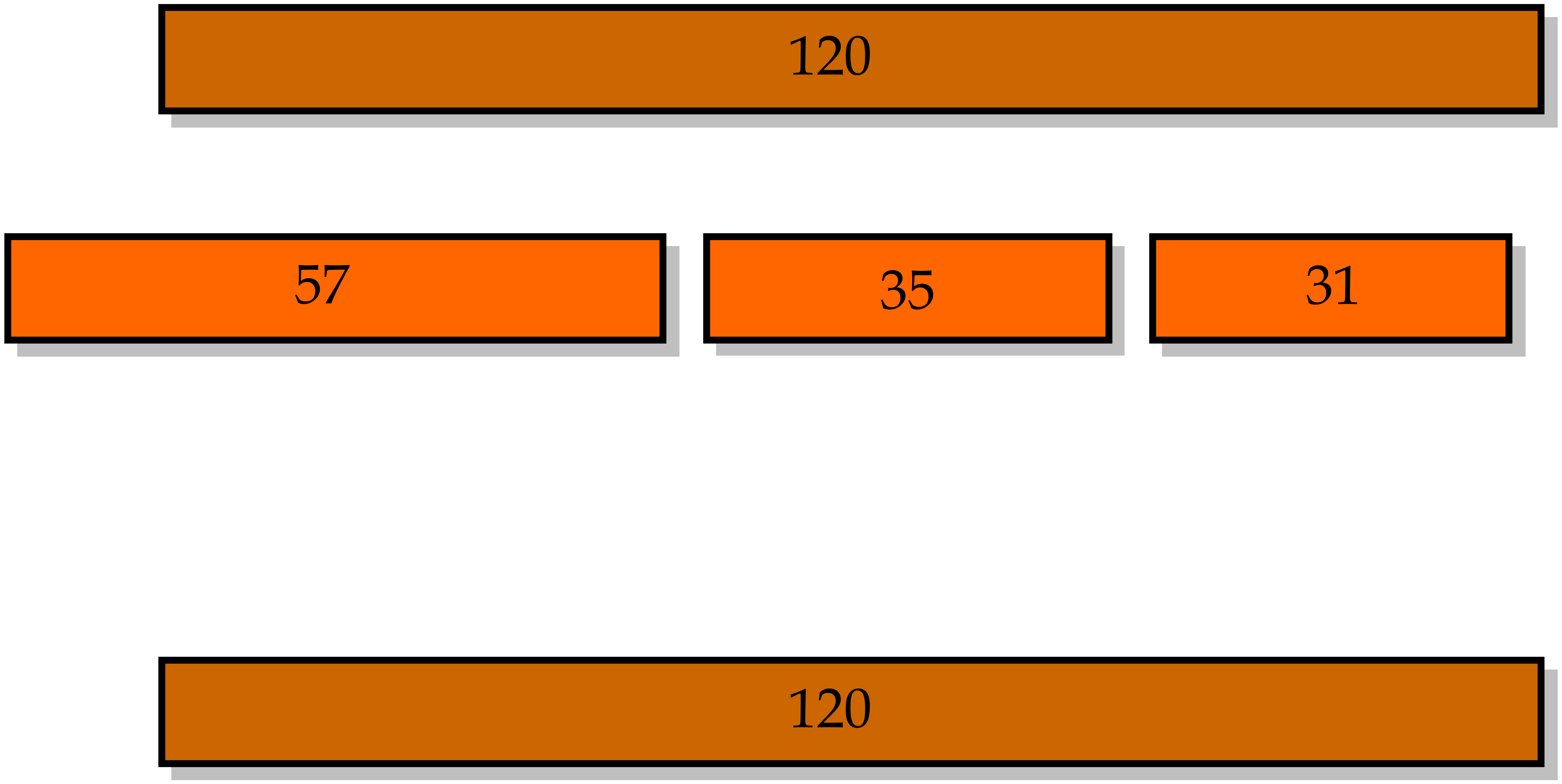
Keine Lösung?!



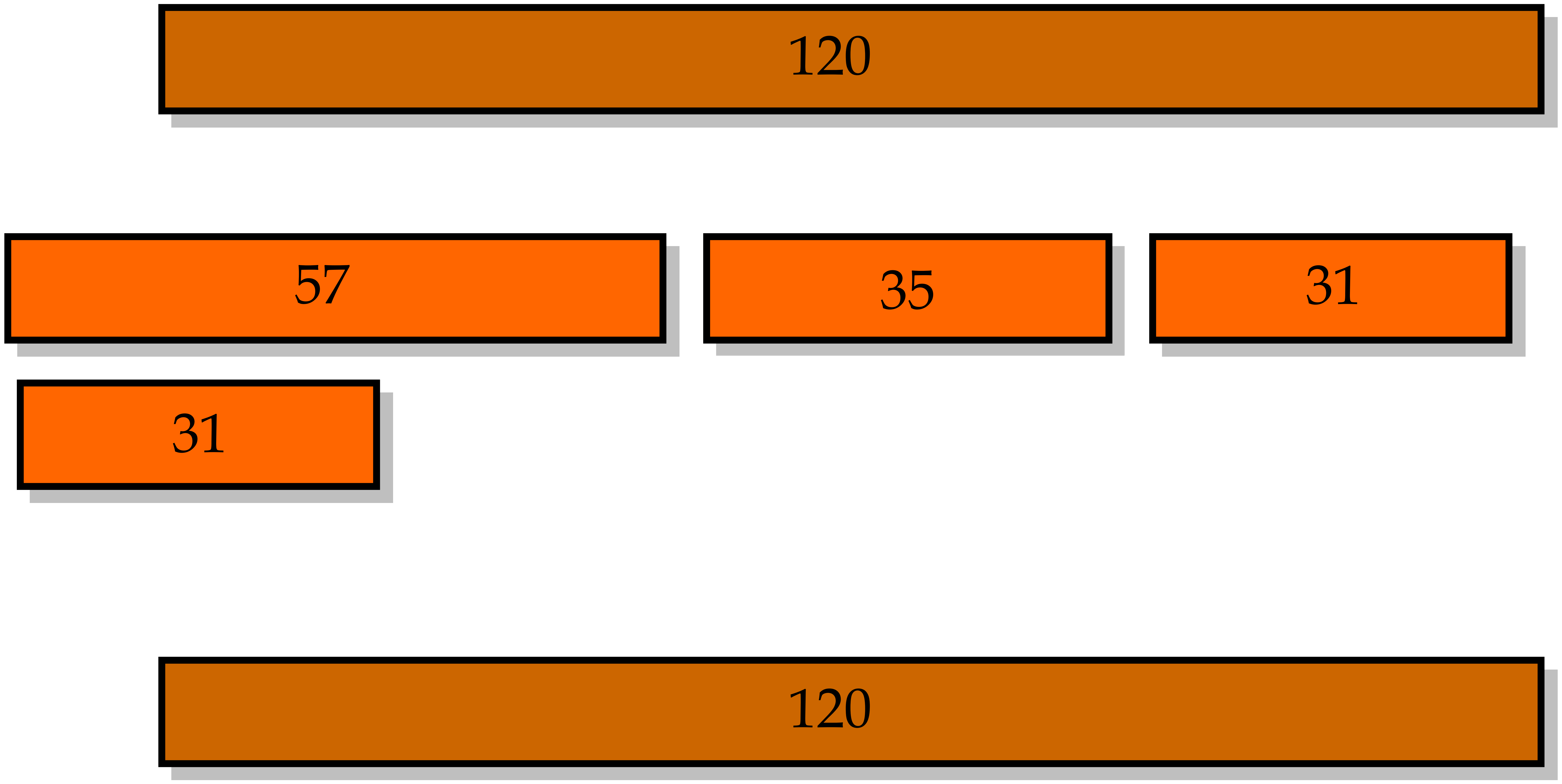
Keine Lösung?!



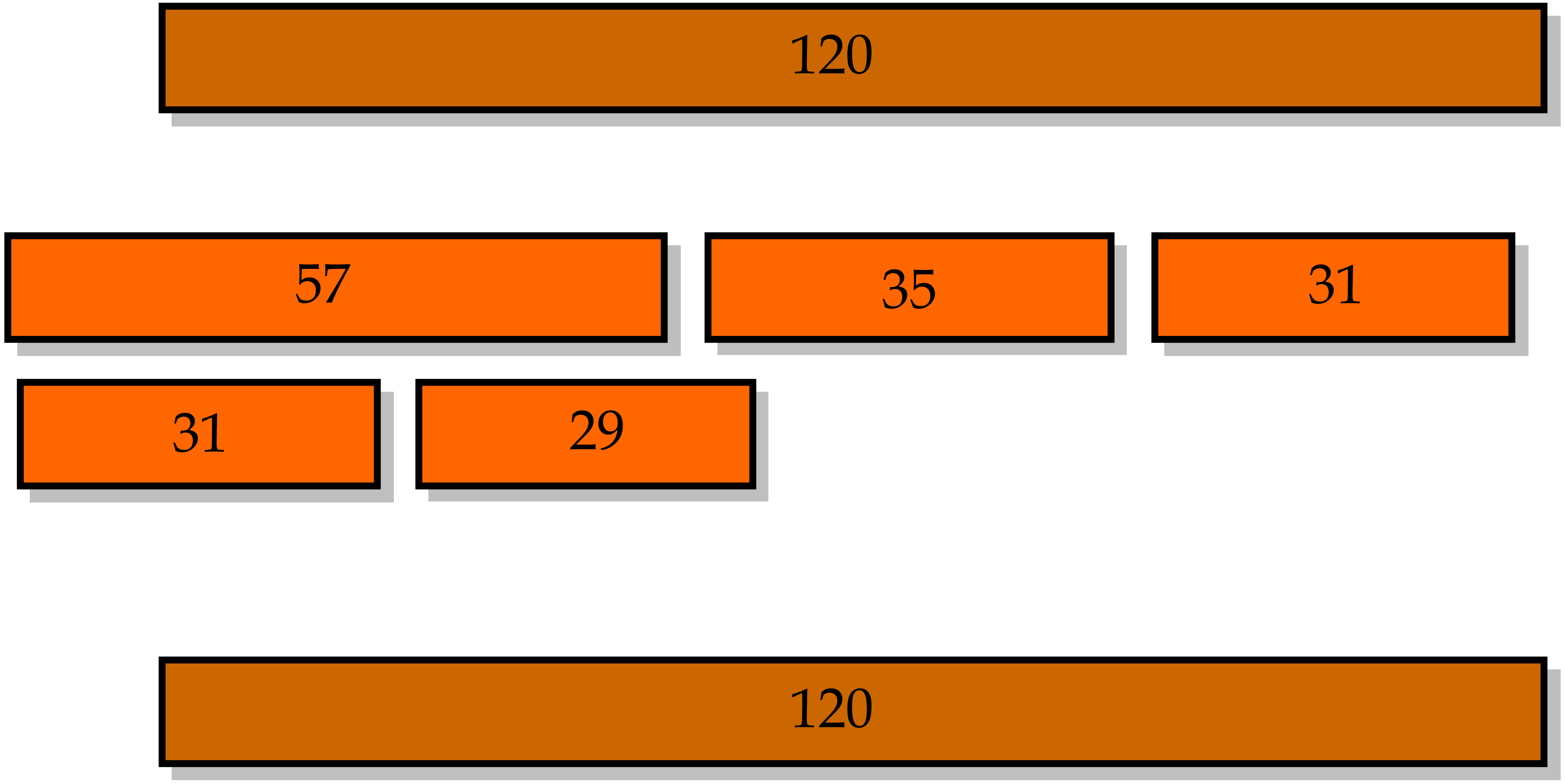
Keine Lösung?!



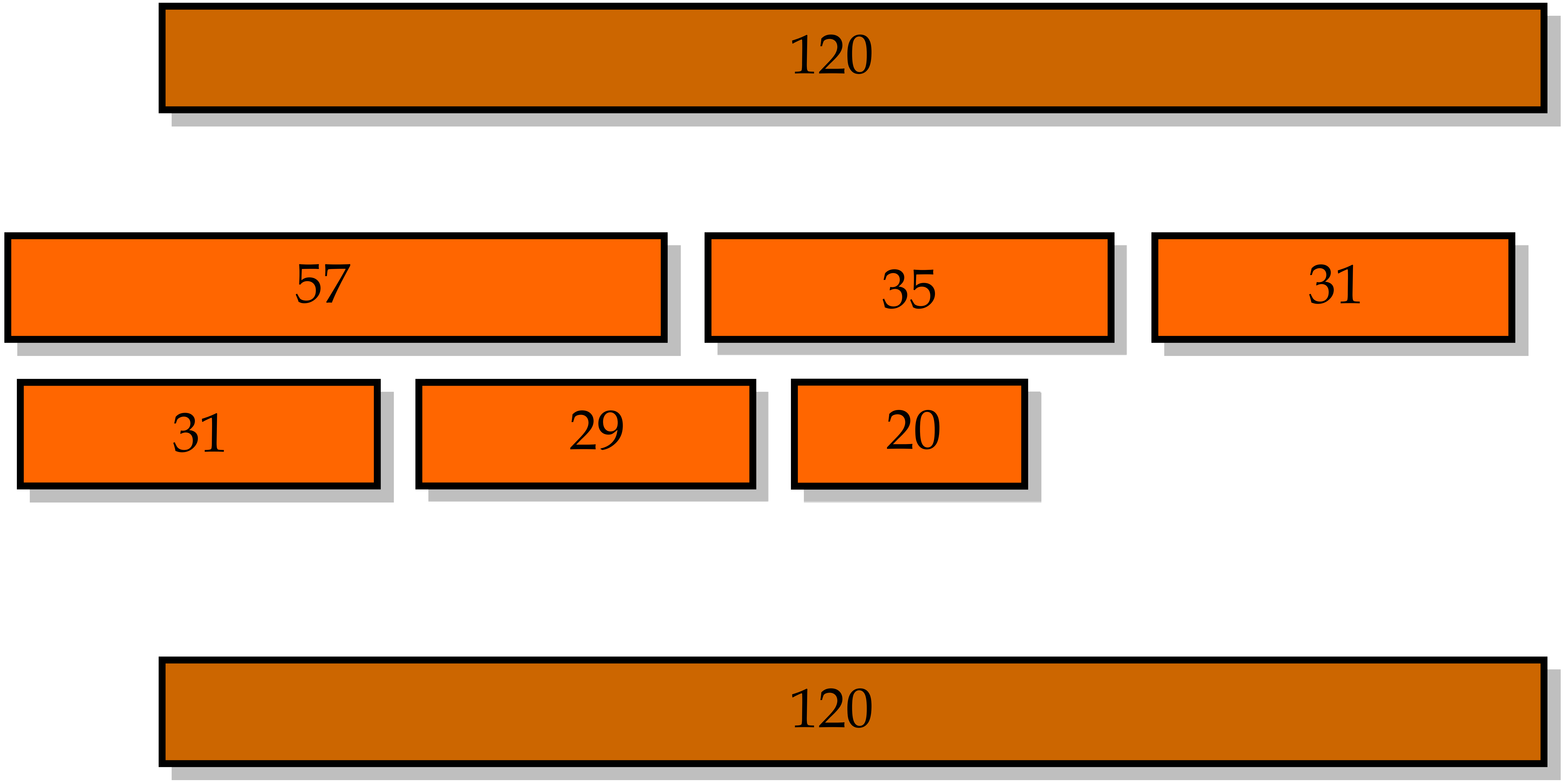
Keine Lösung?!



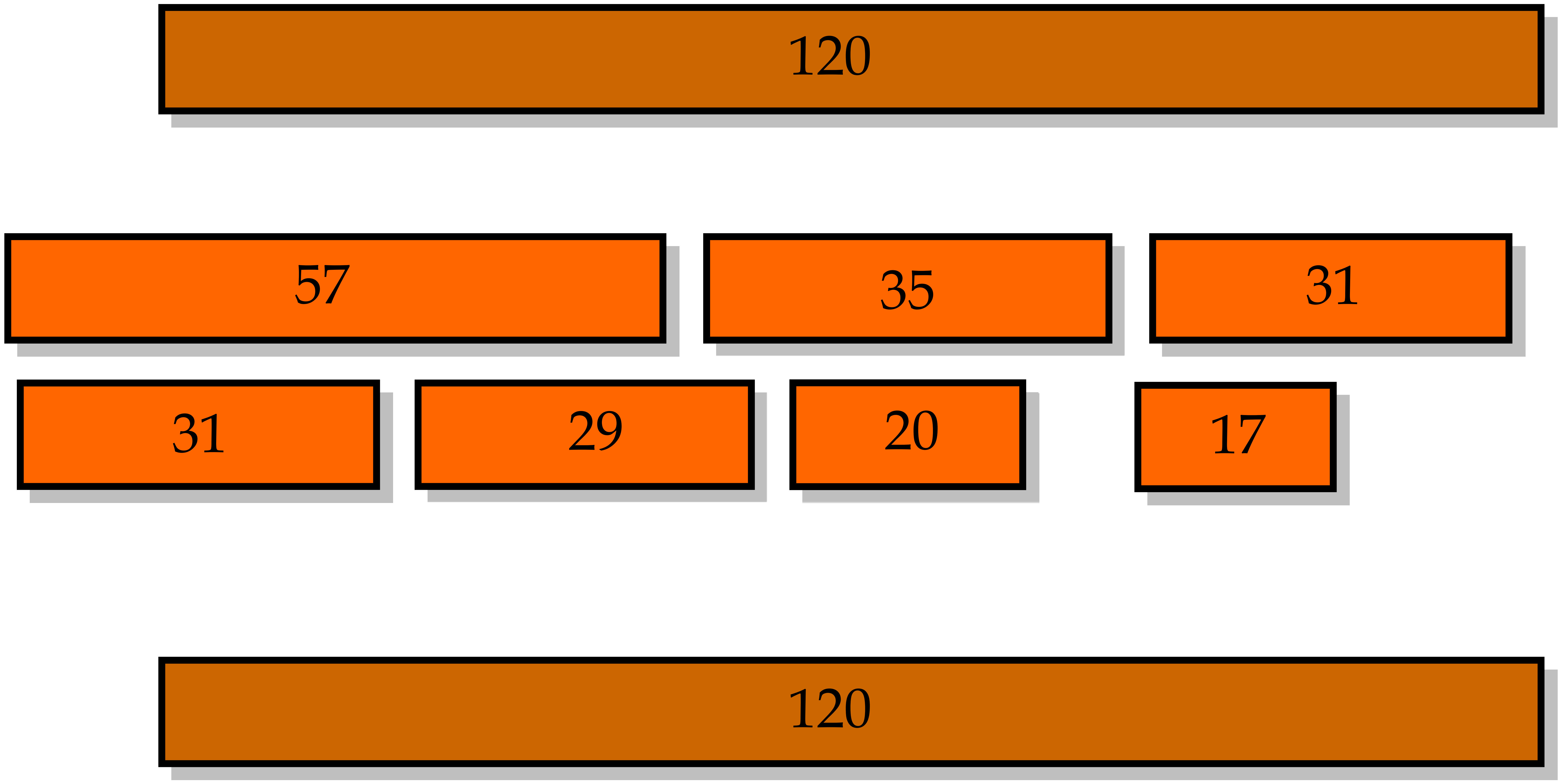
Keine Lösung?!



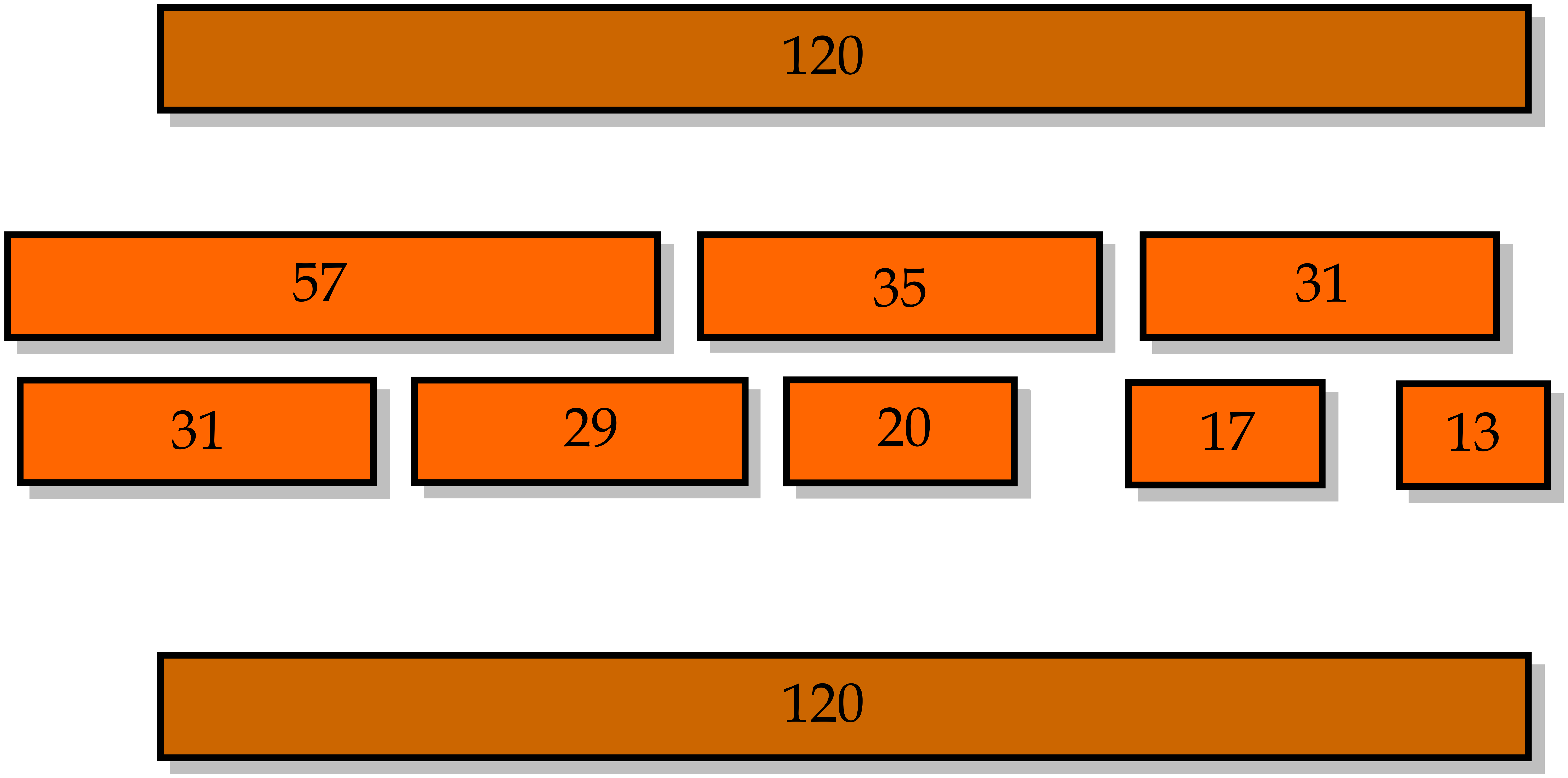
Keine Lösung?!



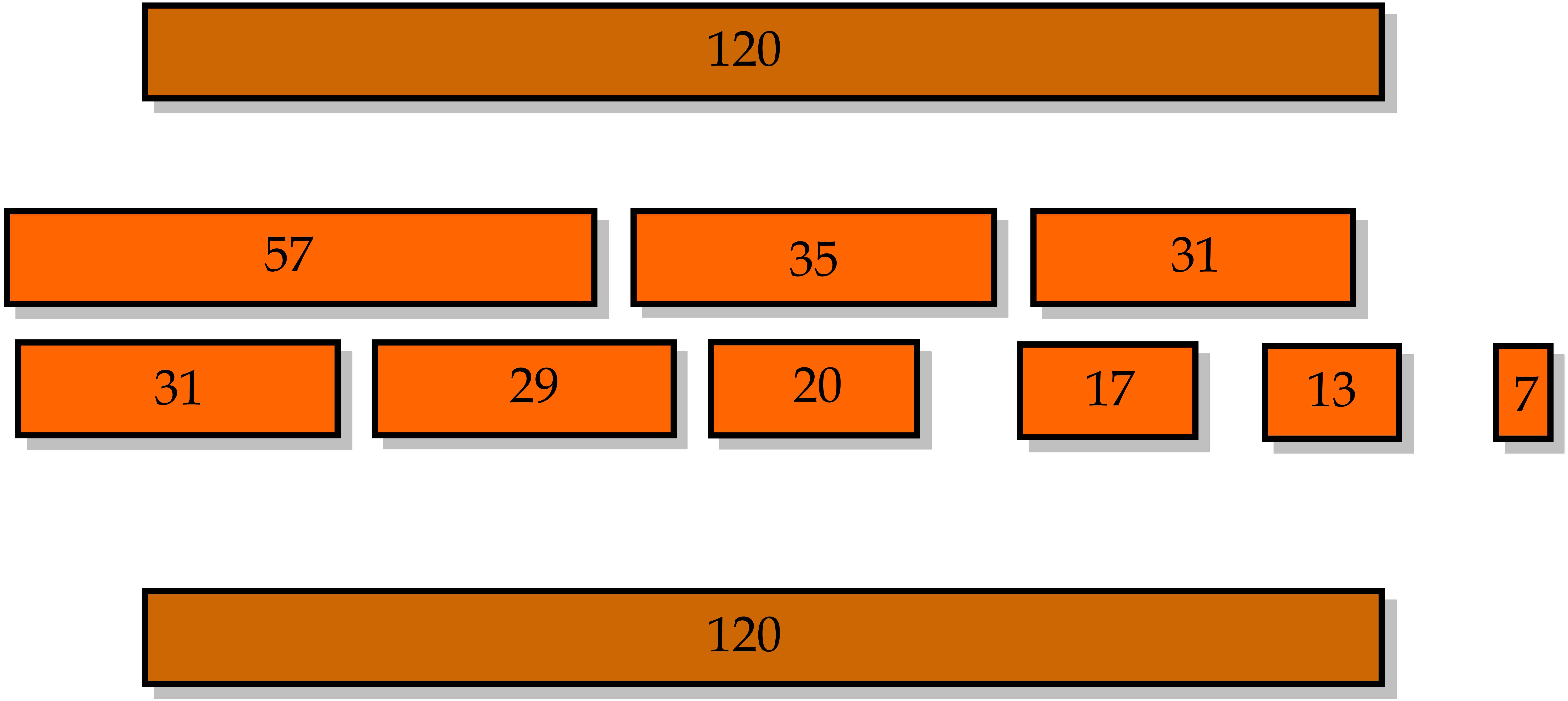
Keine Lösung?!



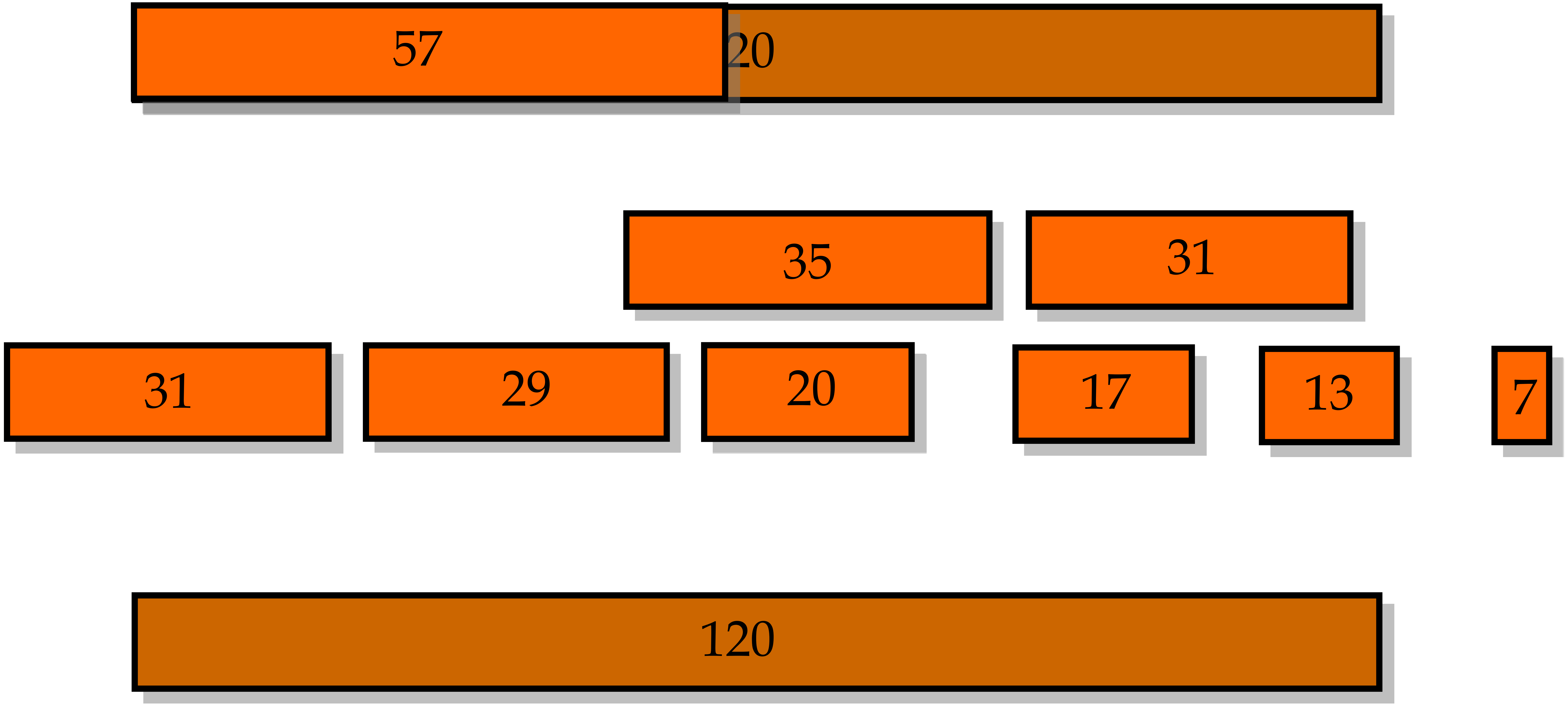
Keine Lösung?!



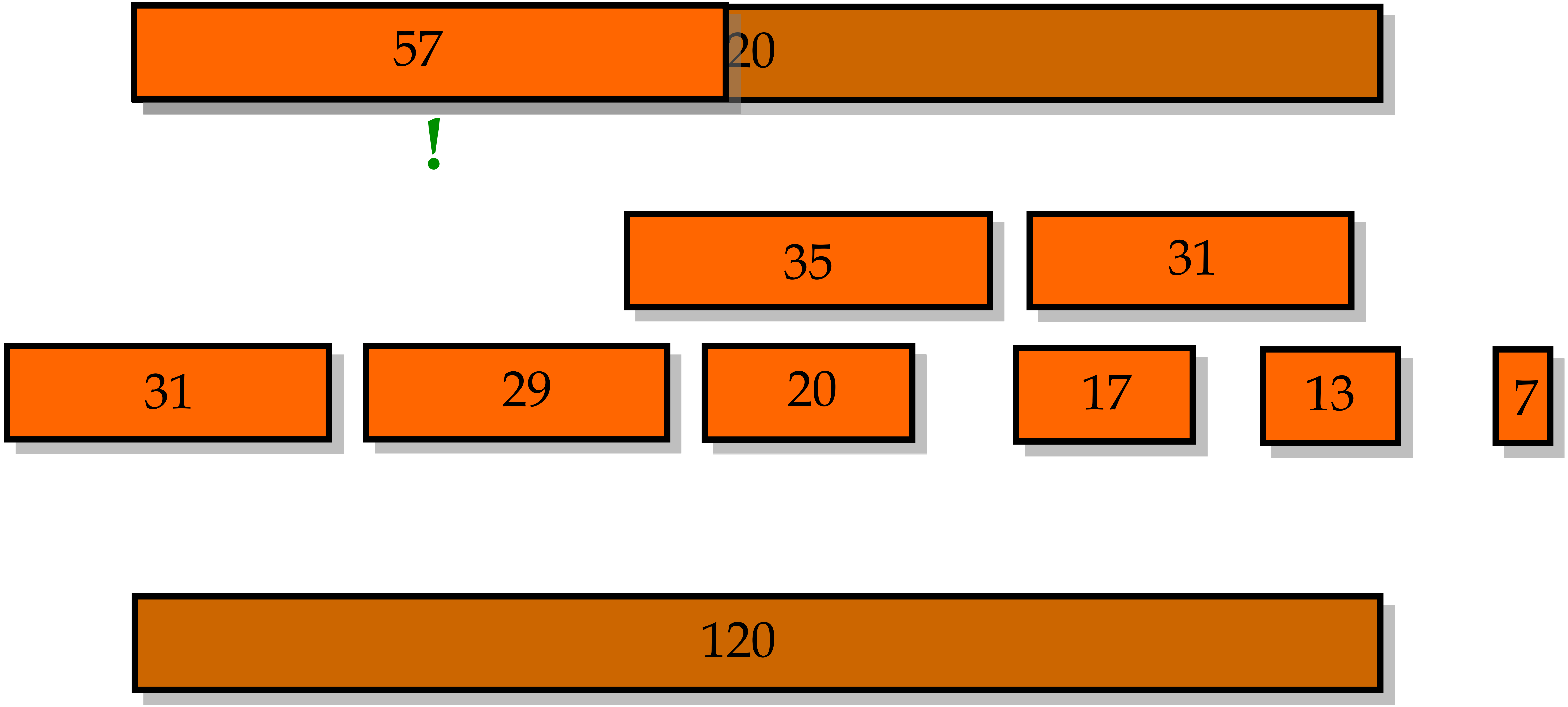
Keine Lösung?!



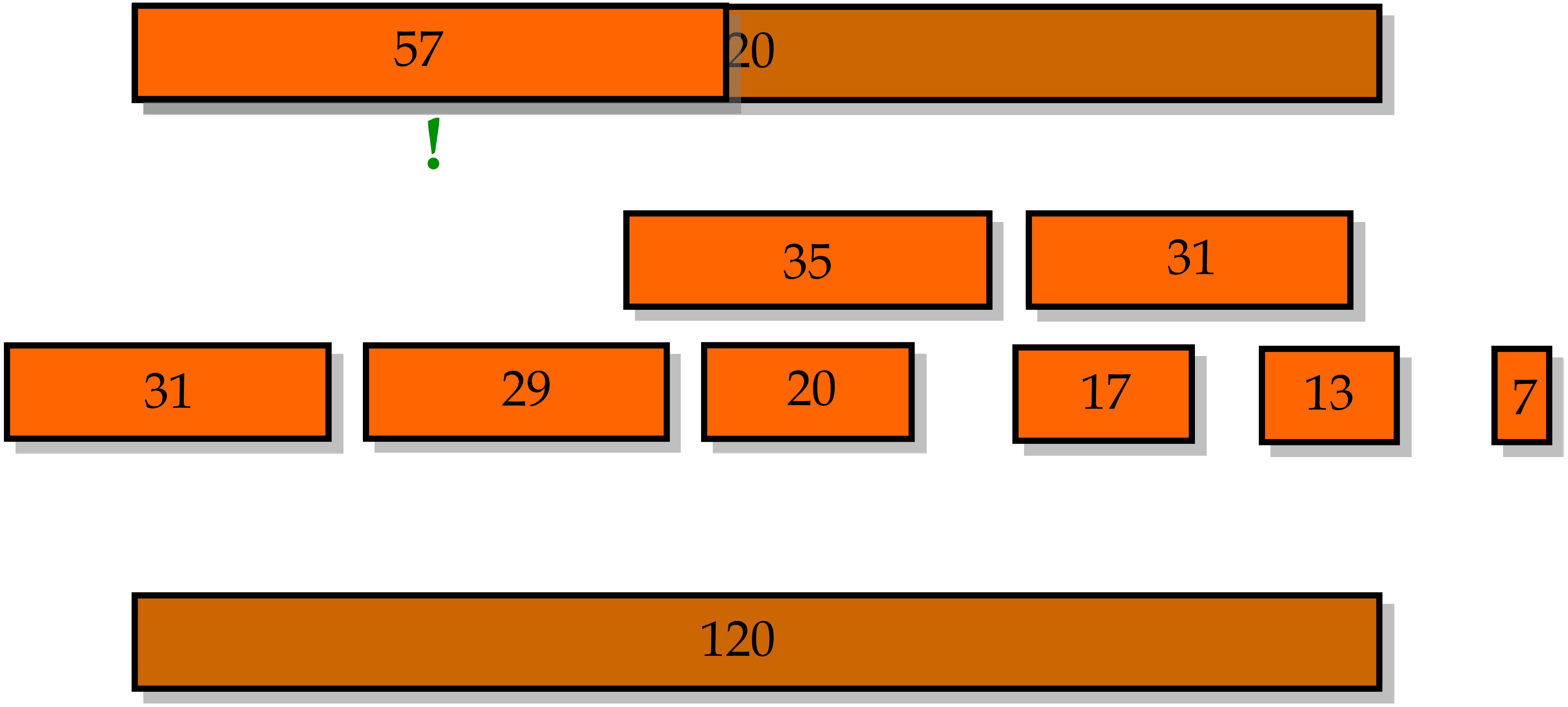
Keine Lösung?!



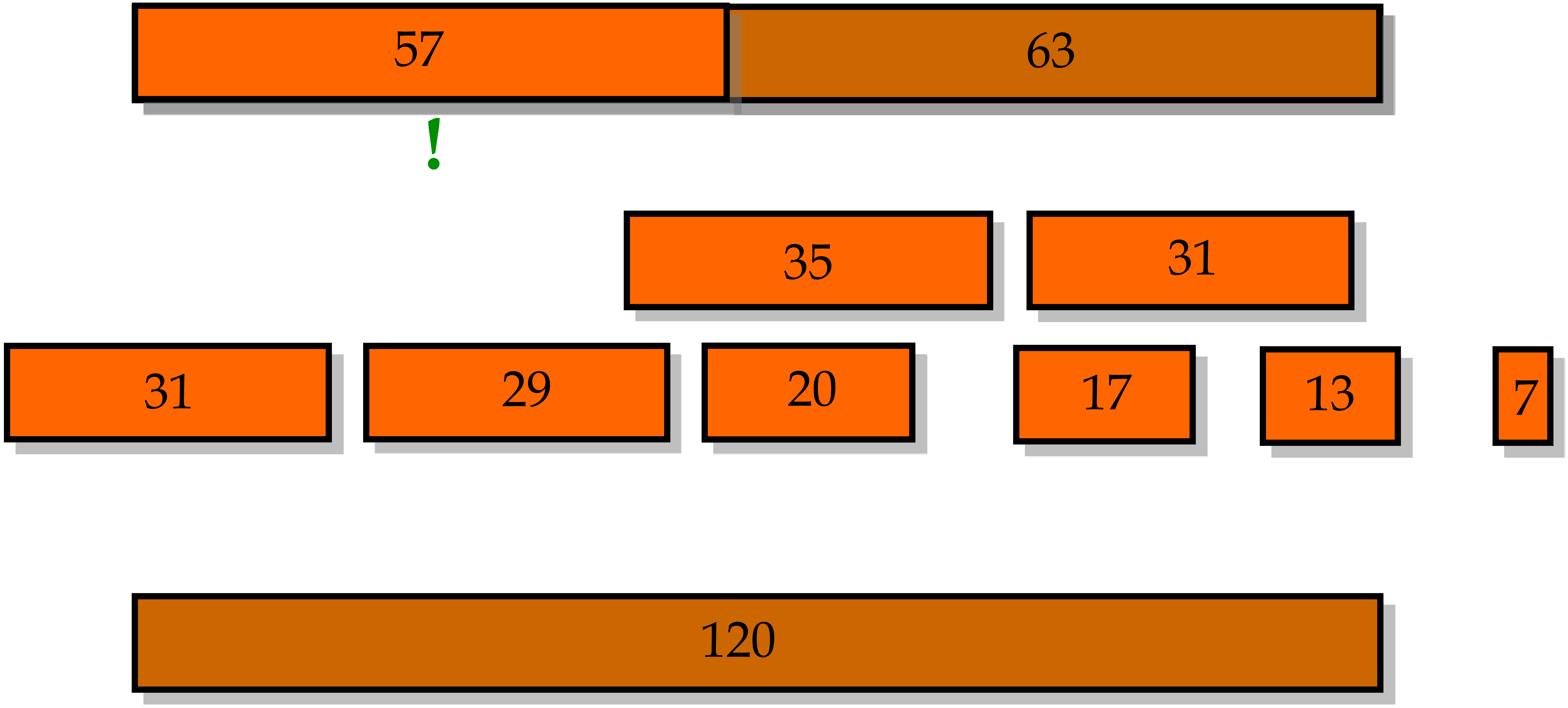
Keine Lösung?!



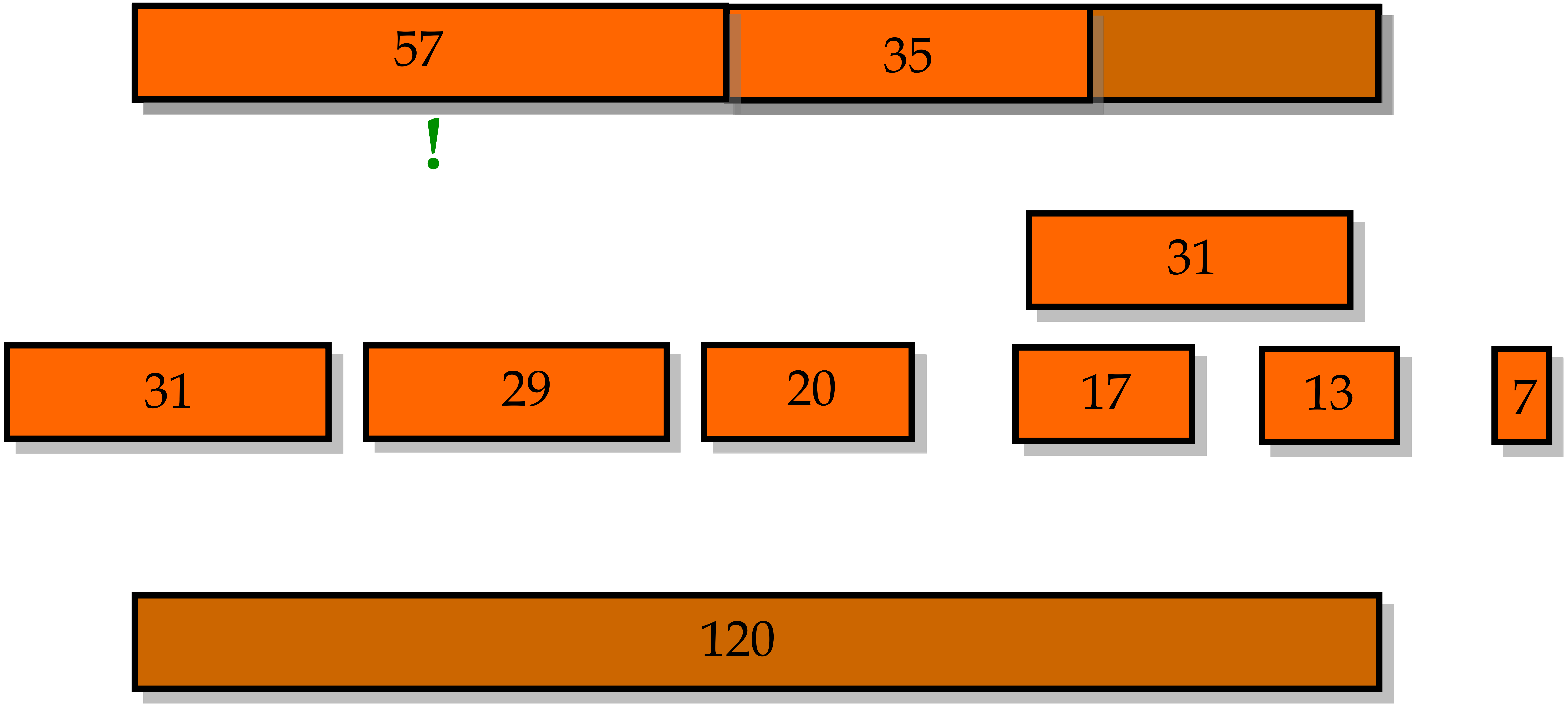
Keine Lösung?!



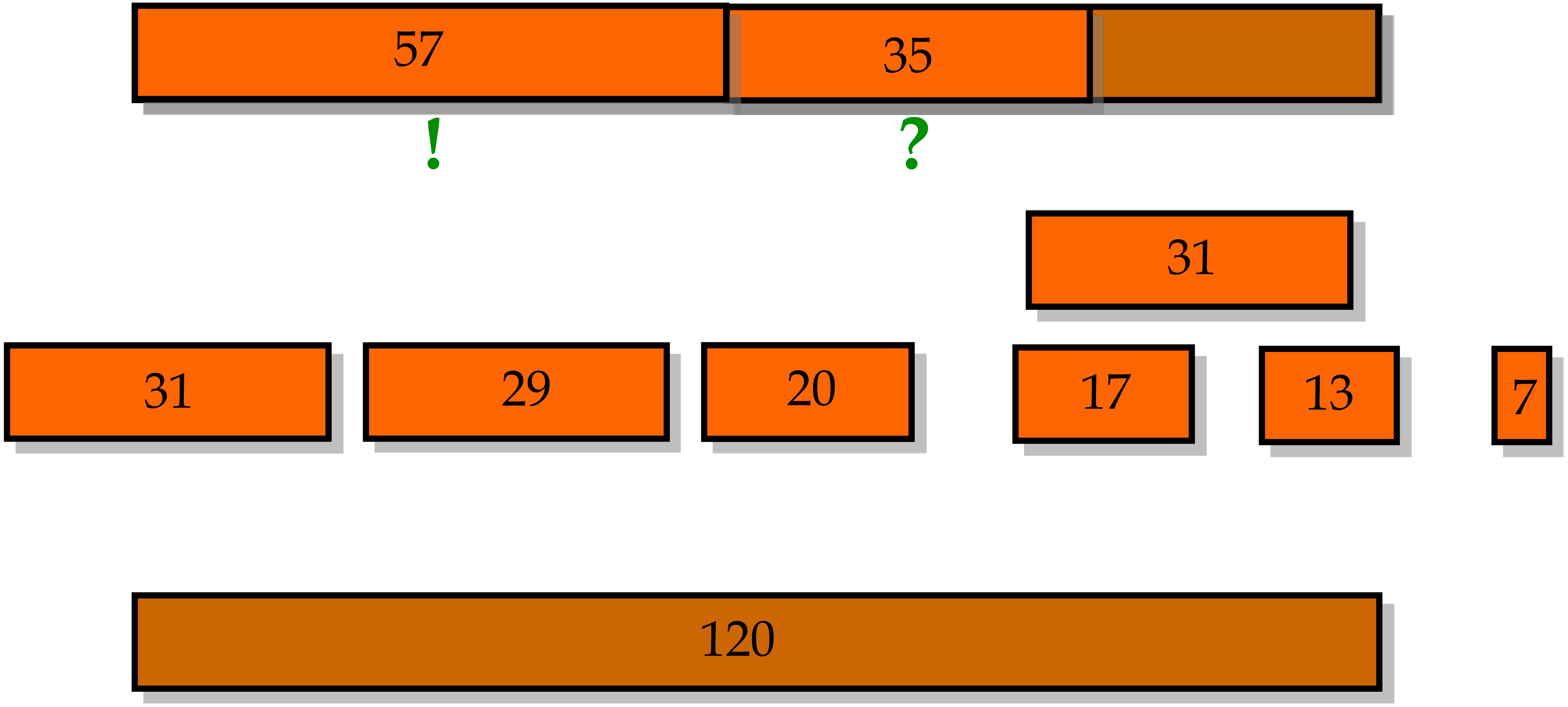
Keine Lösung?!



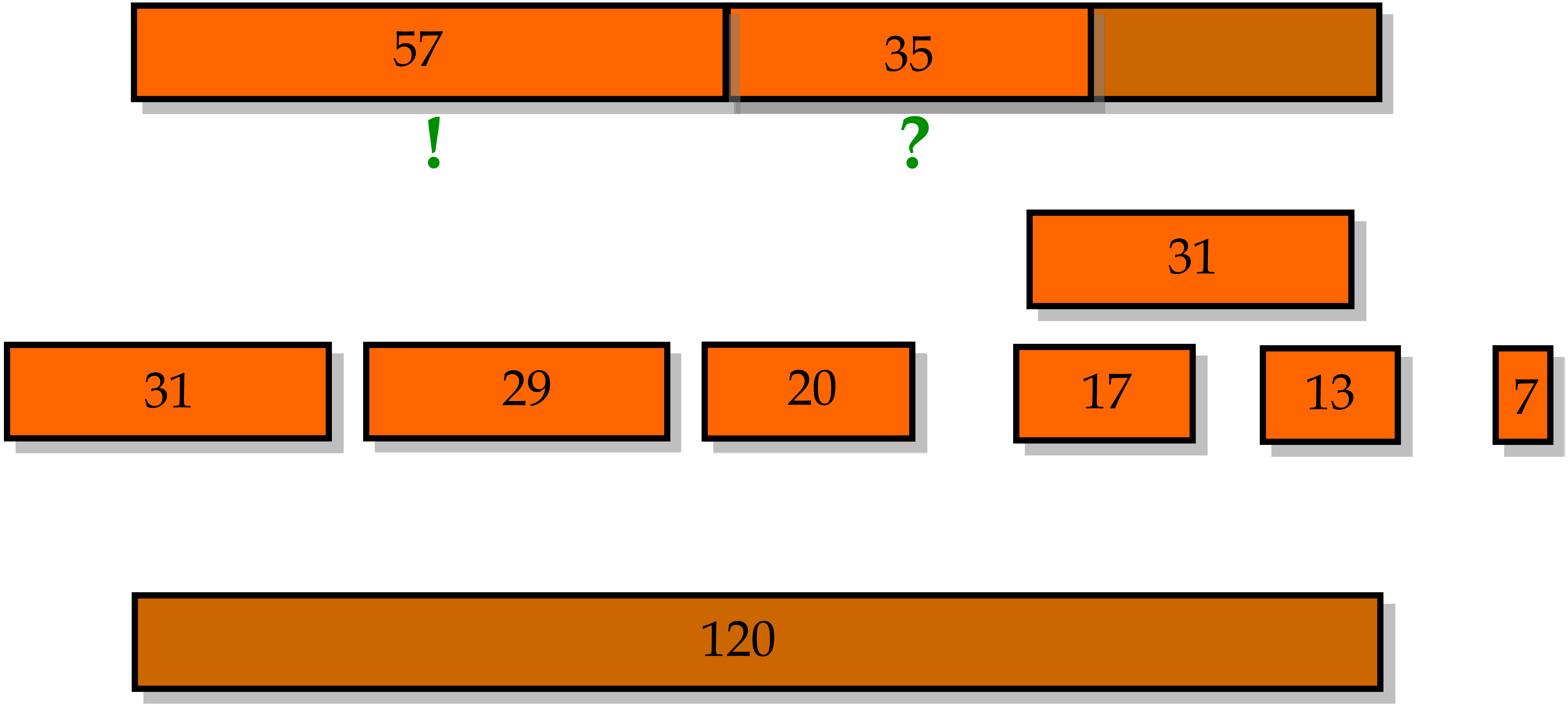
Keine Lösung?!



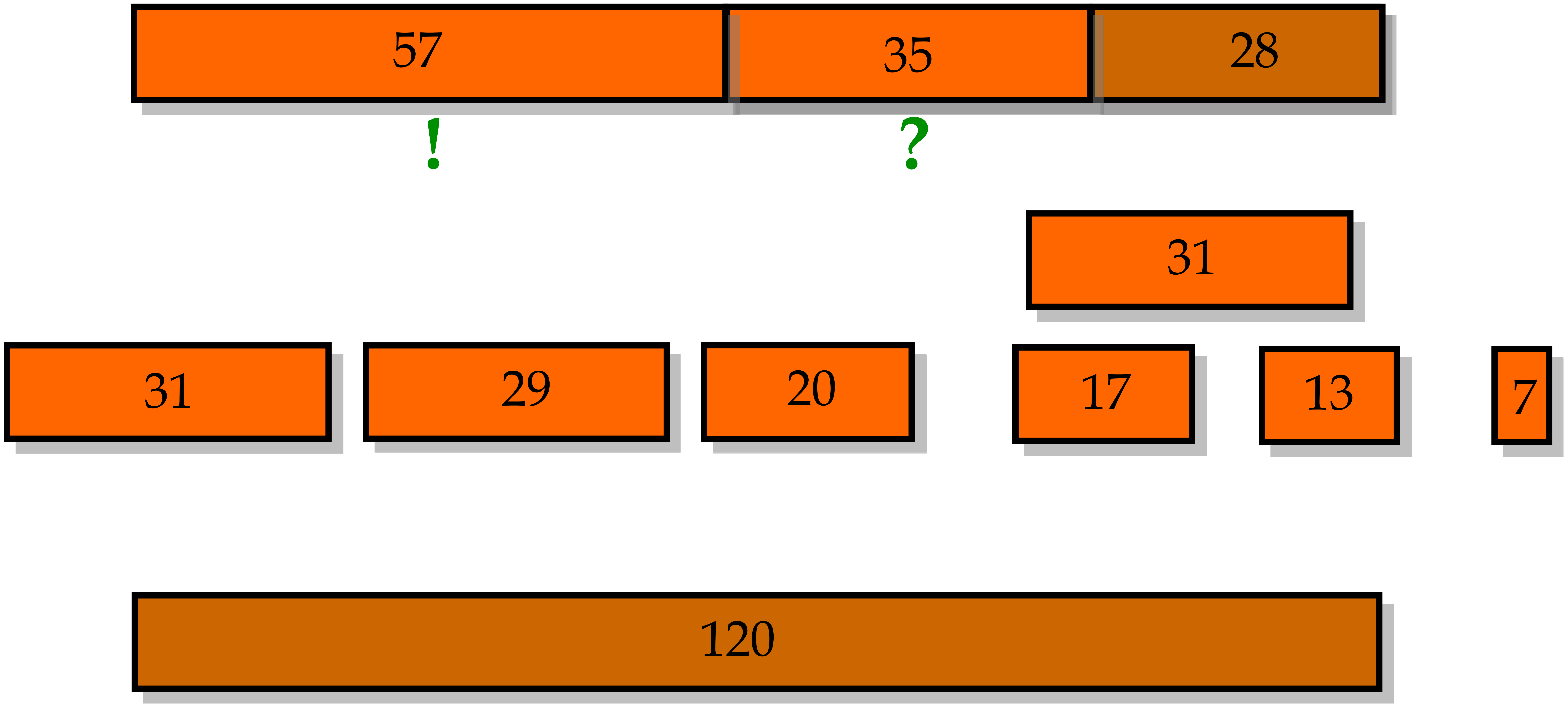
Keine Lösung?!



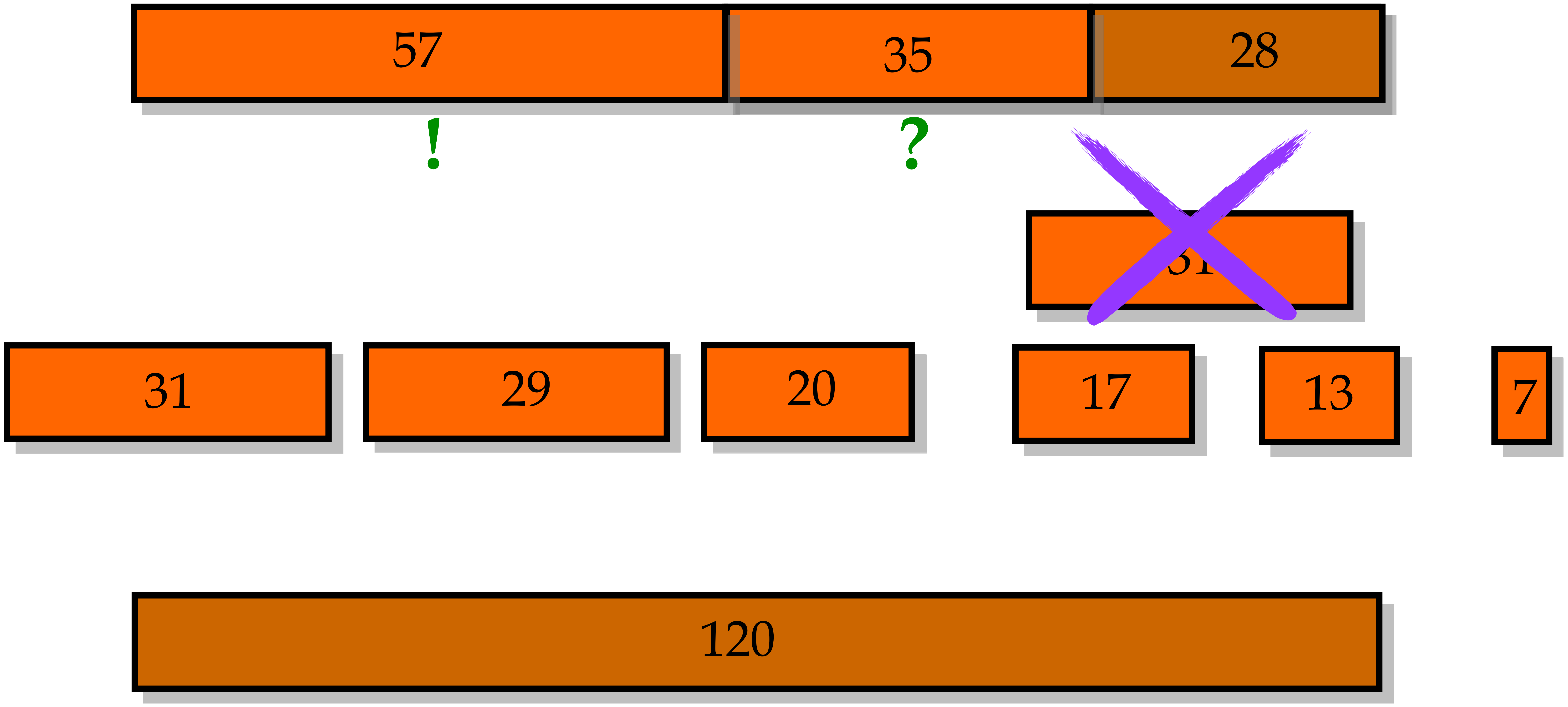
Keine Lösung?!



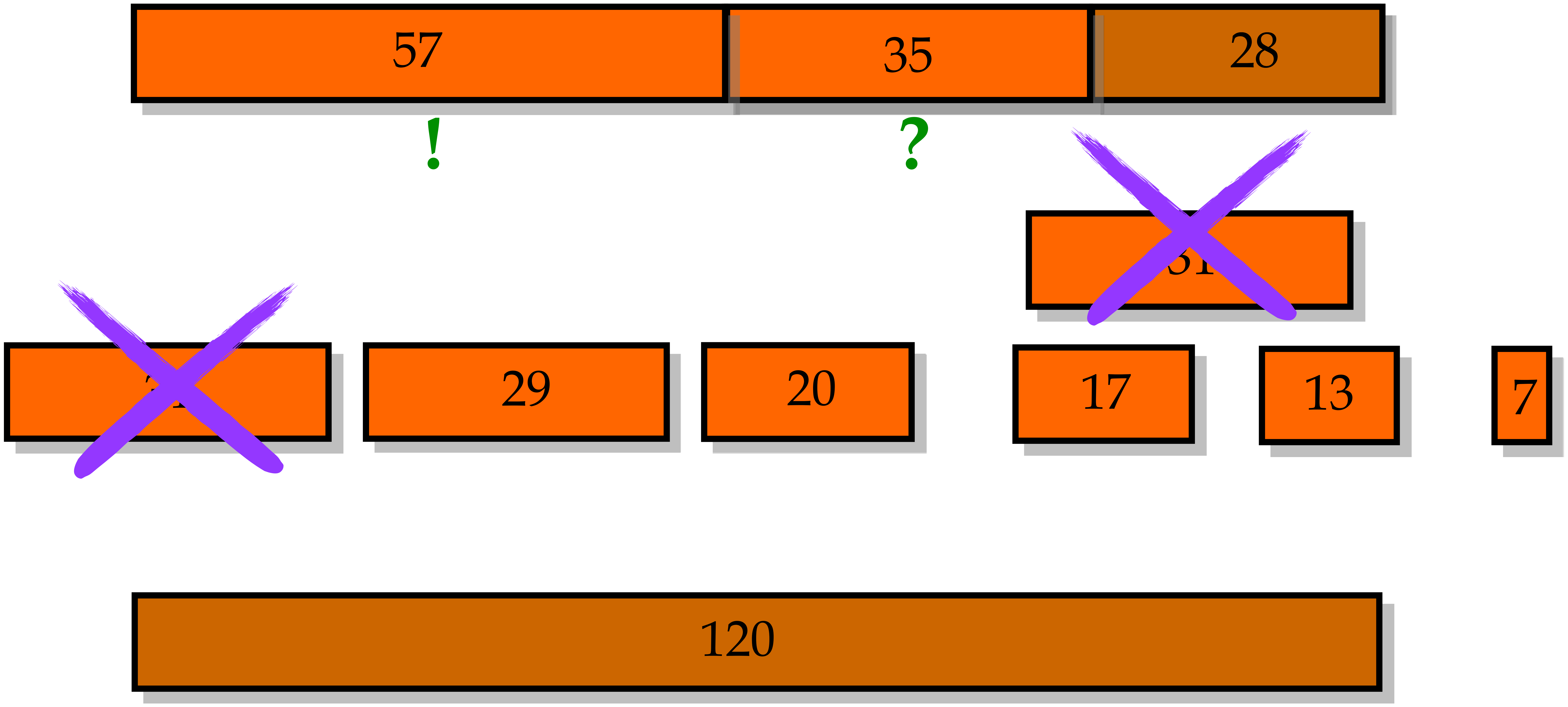
Keine Lösung?!



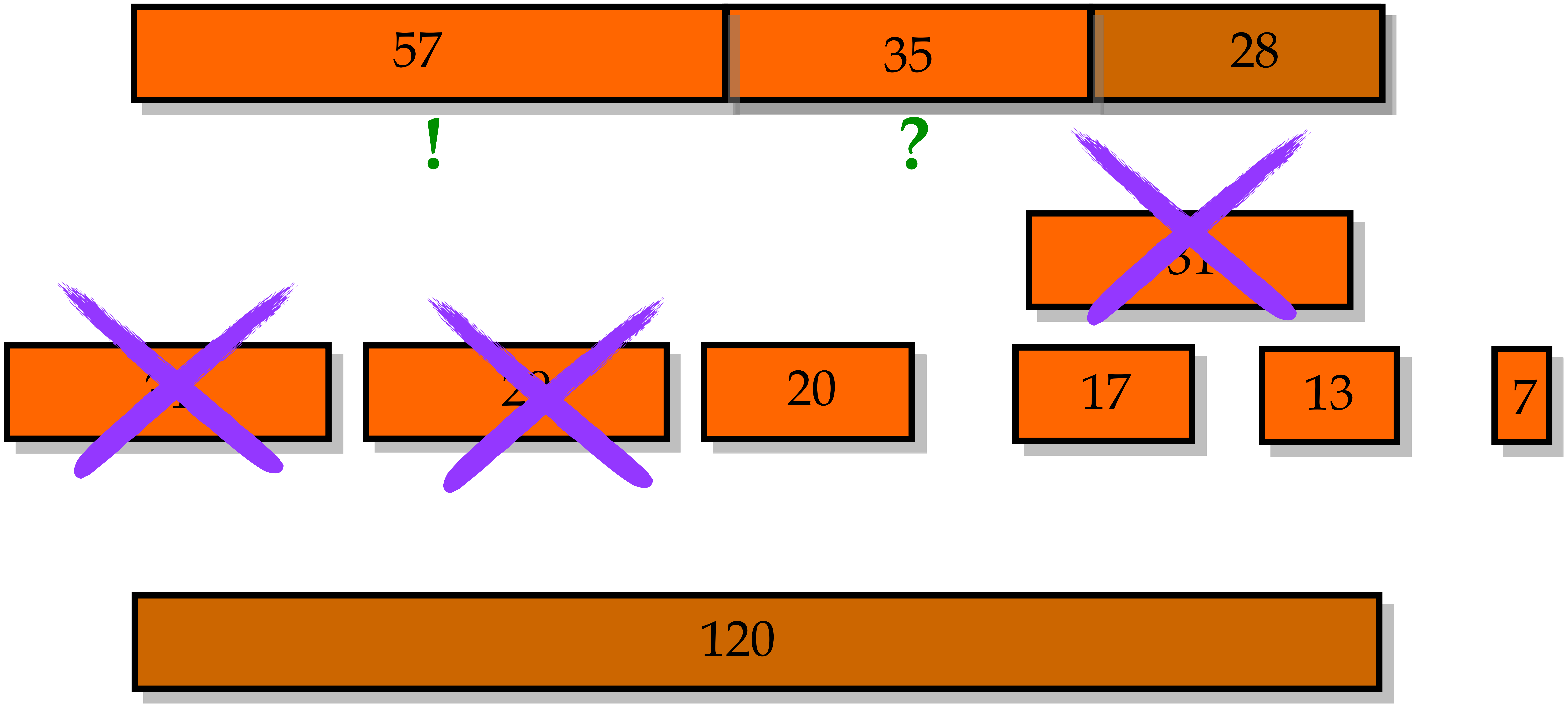
Keine Lösung?!



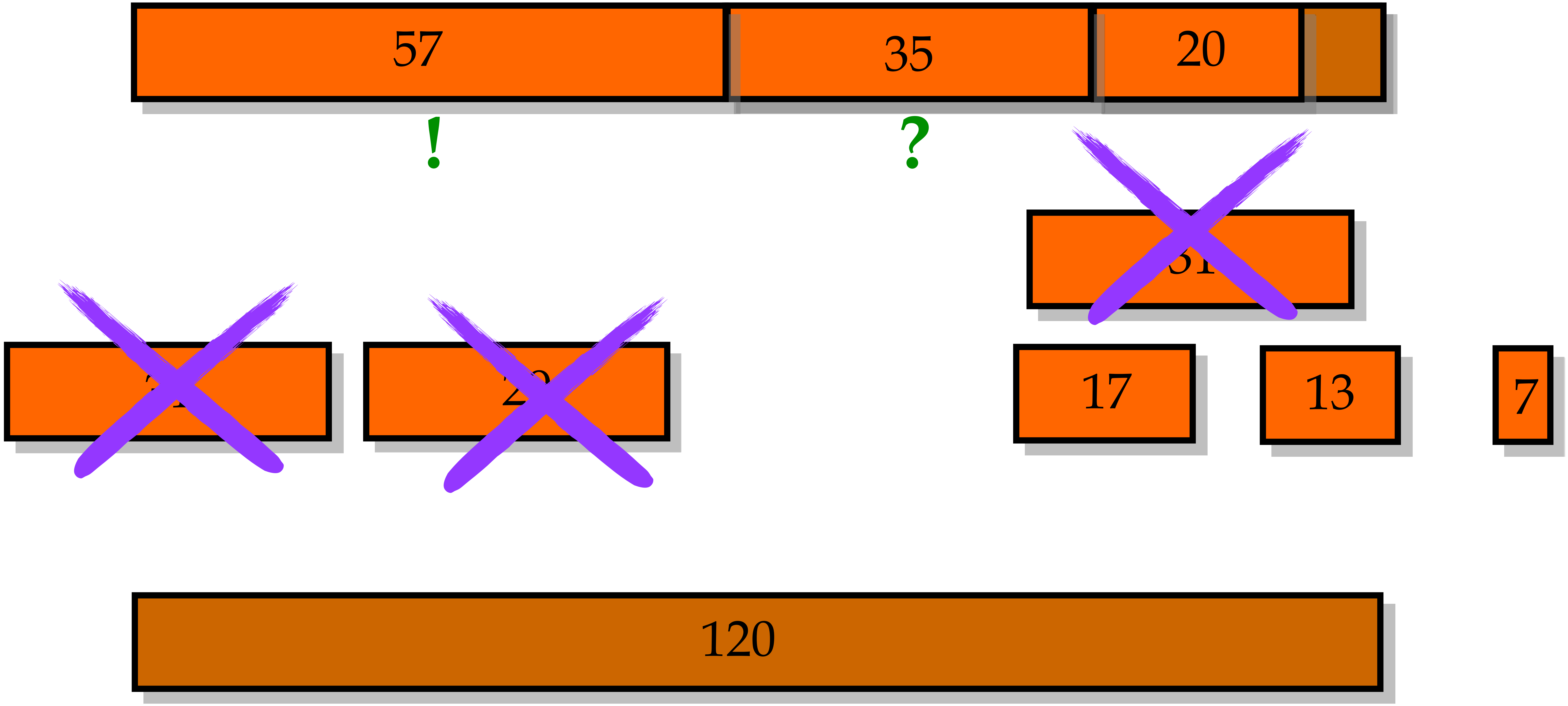
Keine Lösung?!



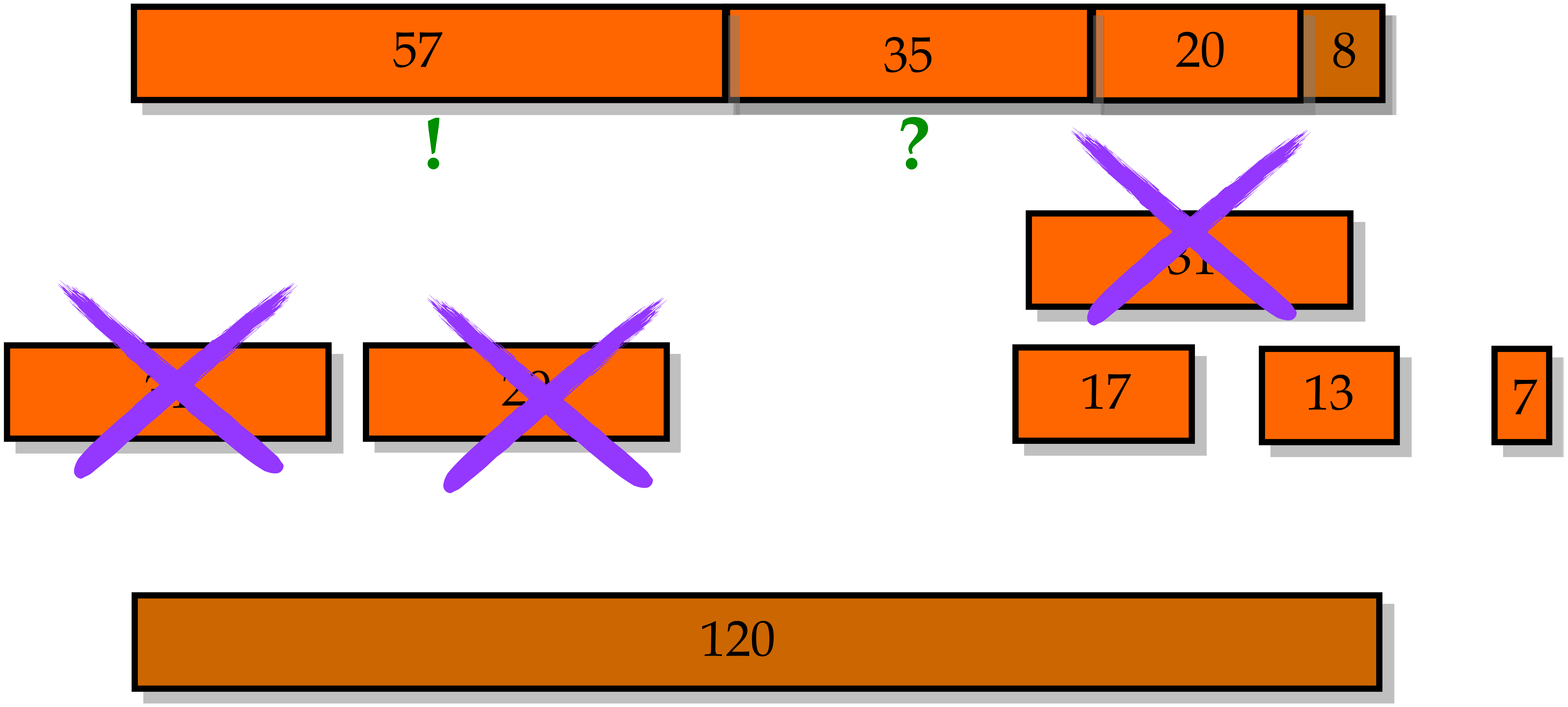
Keine Lösung?!



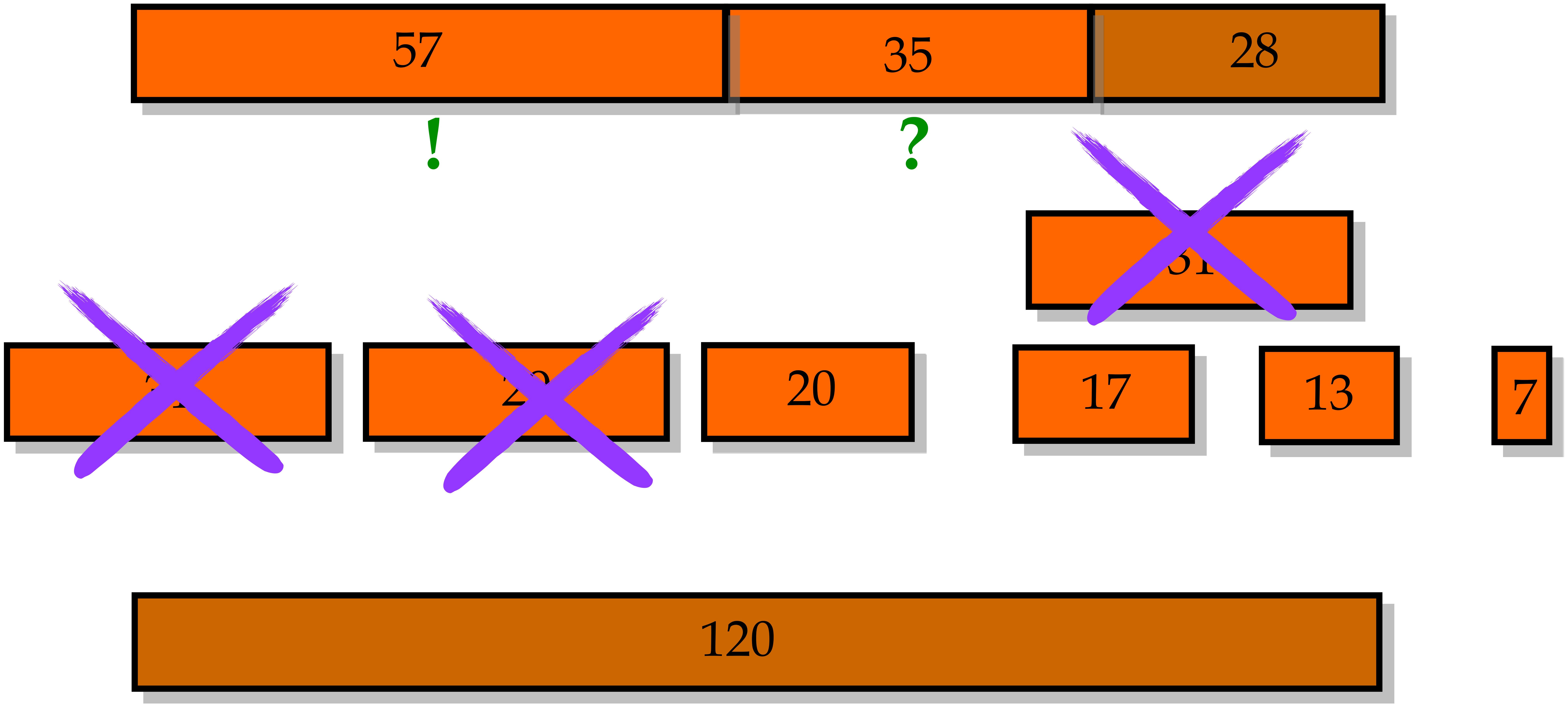
Keine Lösung?!



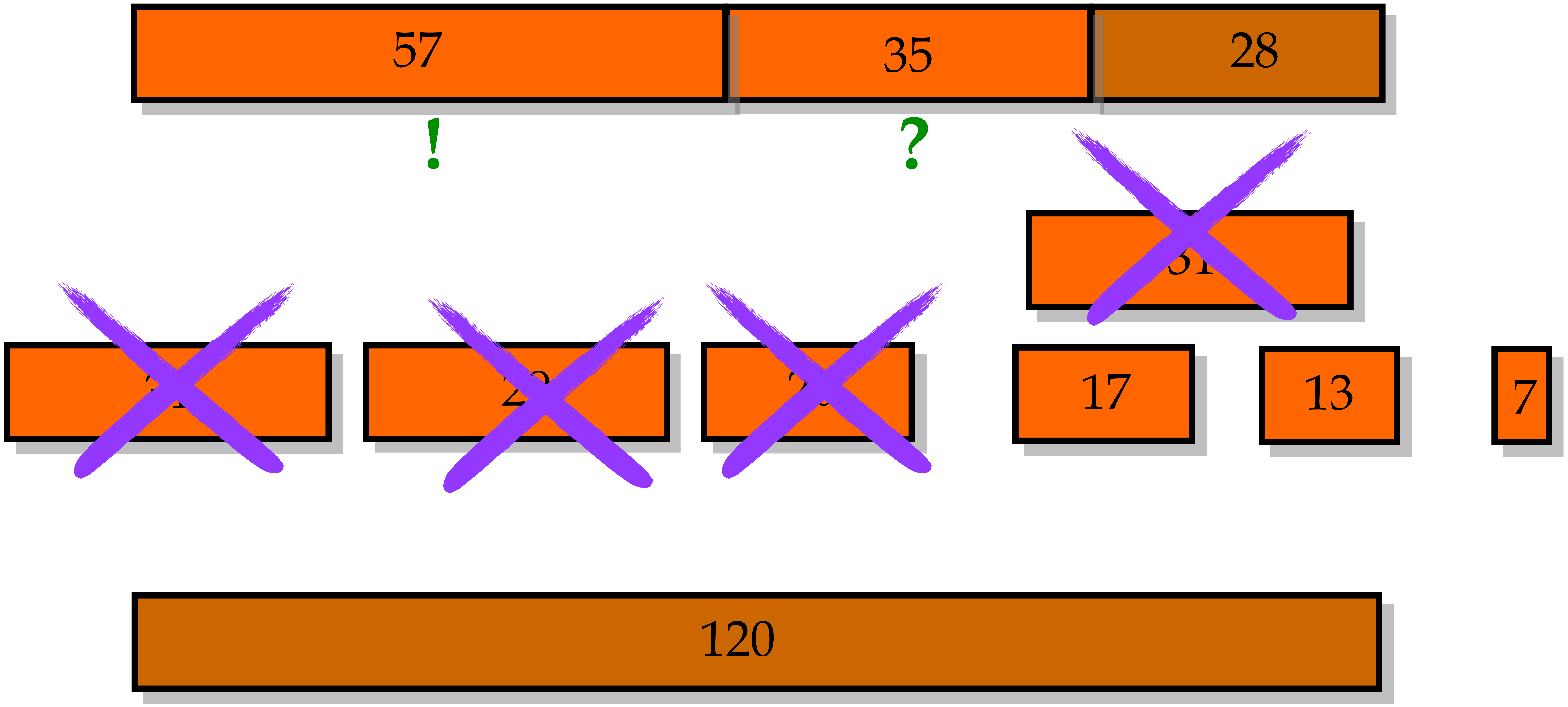
Keine Lösung?!



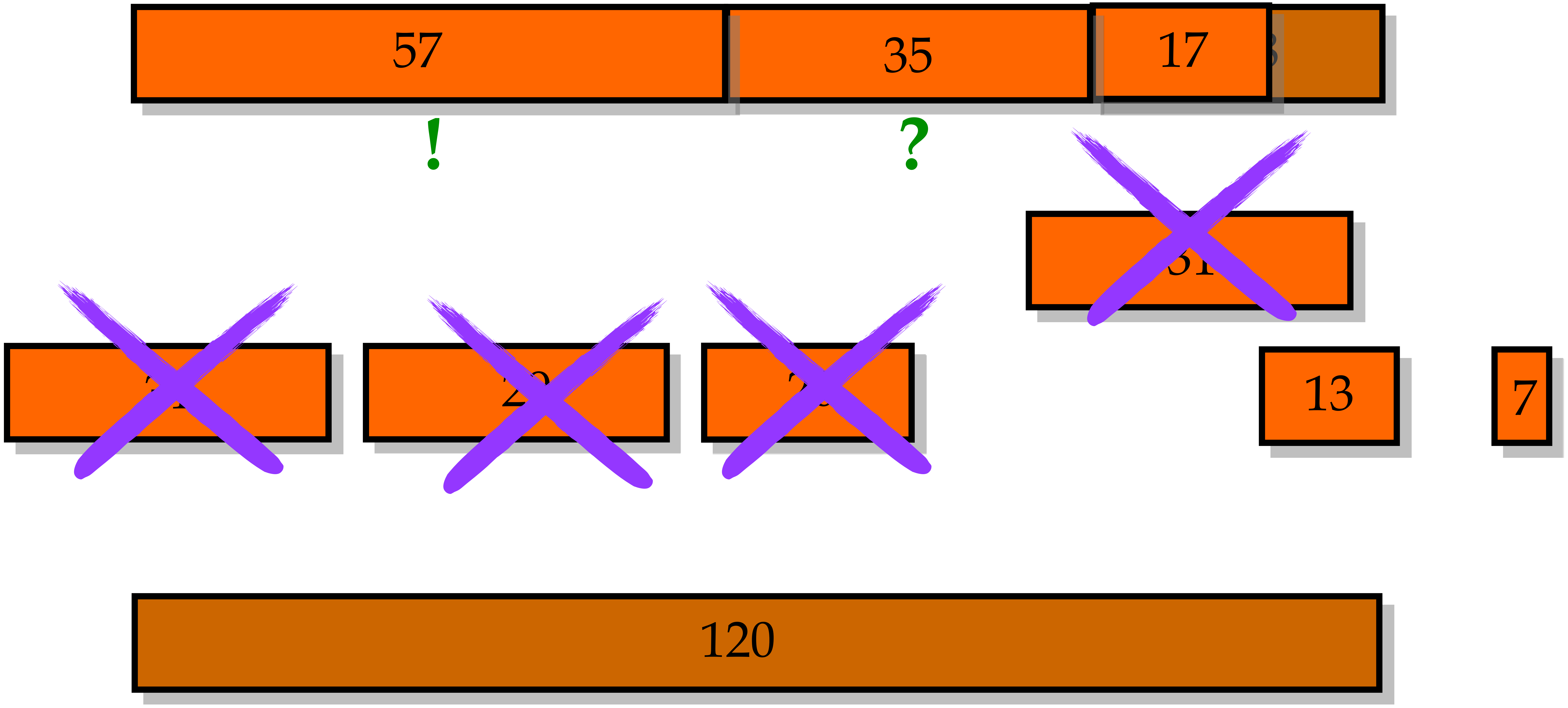
Keine Lösung?!



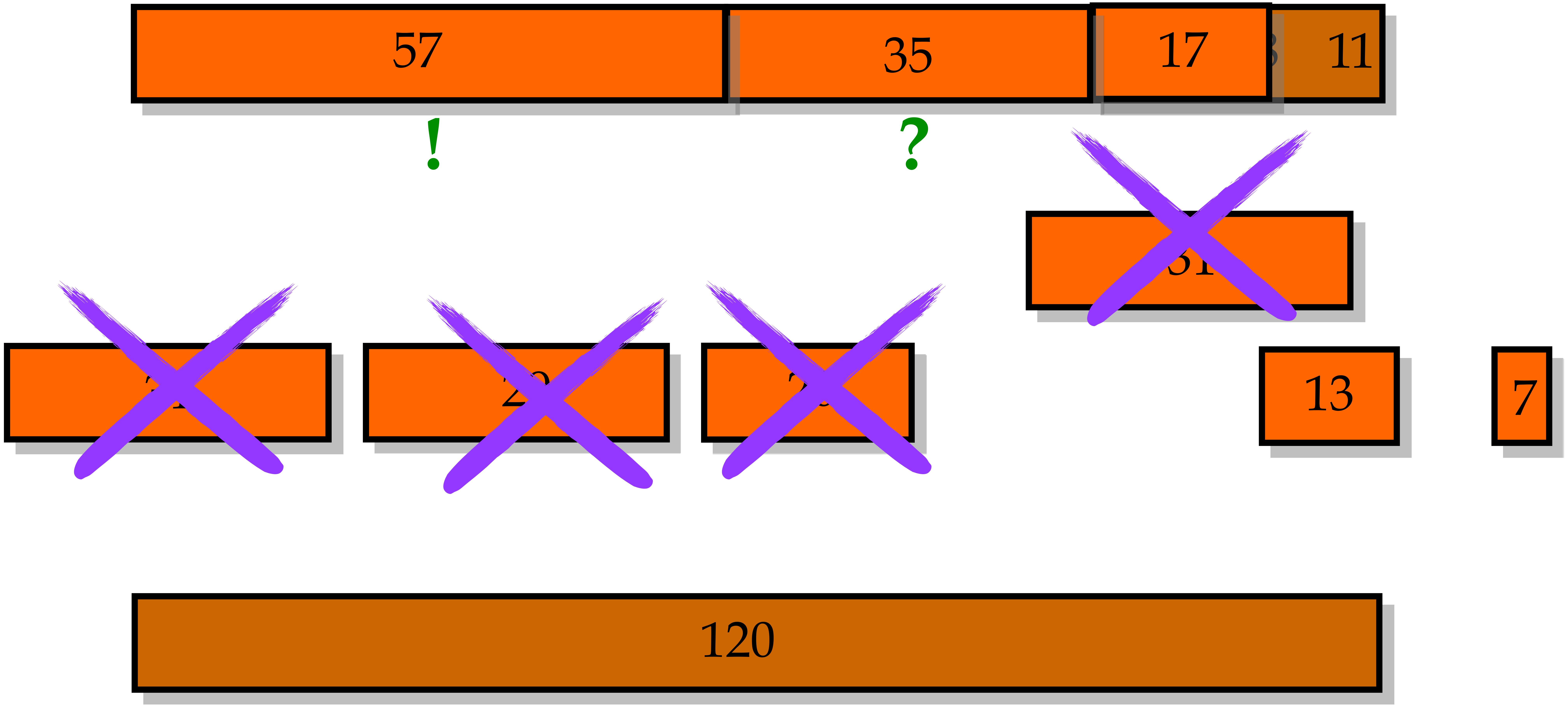
Keine Lösung?!



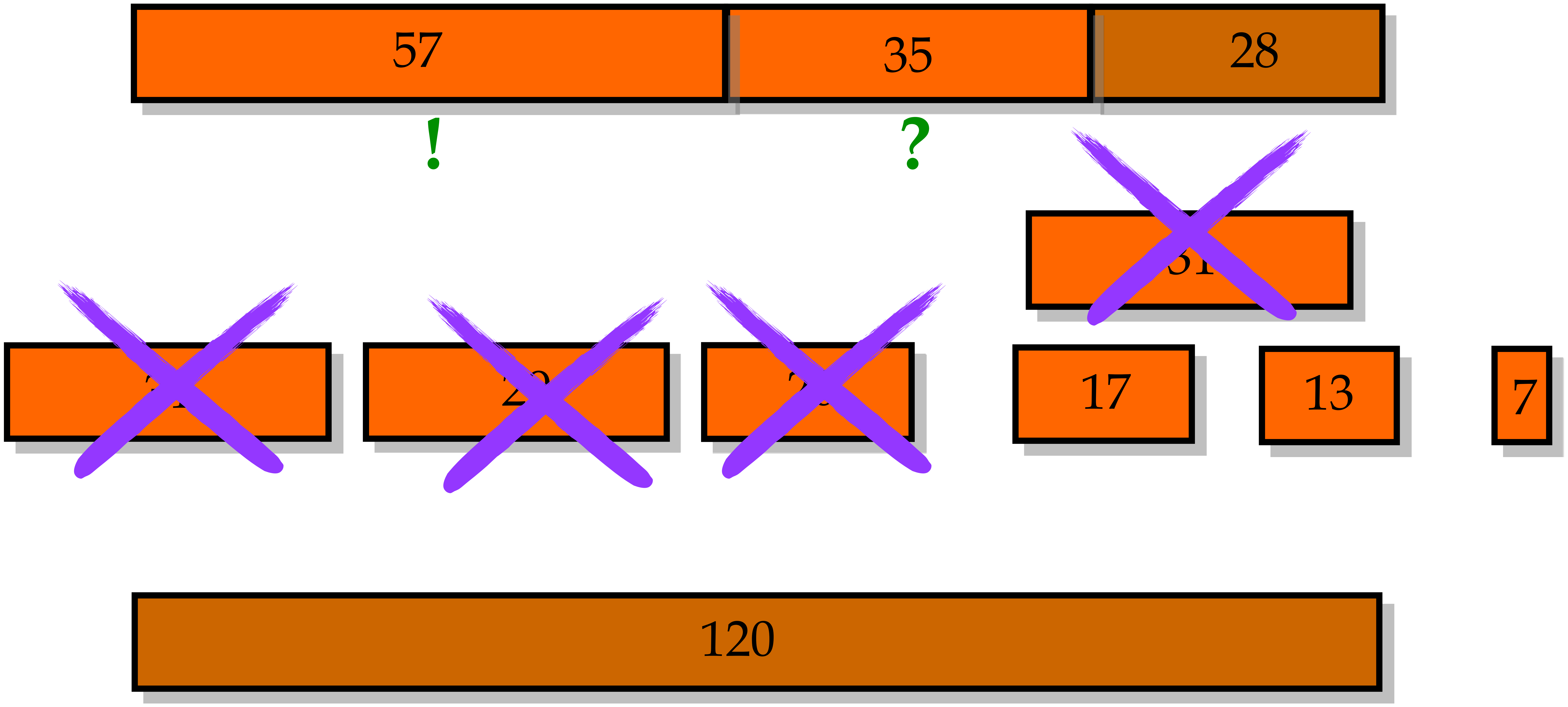
Keine Lösung?!



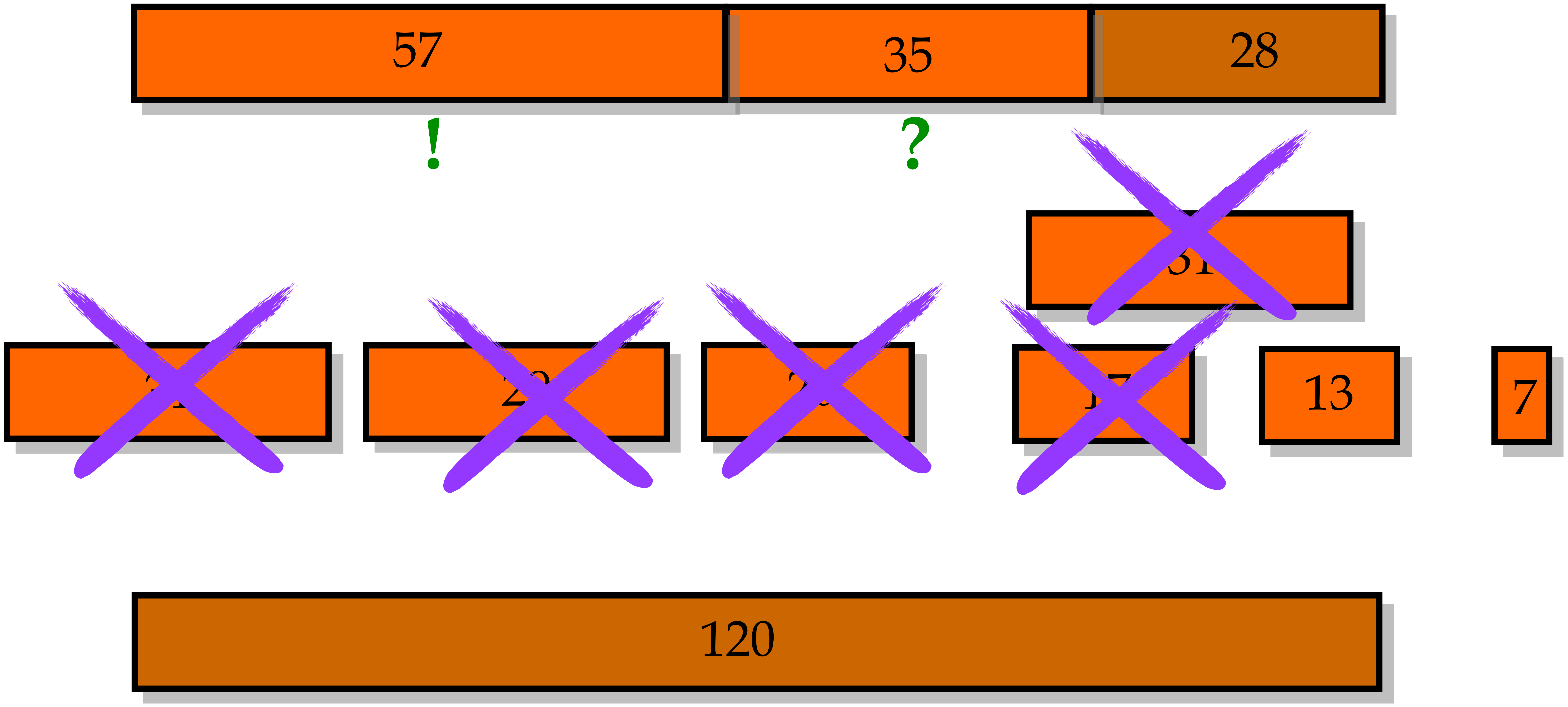
Keine Lösung?!



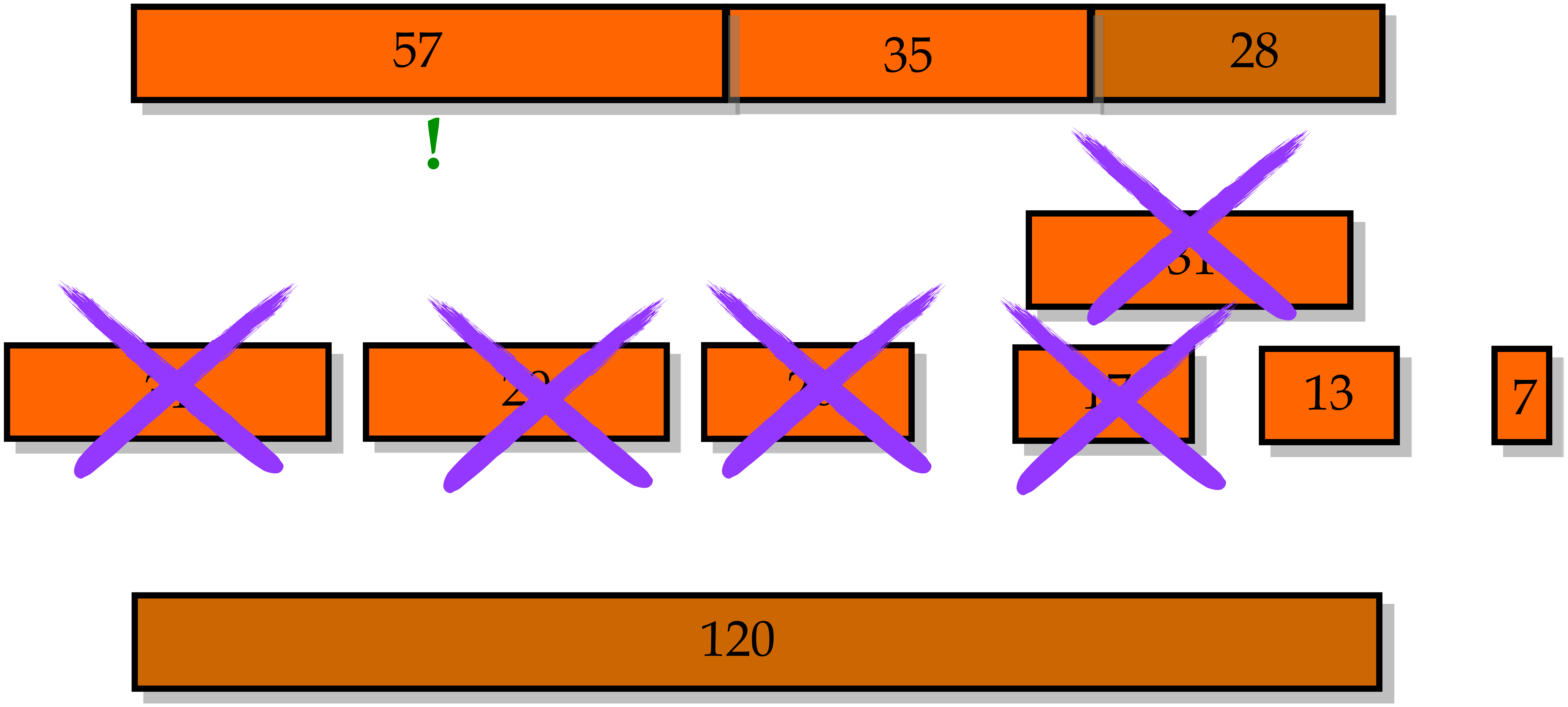
Keine Lösung?!



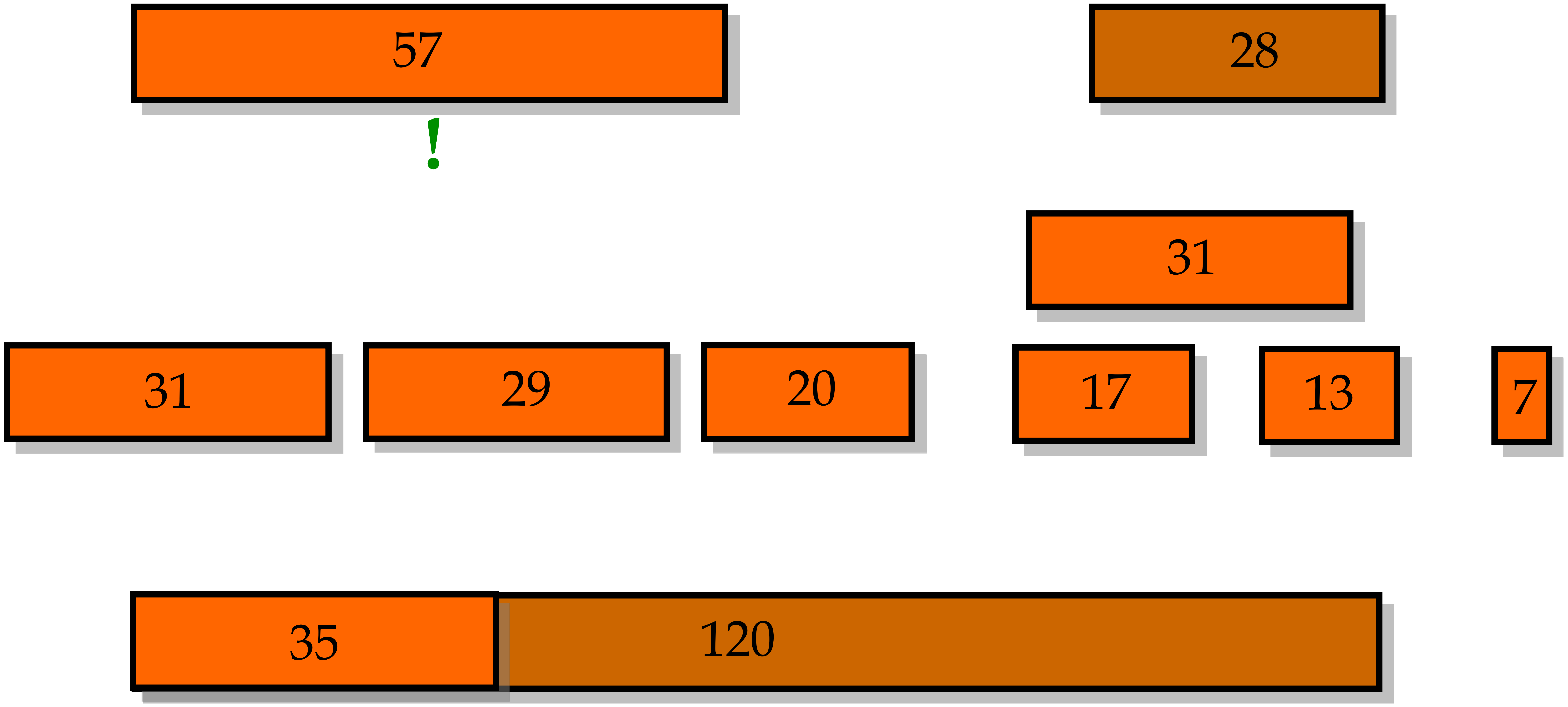
Keine Lösung?!



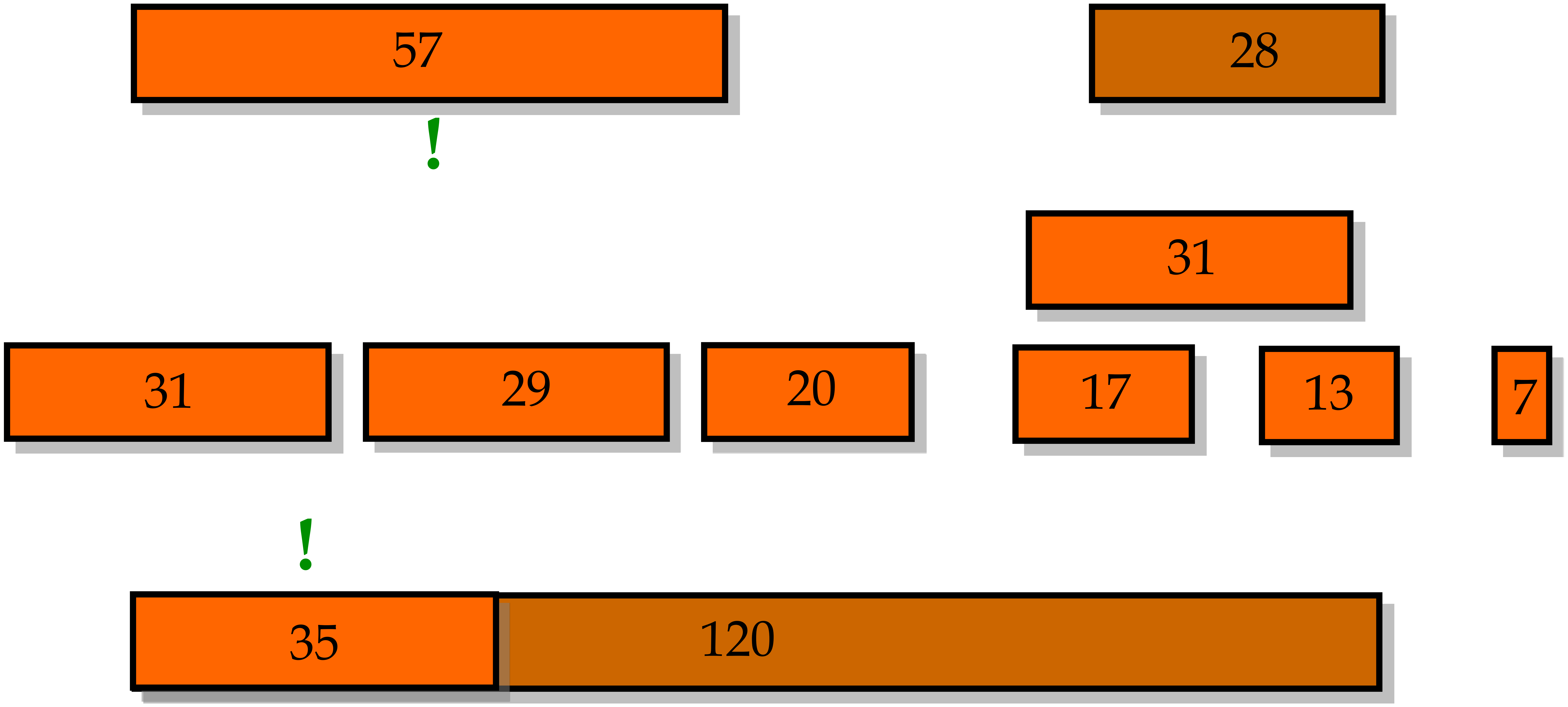
Keine Lösung?!



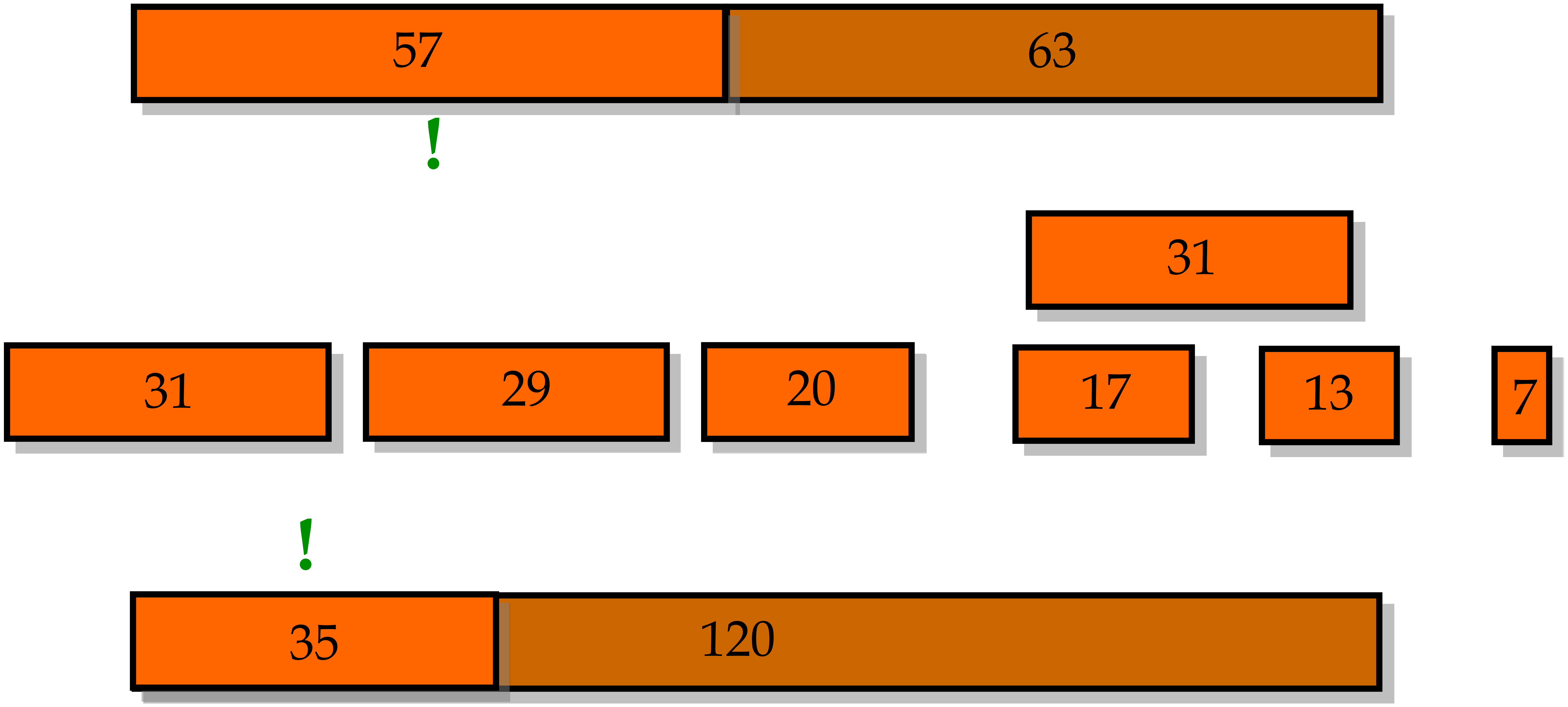
Keine Lösung?!



Keine Lösung?!

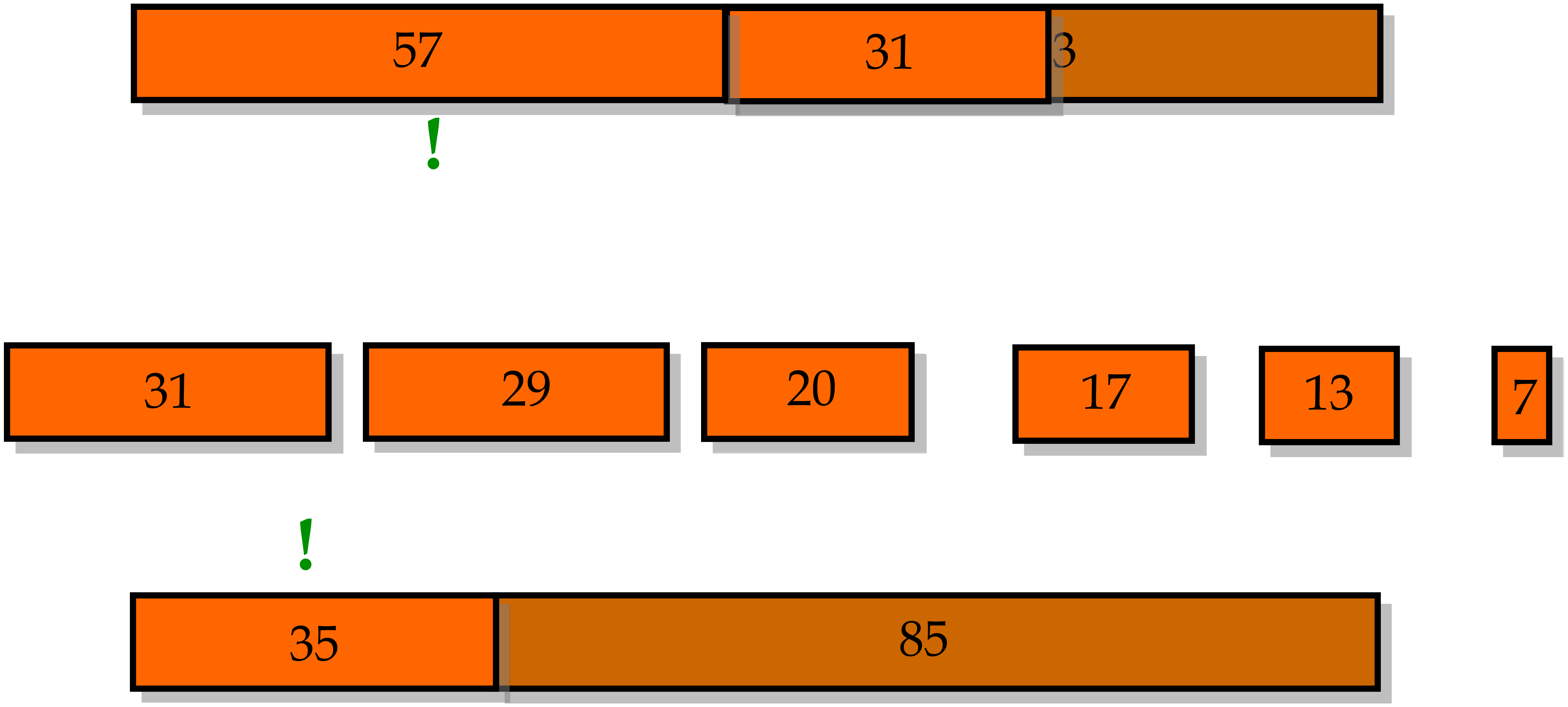


Keine Lösung?!

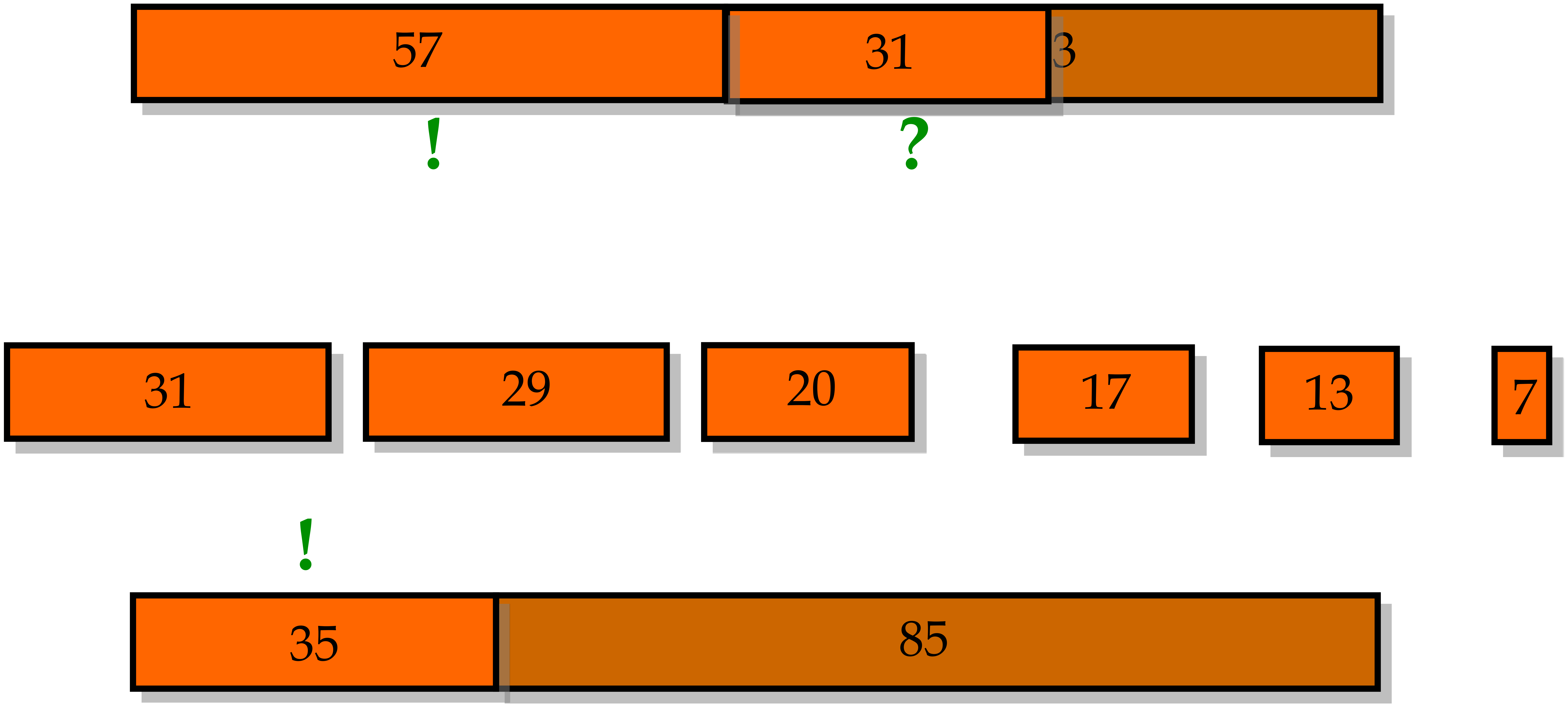


Keine Lösung?!

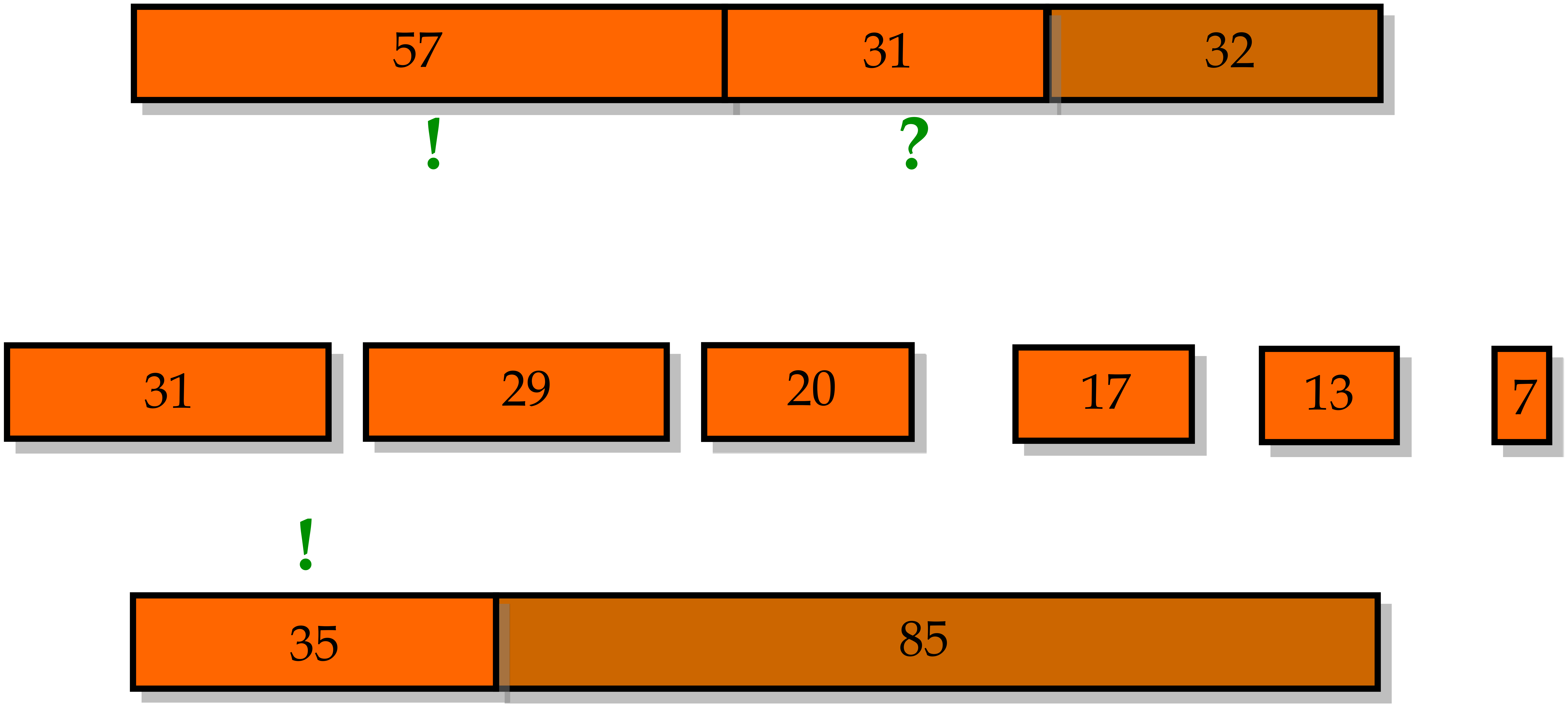
Keine Lösung?!



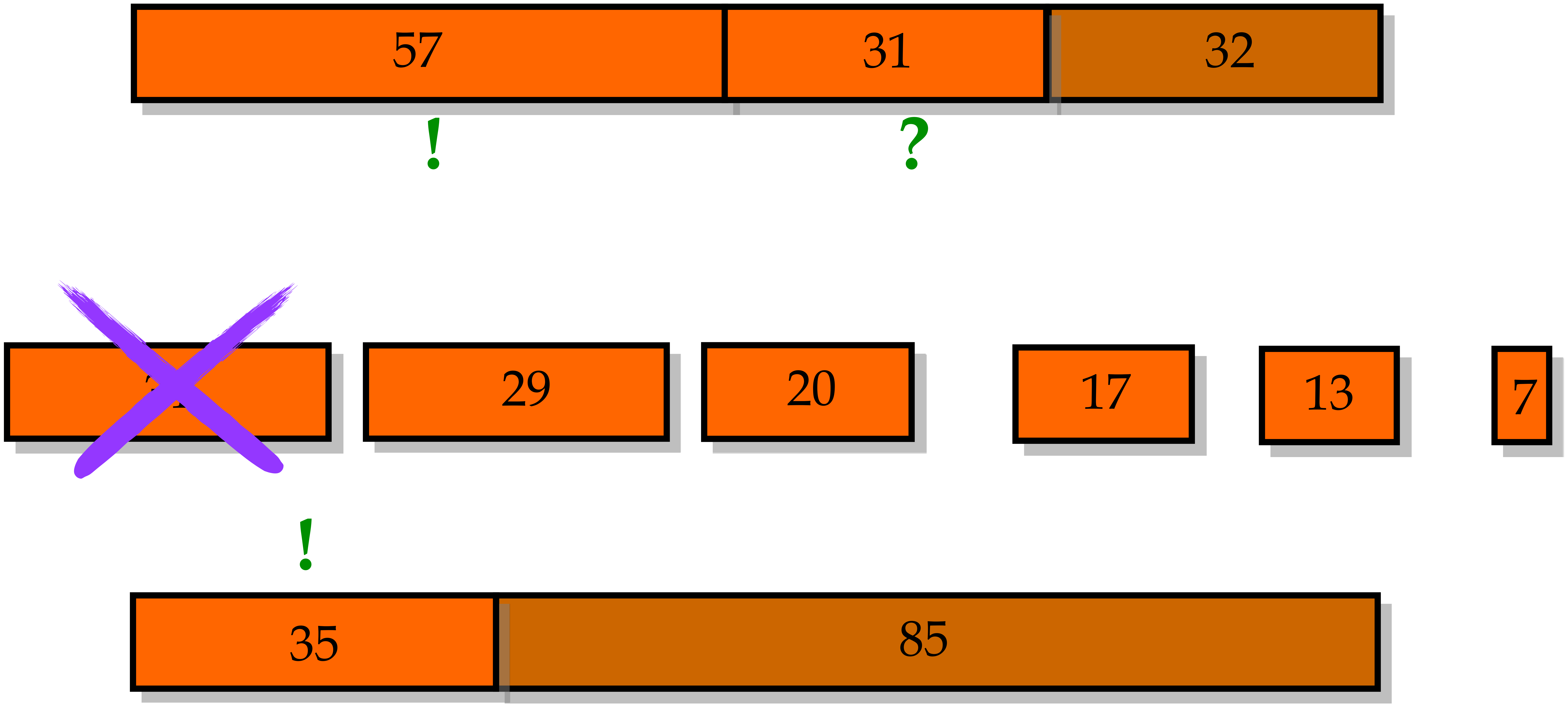
Keine Lösung?!



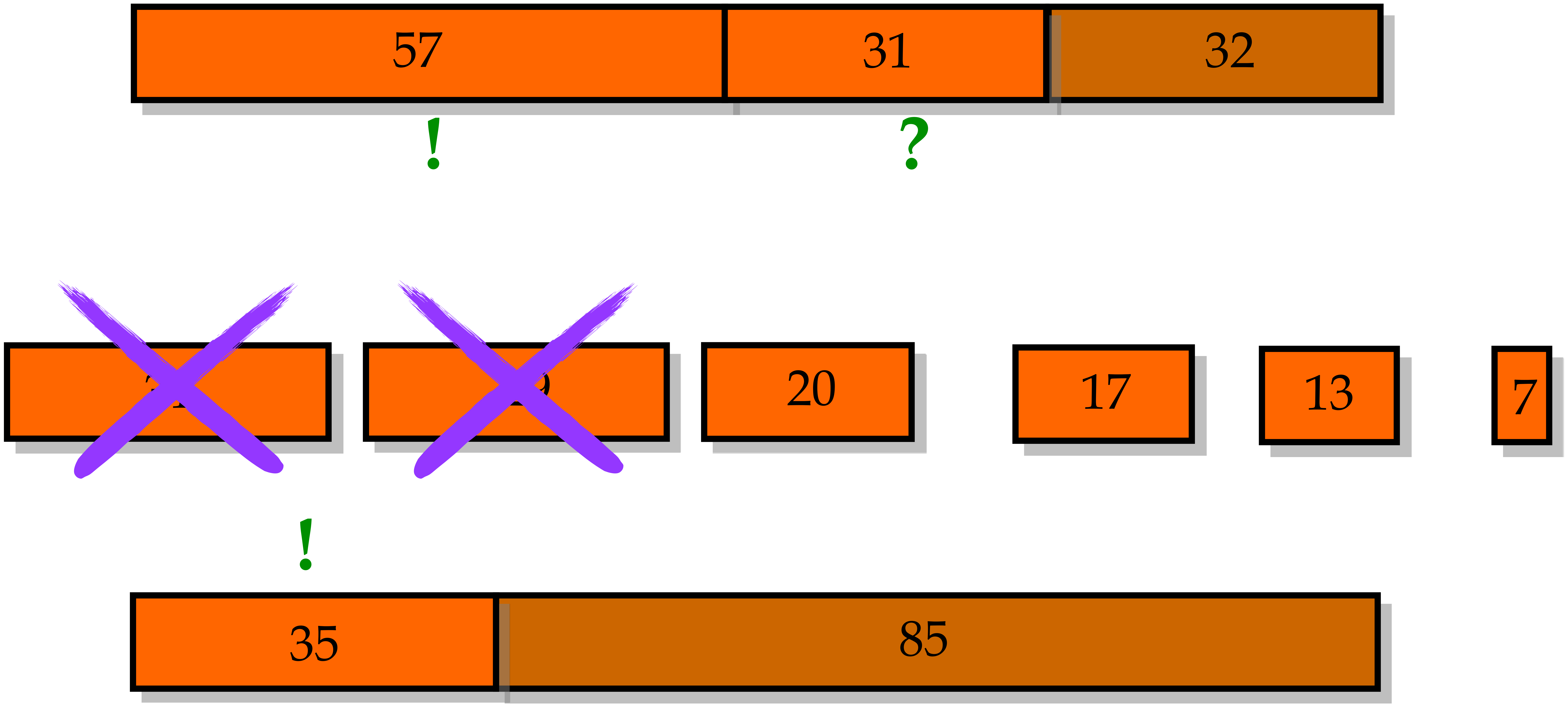
Keine Lösung?!



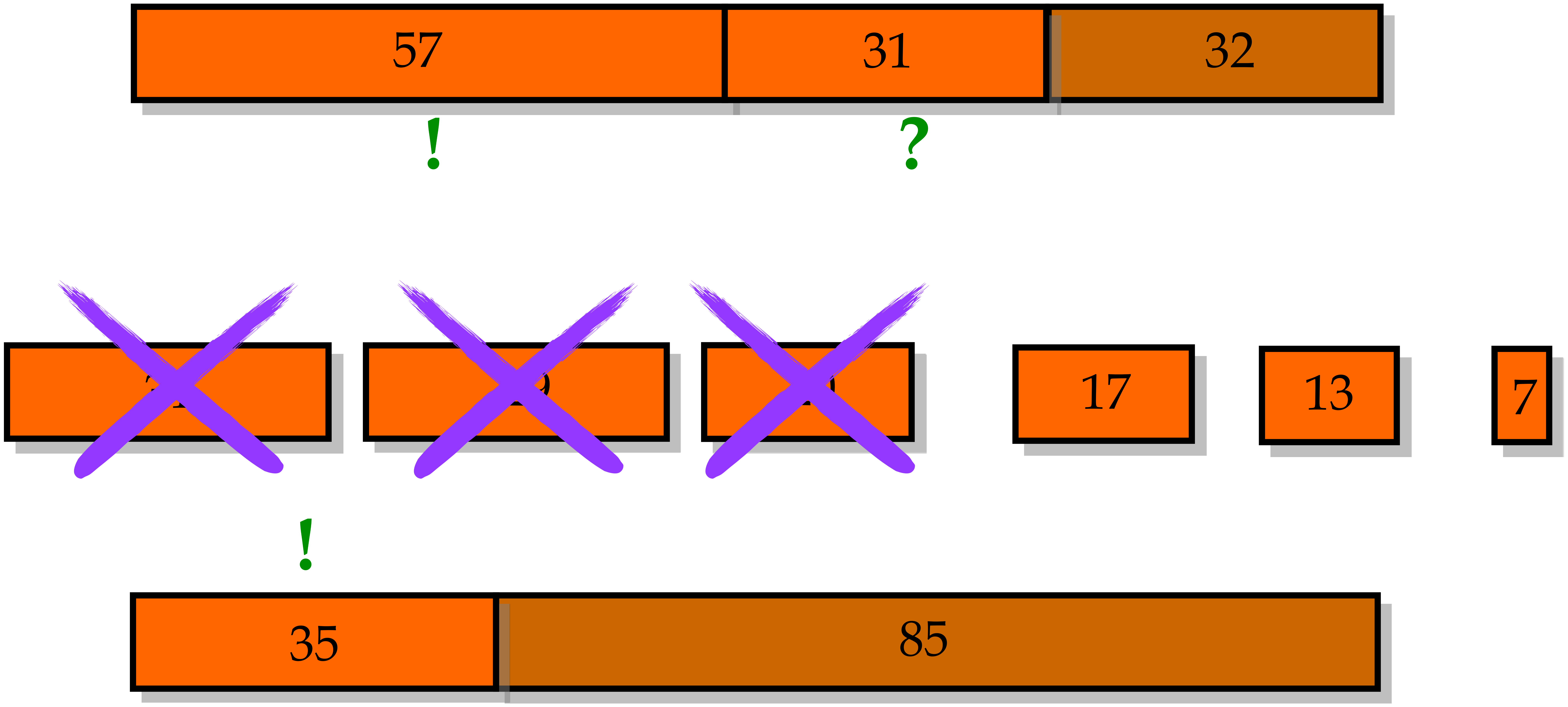
Keine Lösung?!



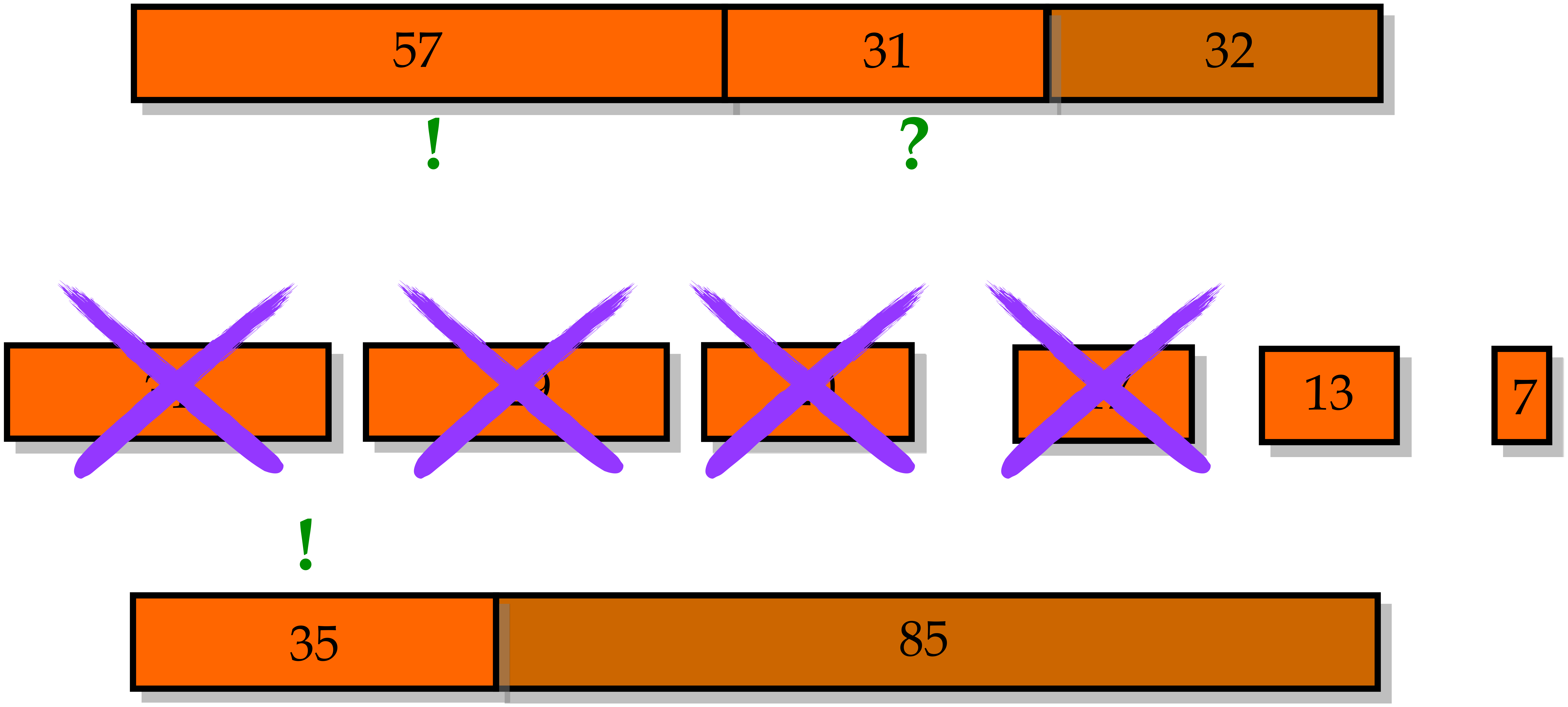
Keine Lösung?!



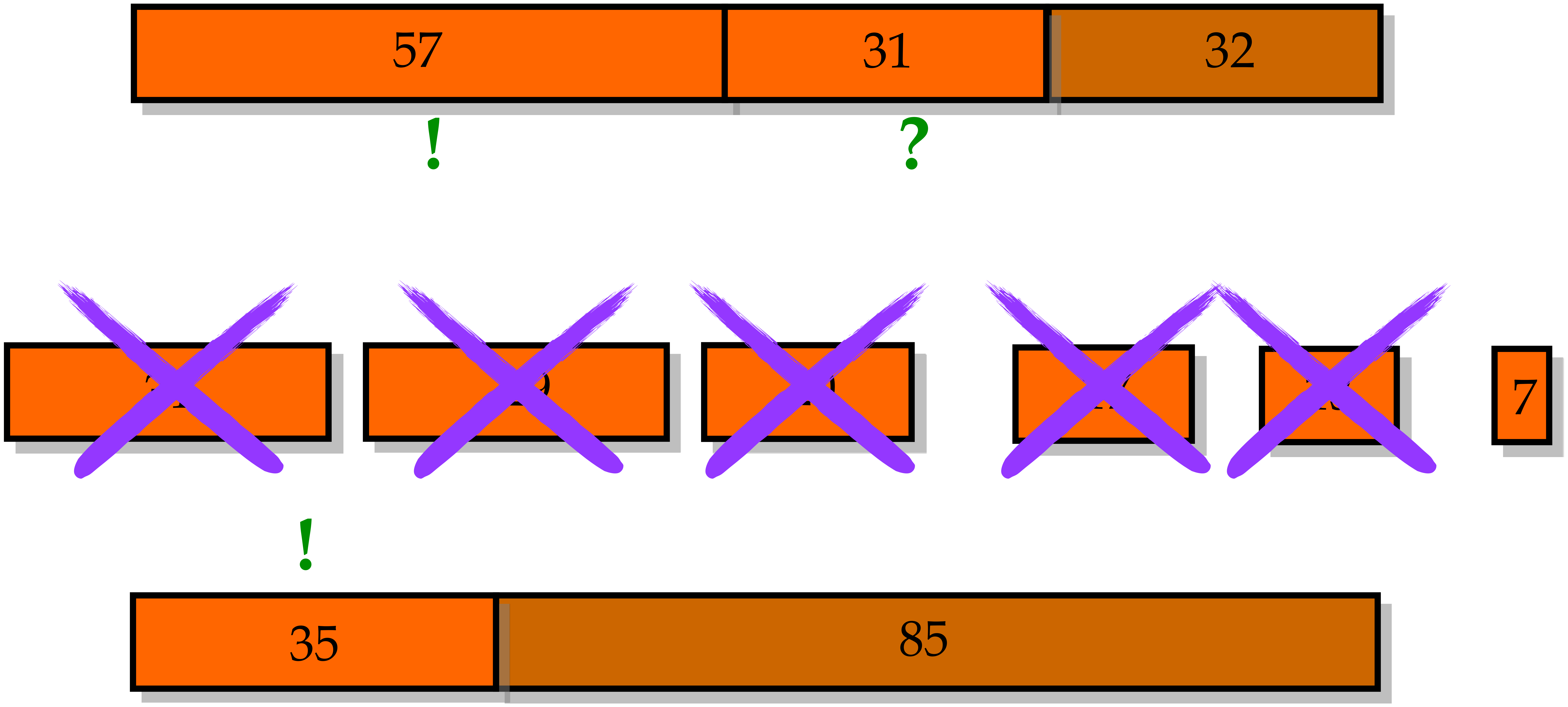
Keine Lösung?!



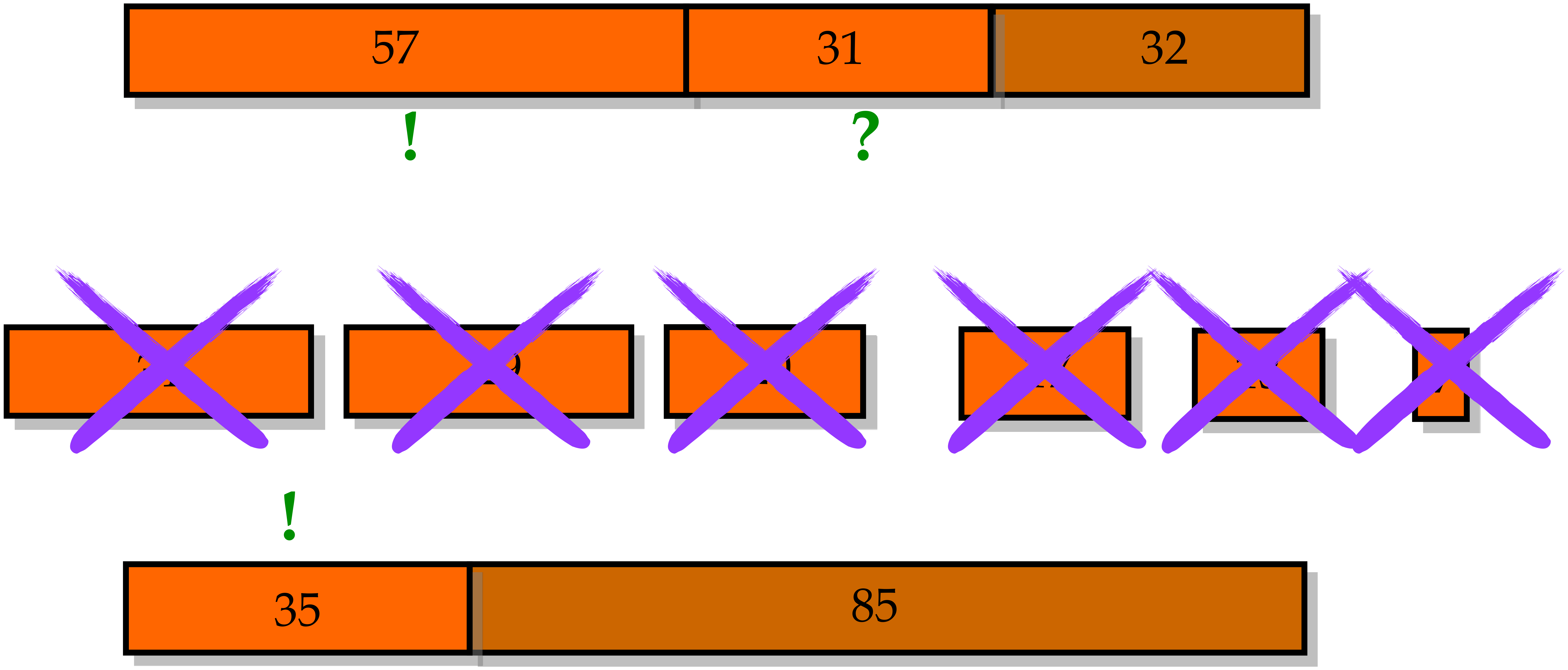
Keine Lösung?!



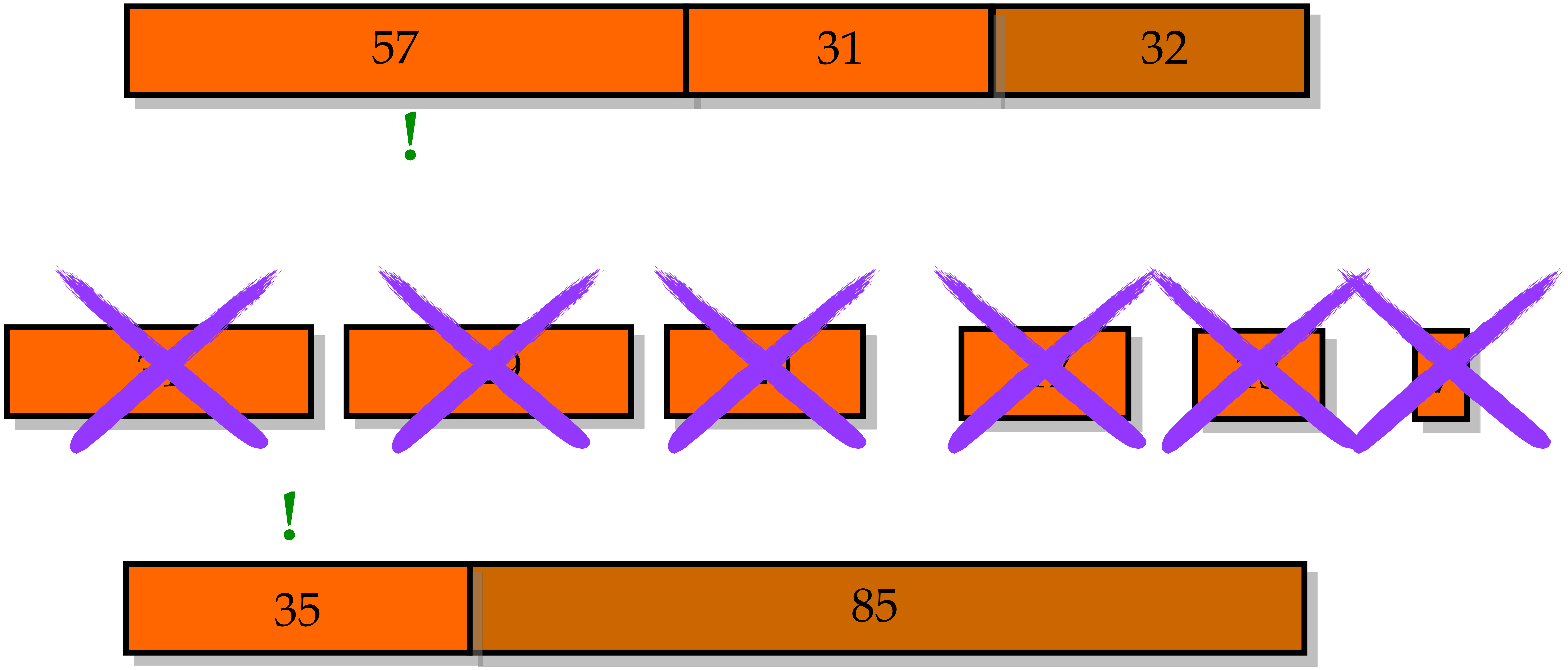
Keine Lösung?!



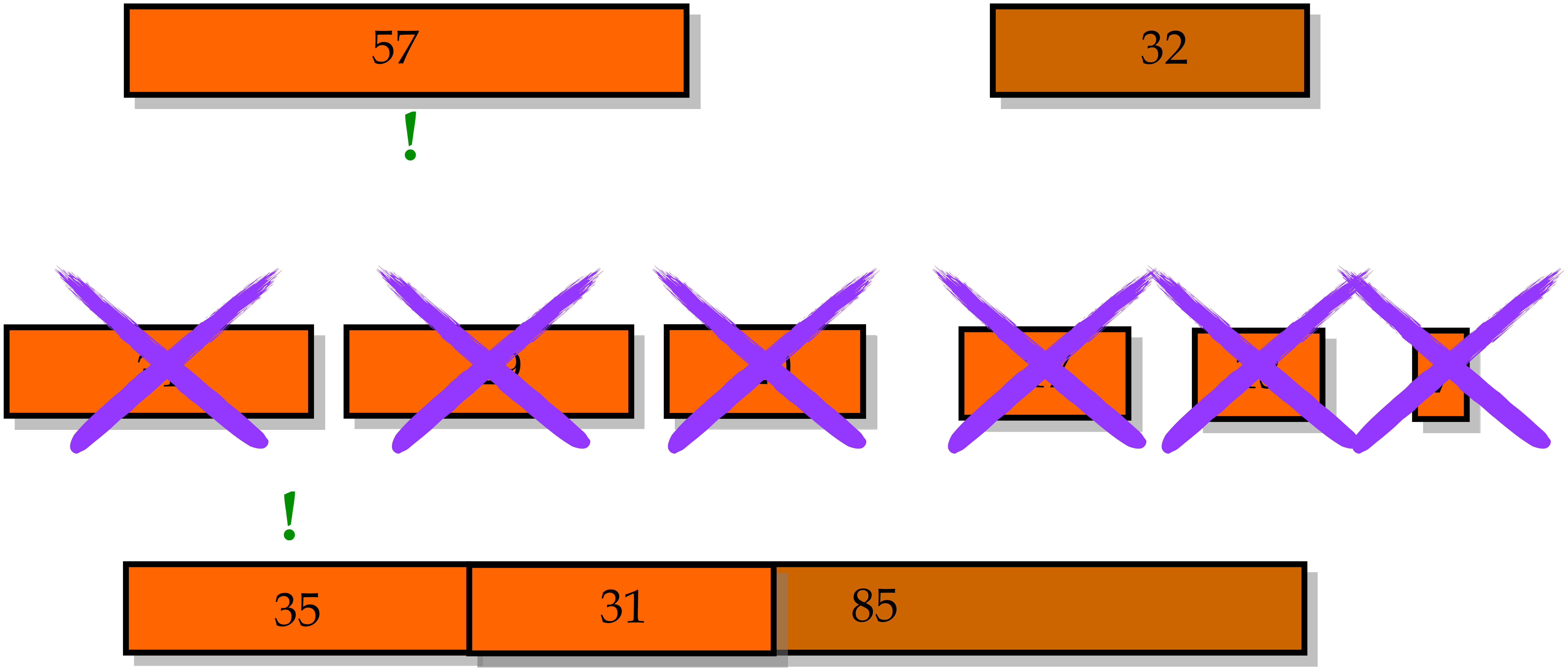
Keine Lösung?!



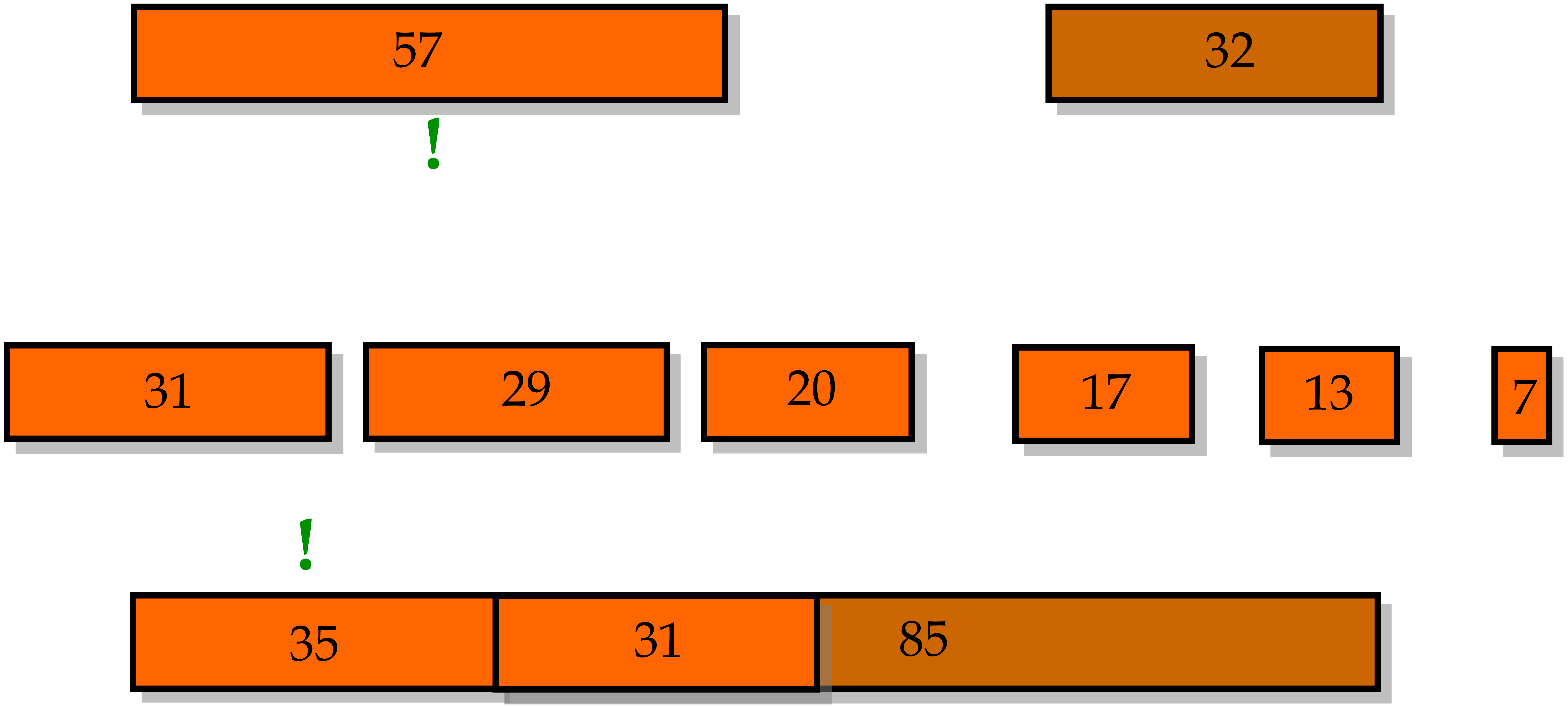
Keine Lösung?!



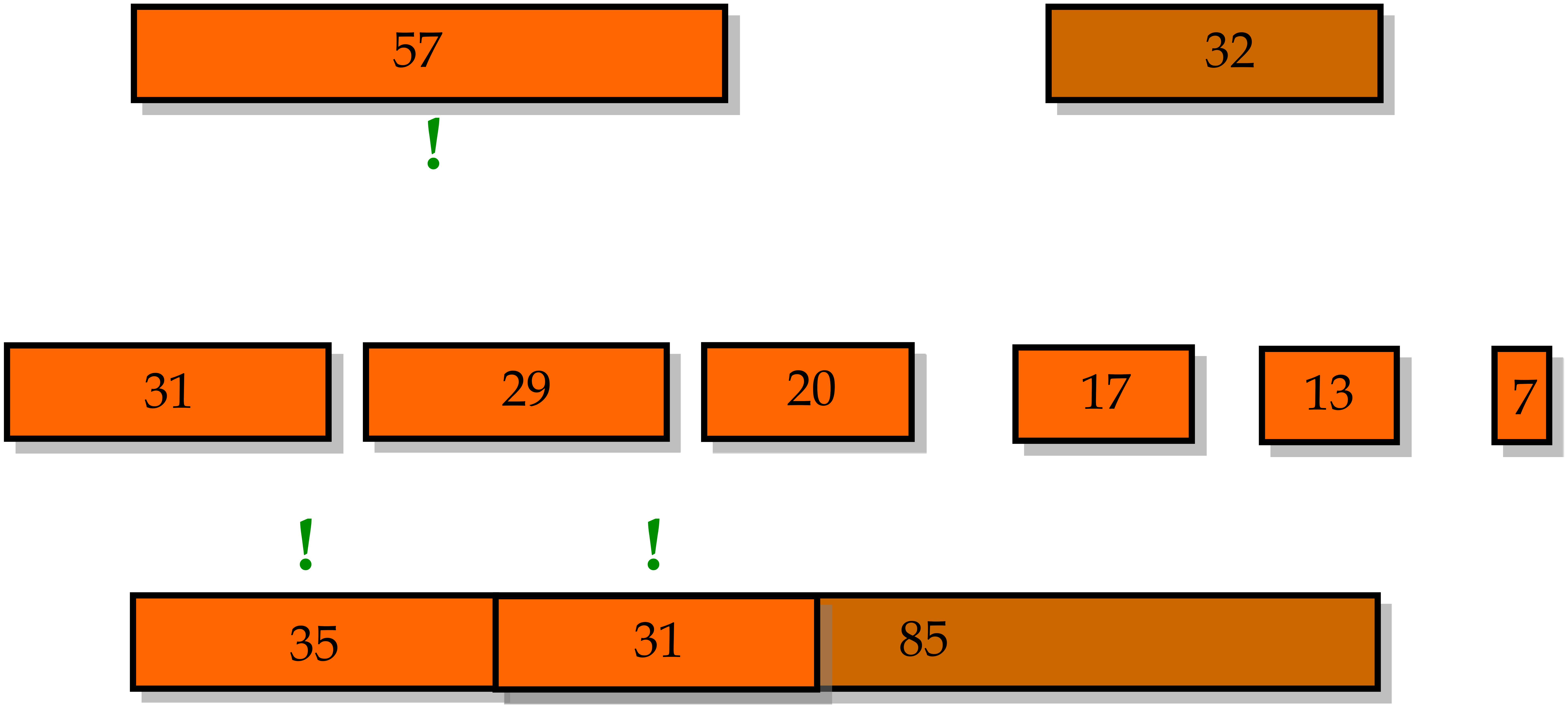
Keine Lösung?!



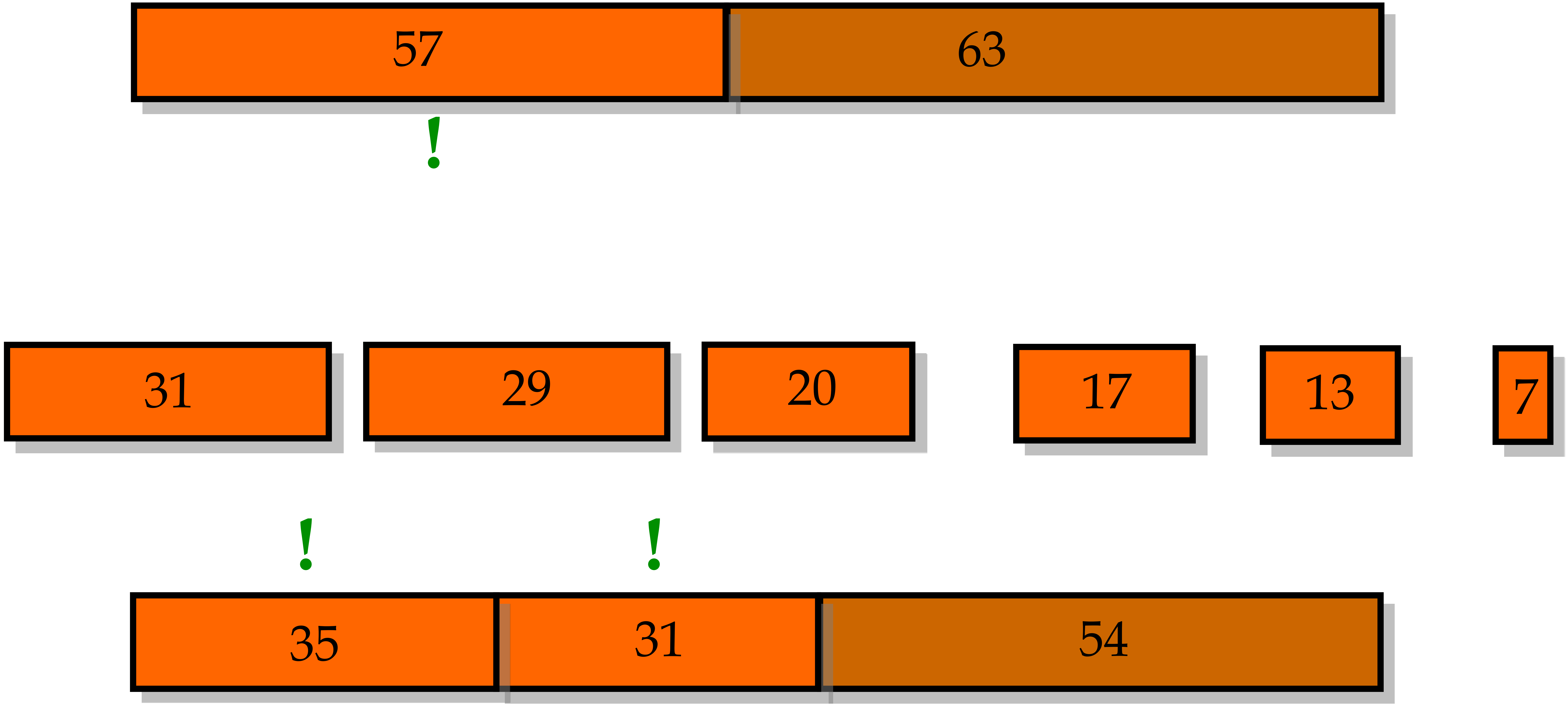
Keine Lösung?!



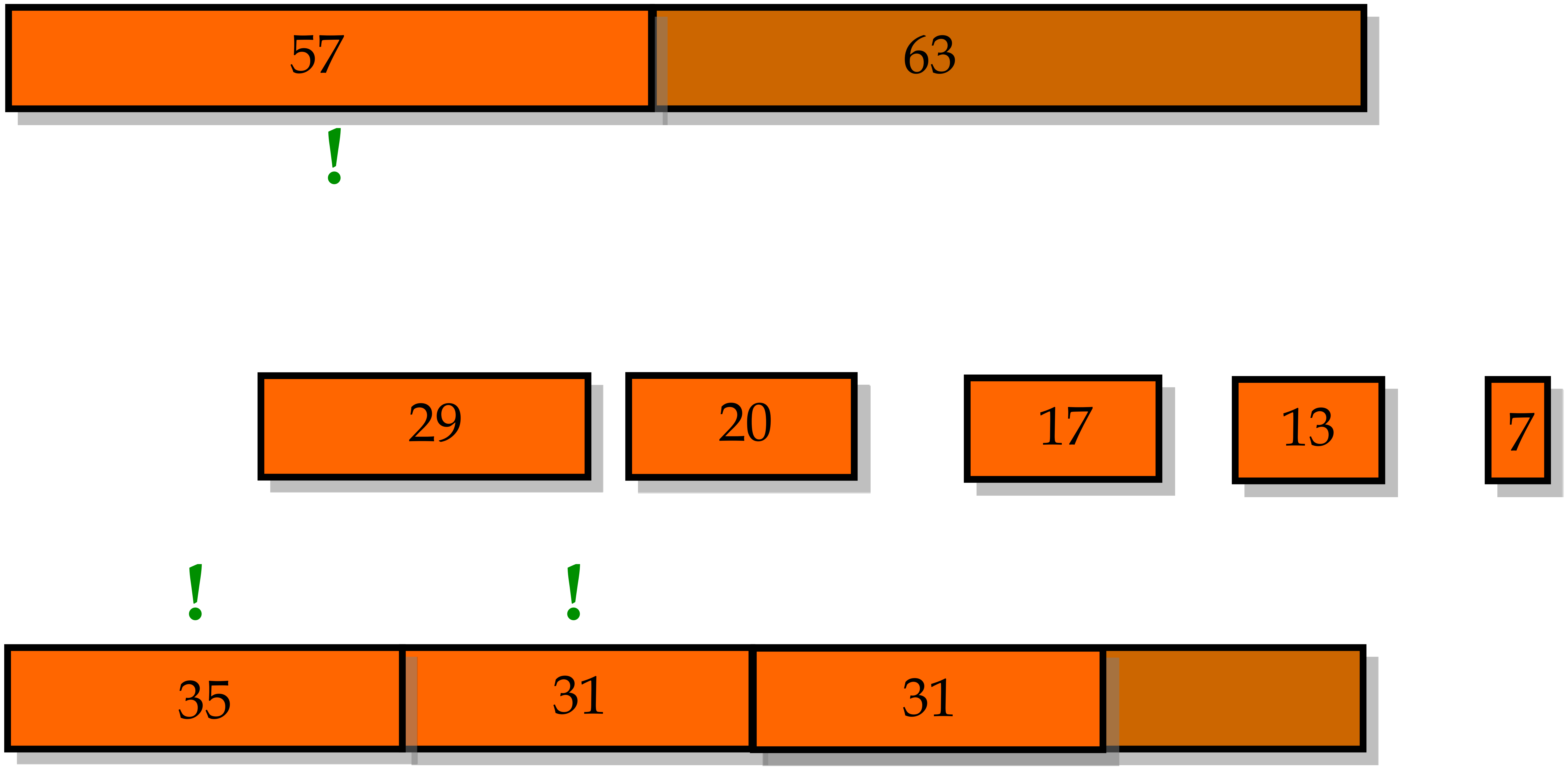
Keine Lösung?!



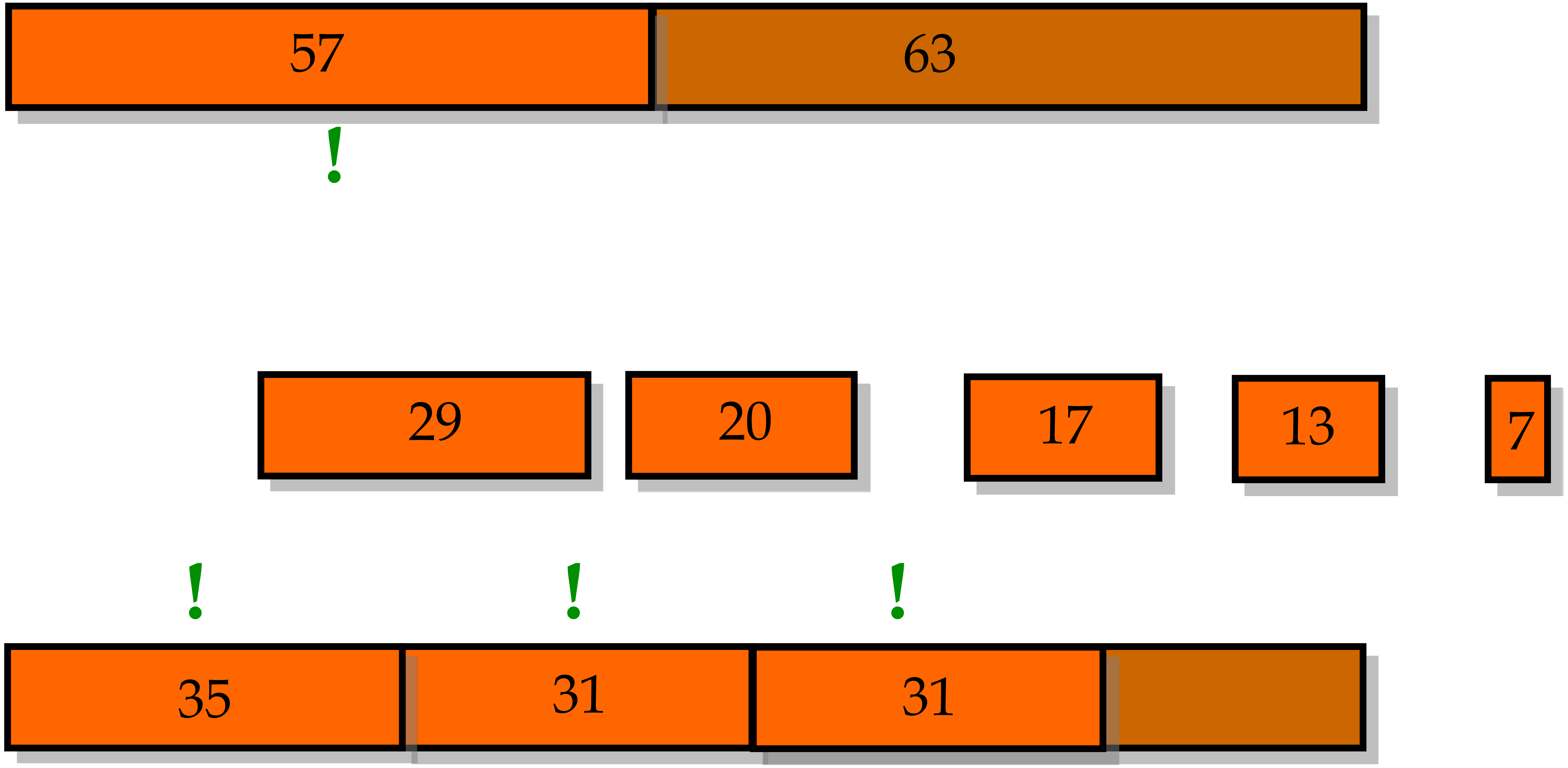
Keine Lösung?!



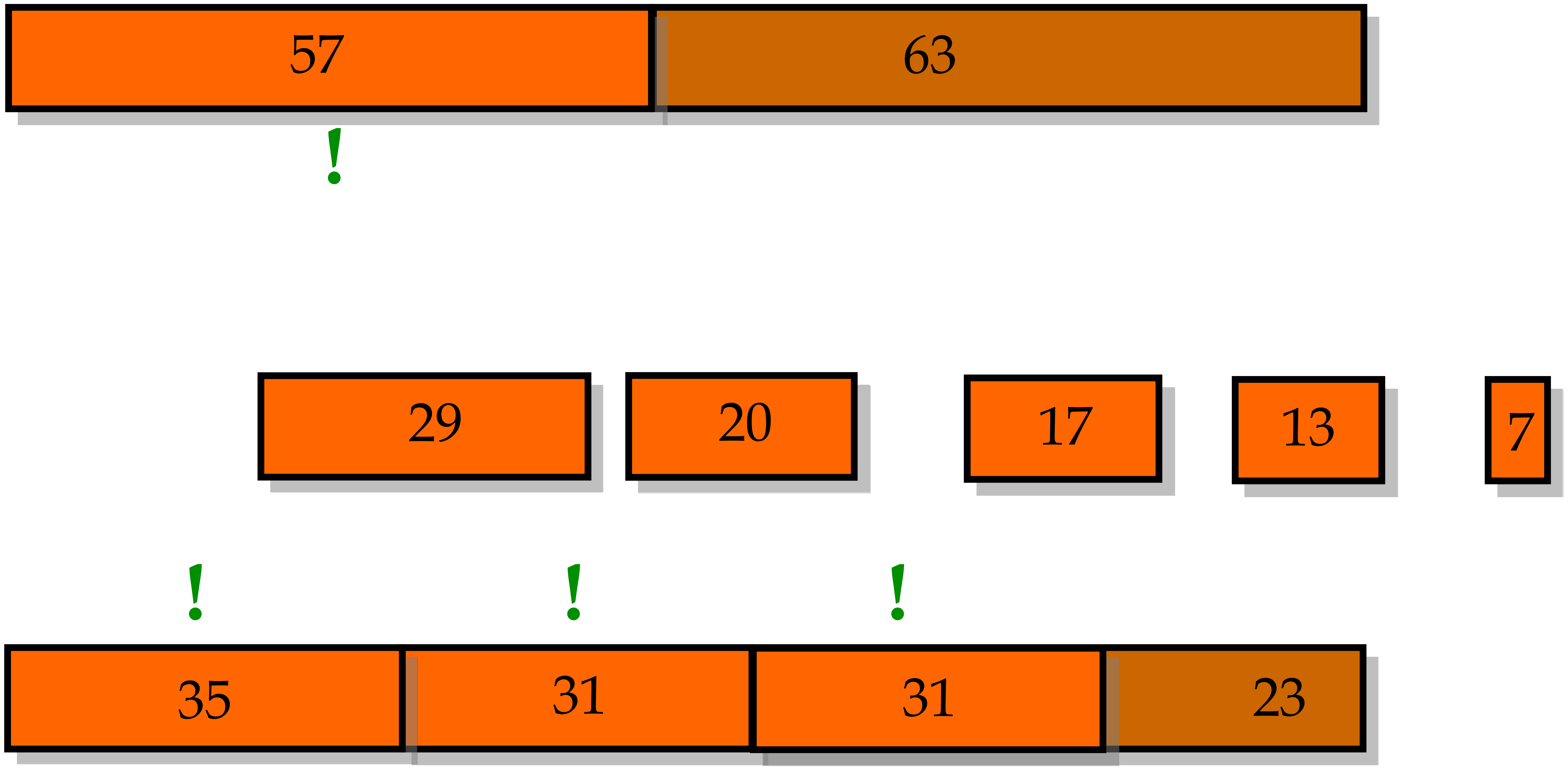
Keine Lösung?!



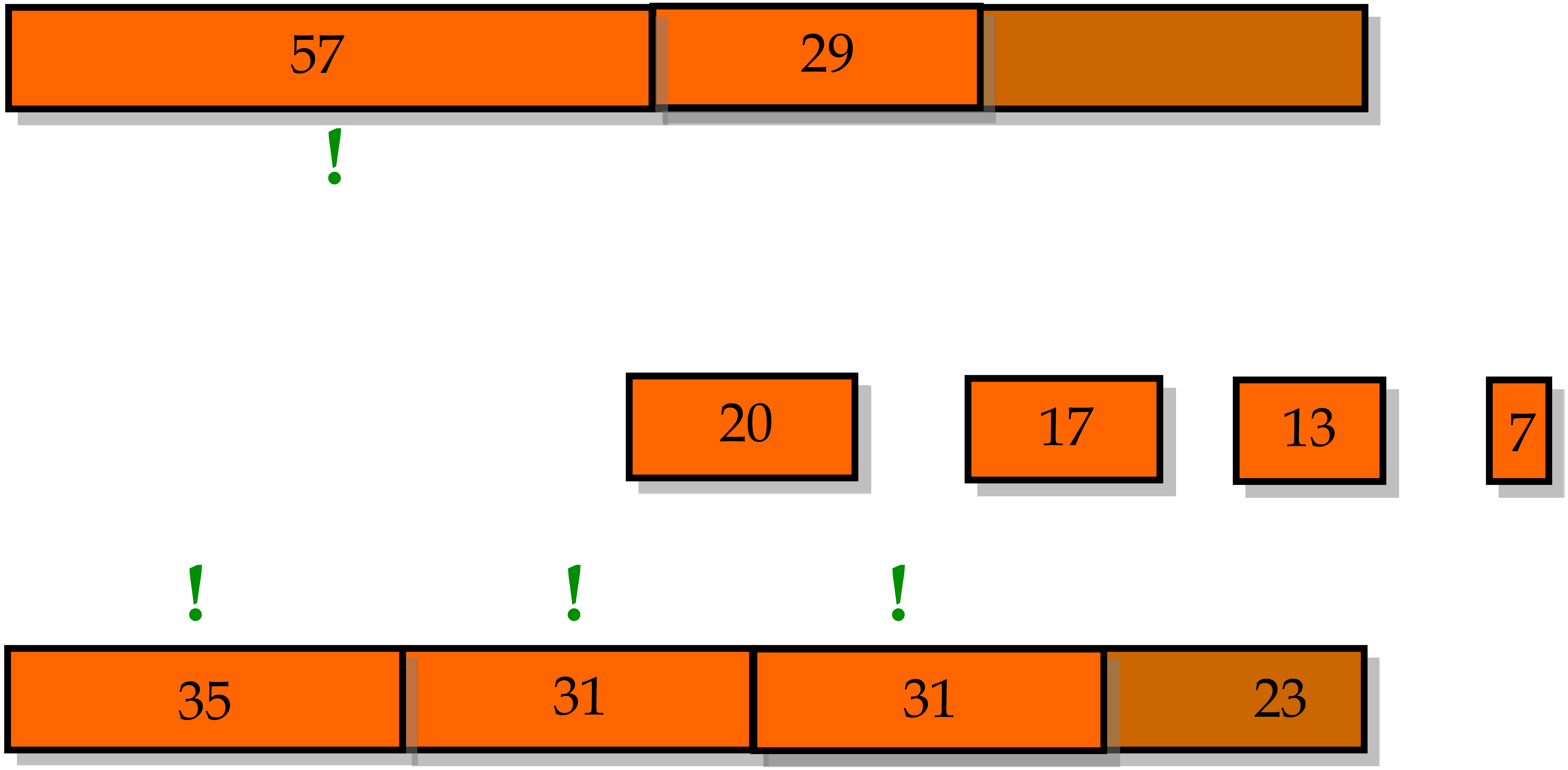
Keine Lösung?!



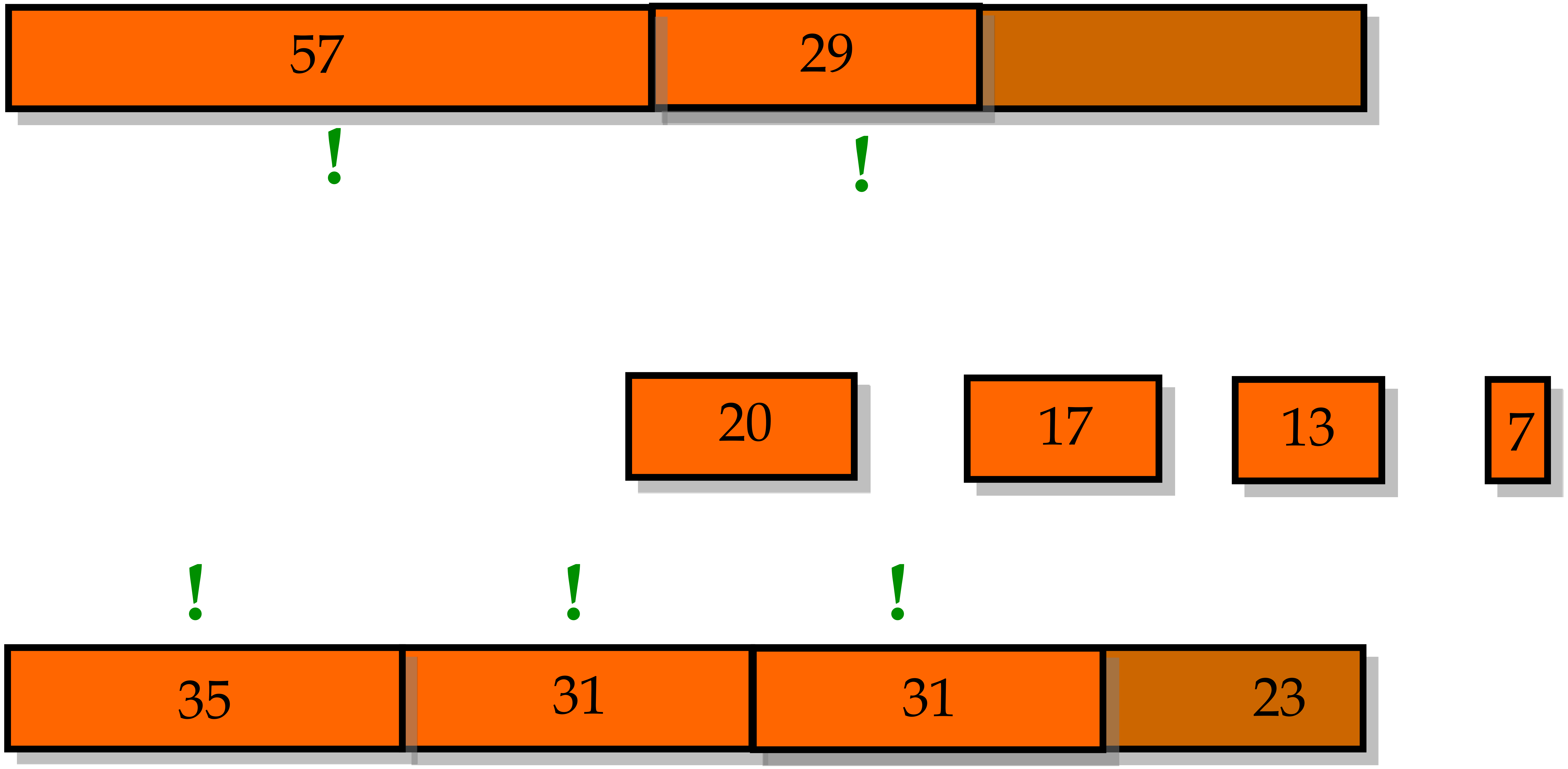
Keine Lösung?!



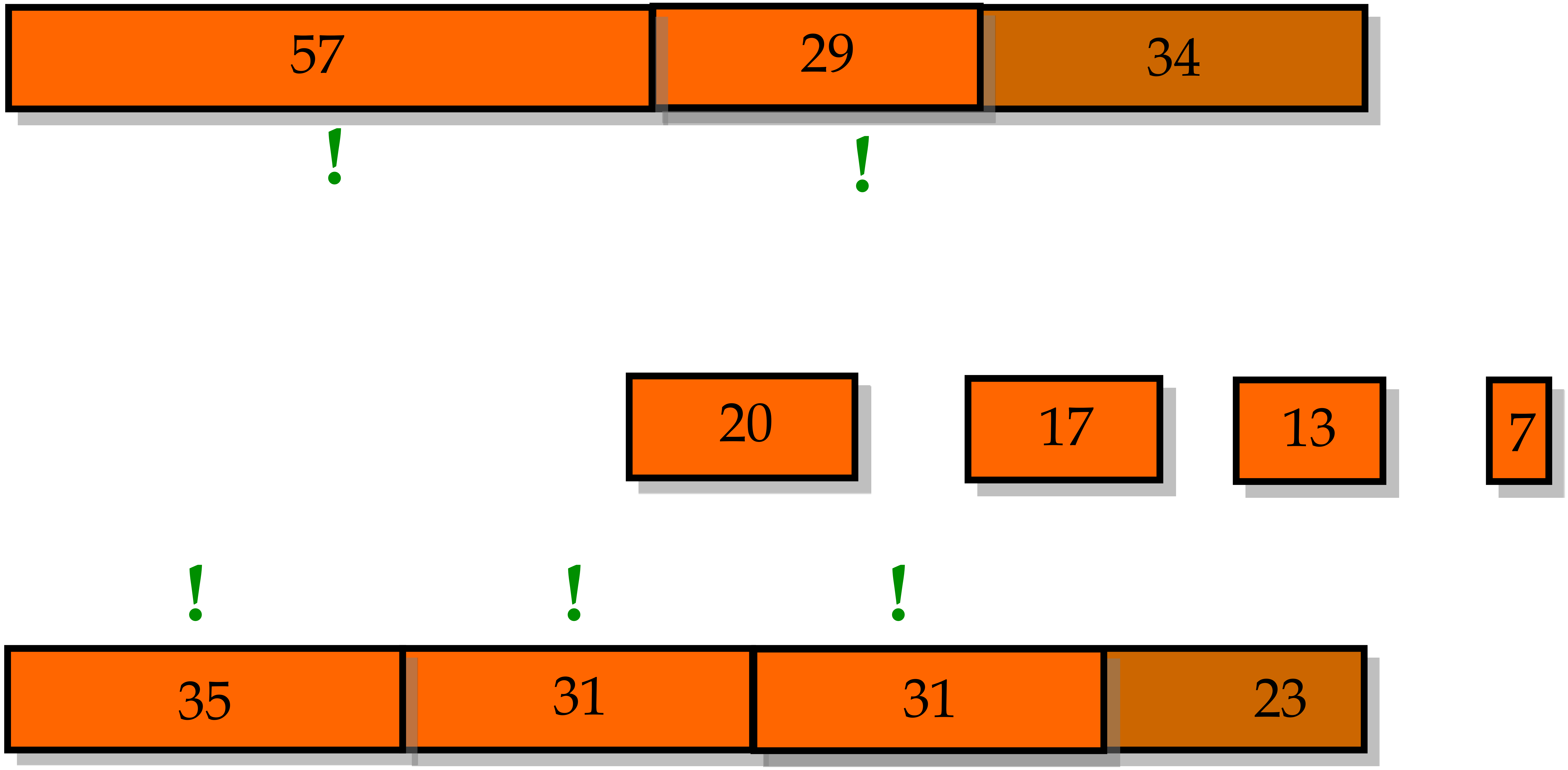
Keine Lösung?!



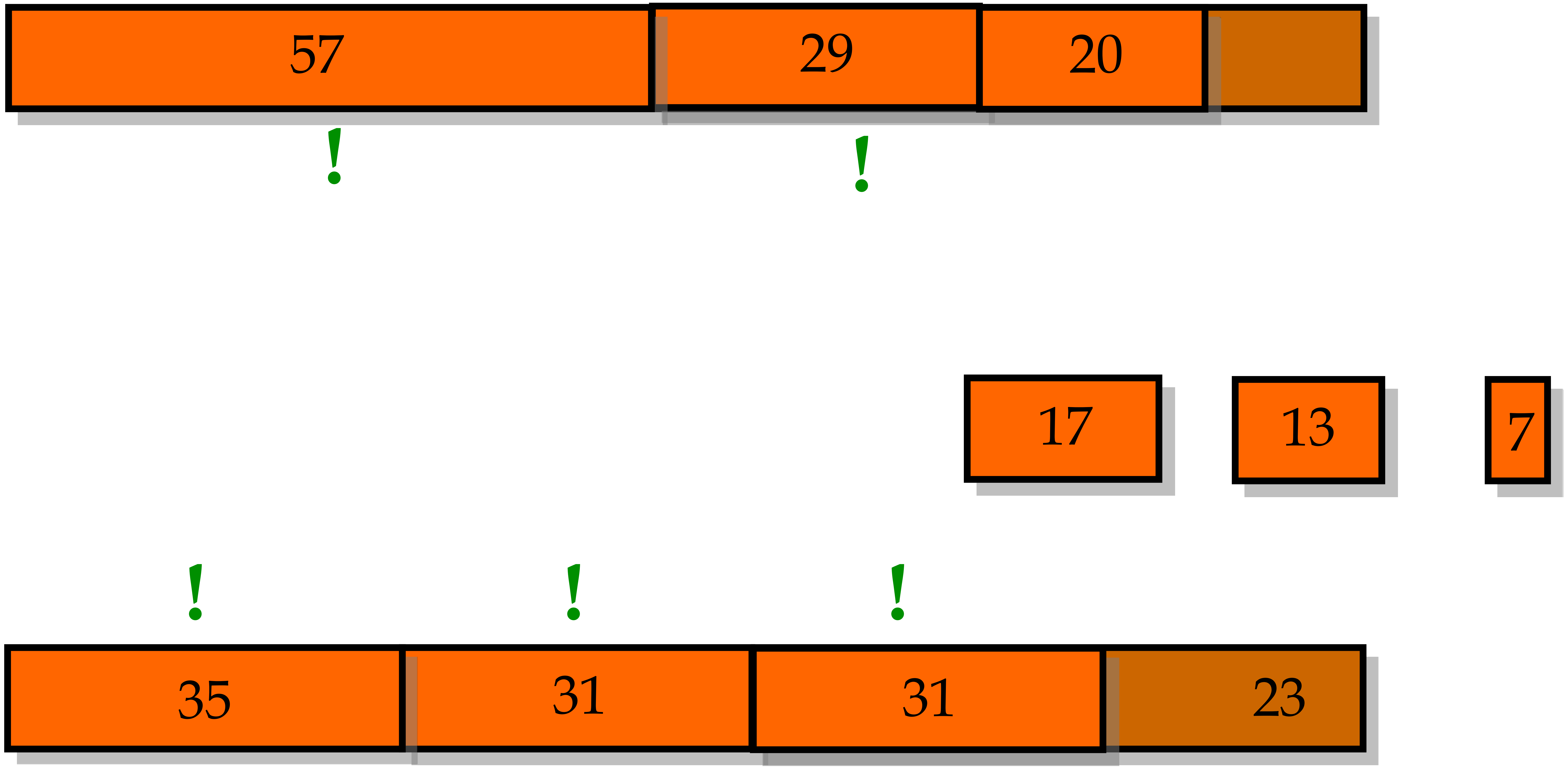
Keine Lösung?!



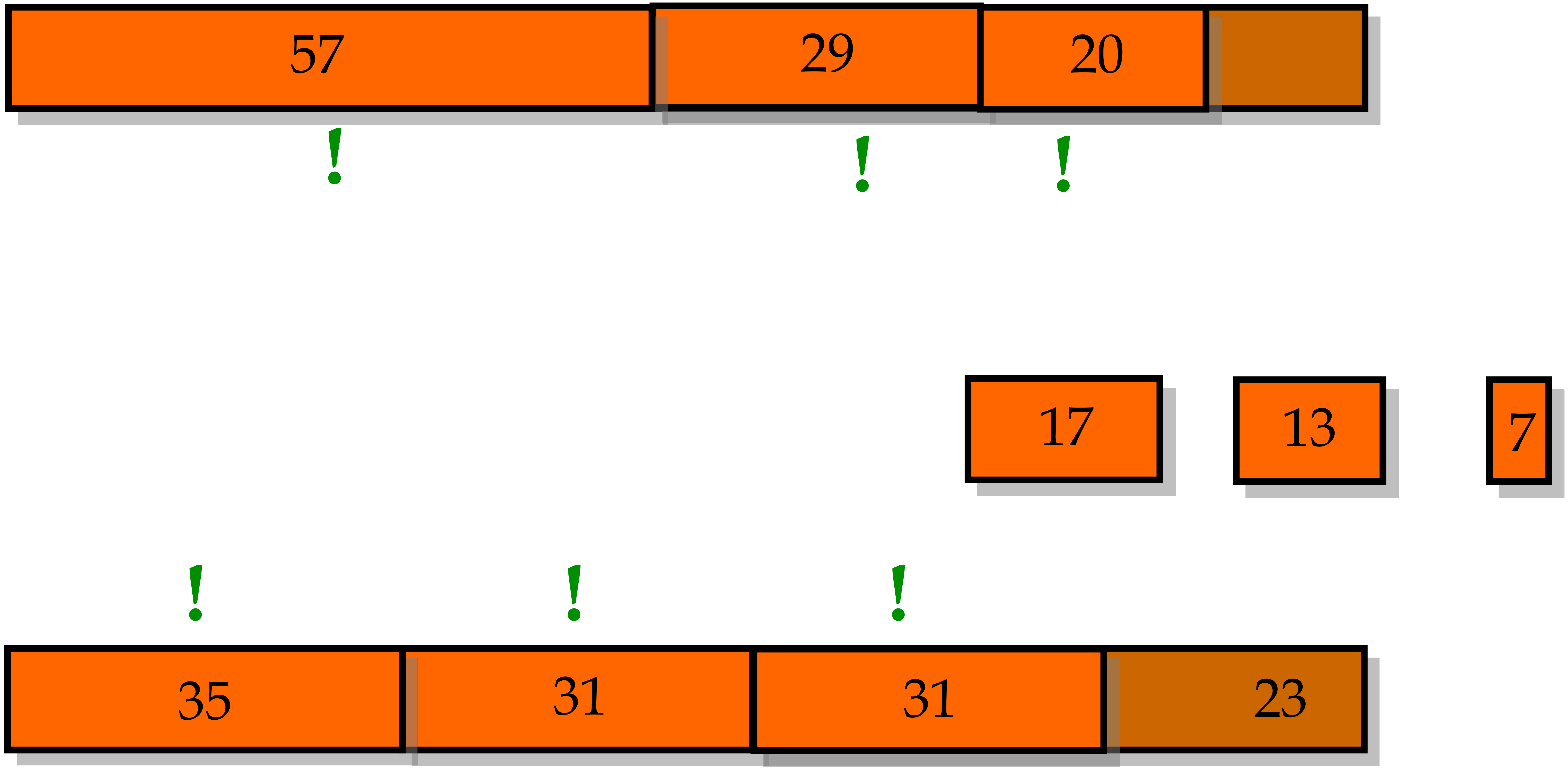
Keine Lösung?!



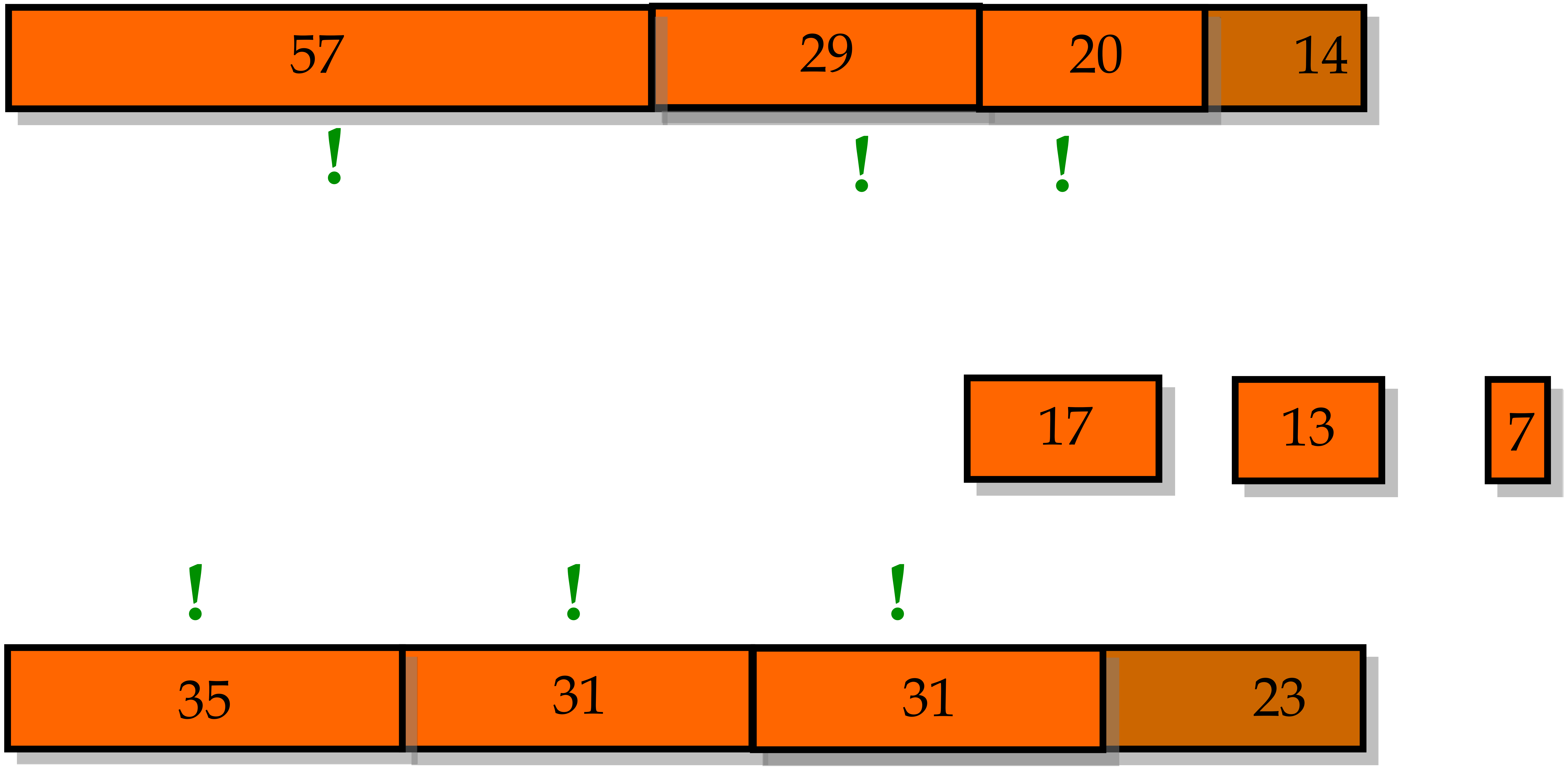
Keine Lösung?!



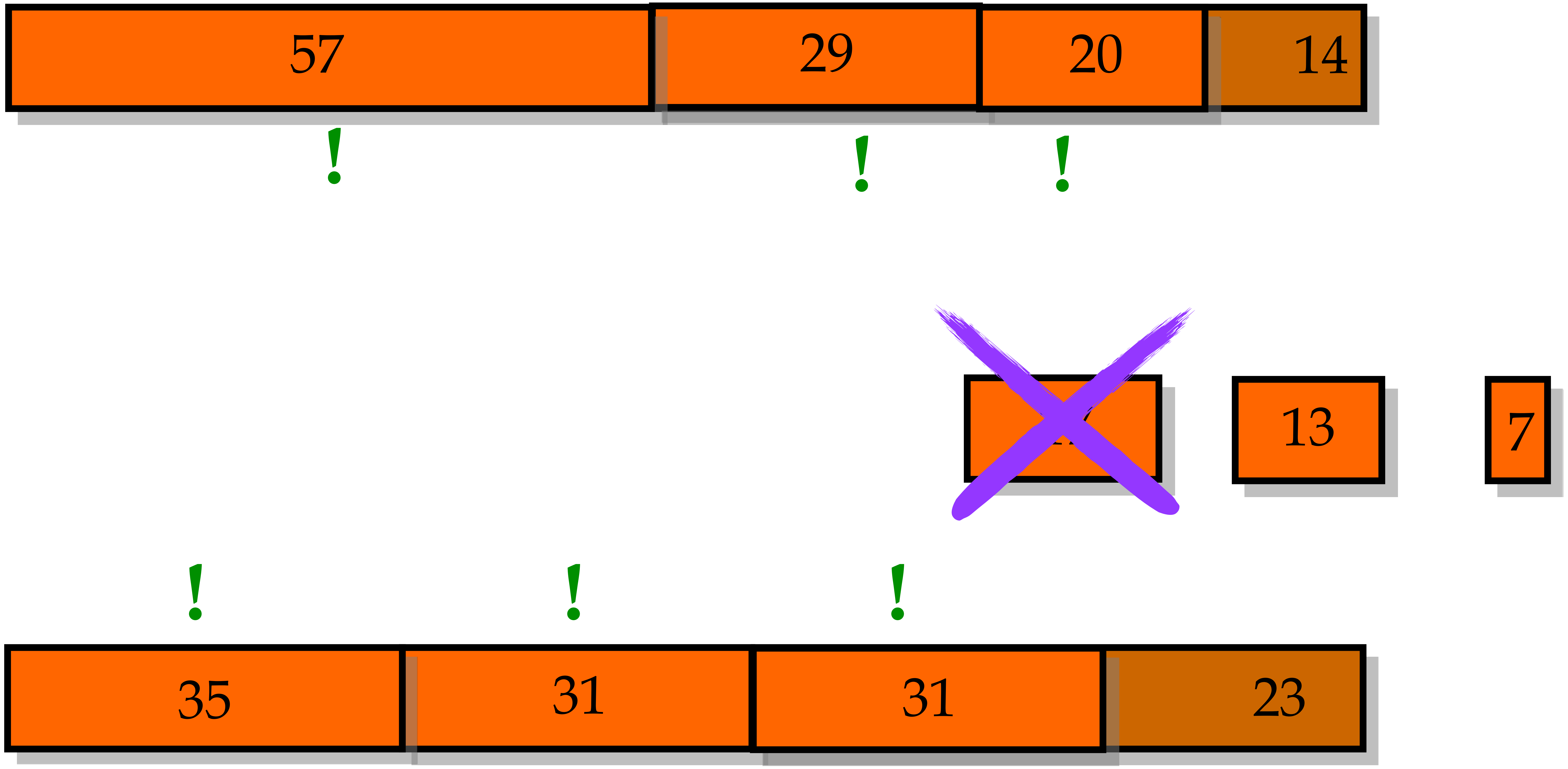
Keine Lösung?!



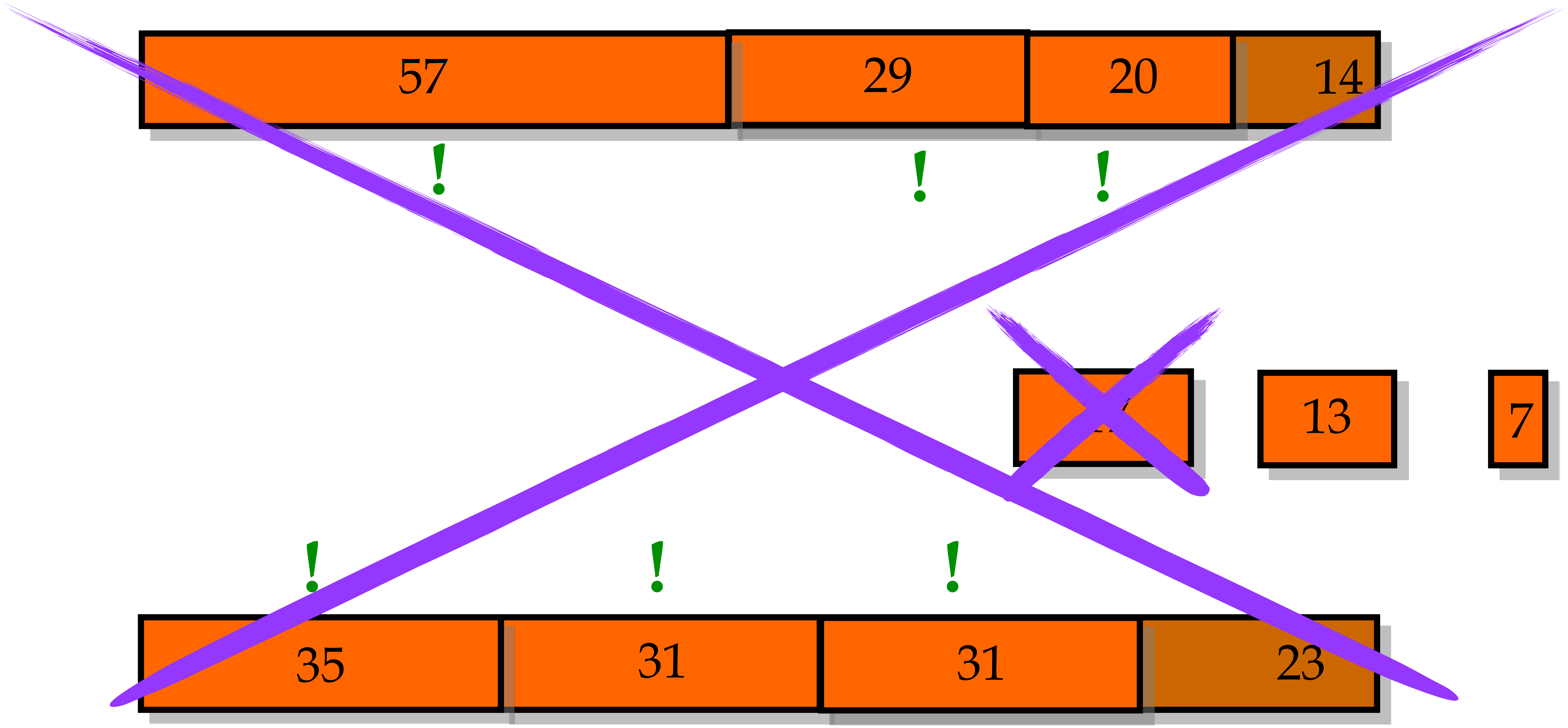
Keine Lösung?!



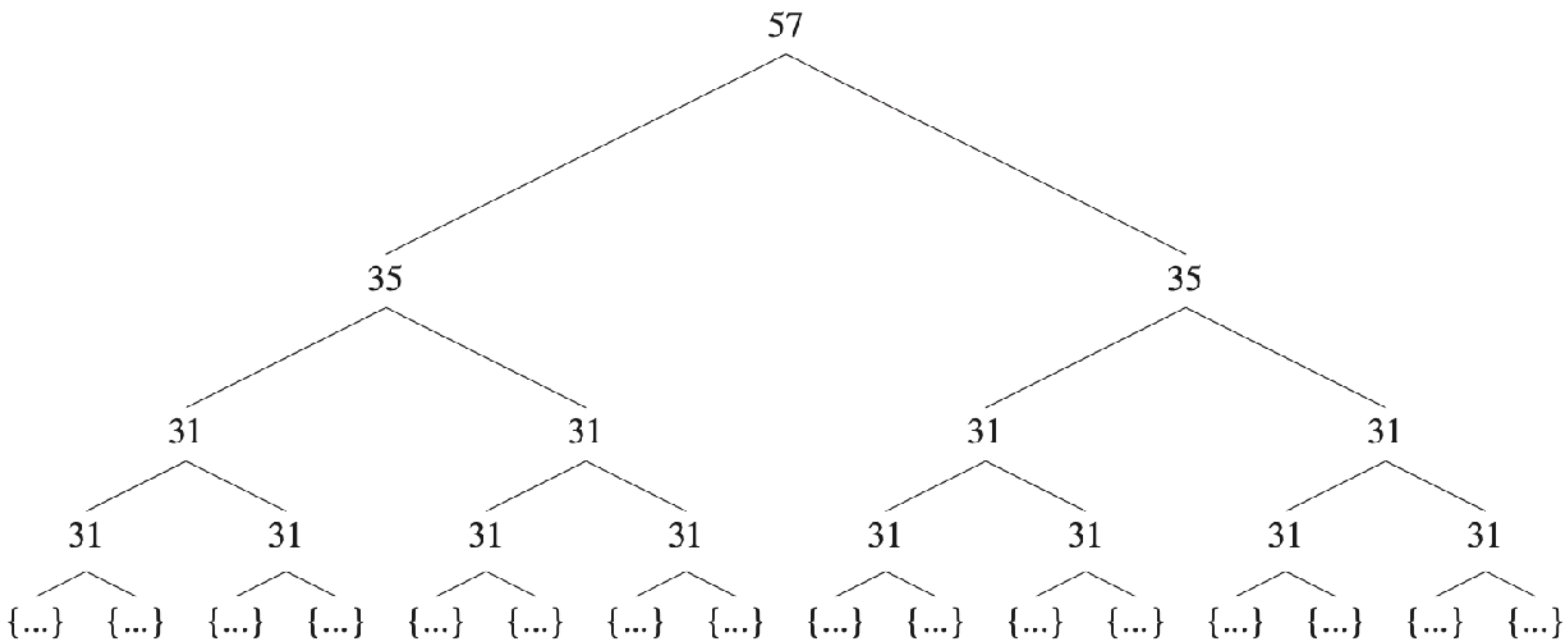
Keine Lösung?!



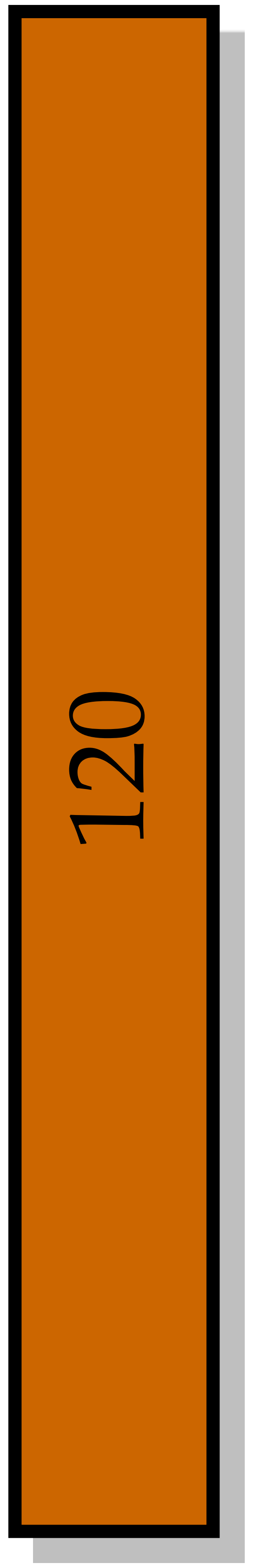
Keine Lösung?!

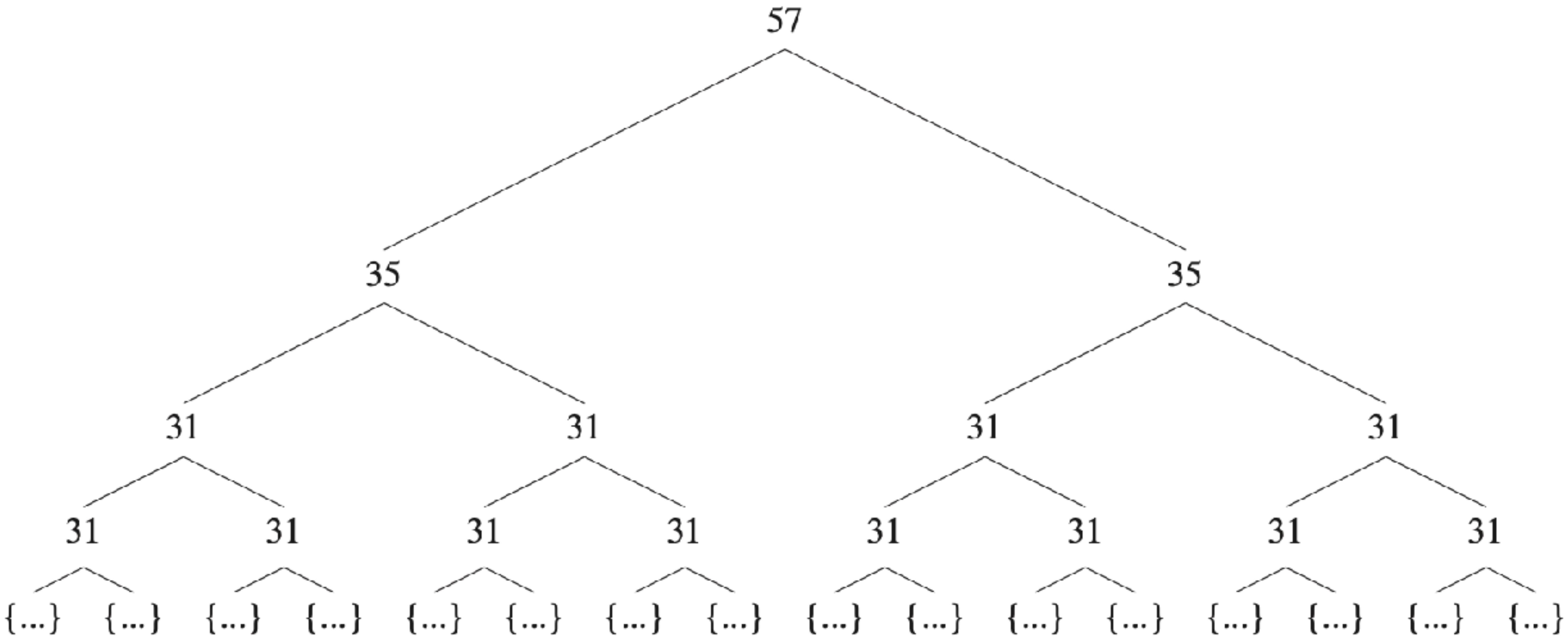


Enumerationsprinzip

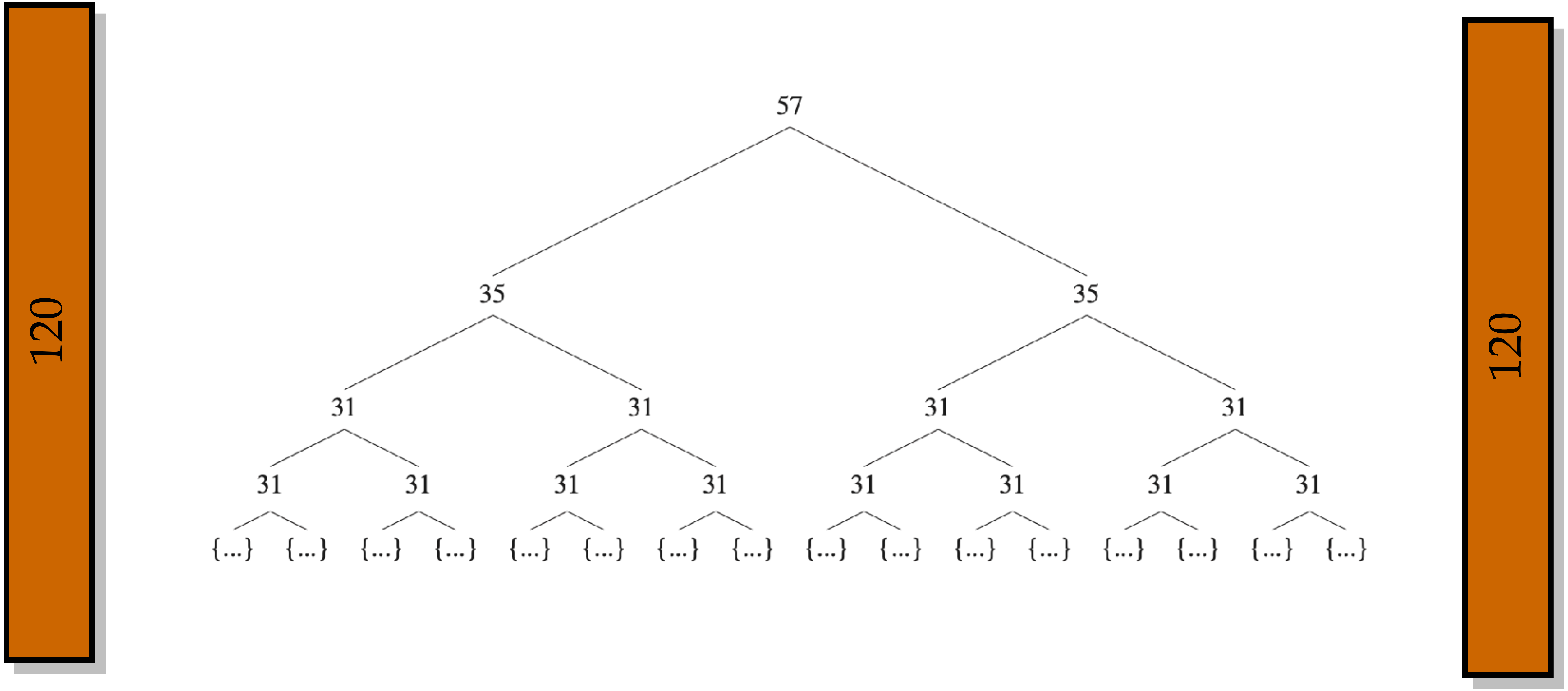


Enumerationsprinzip

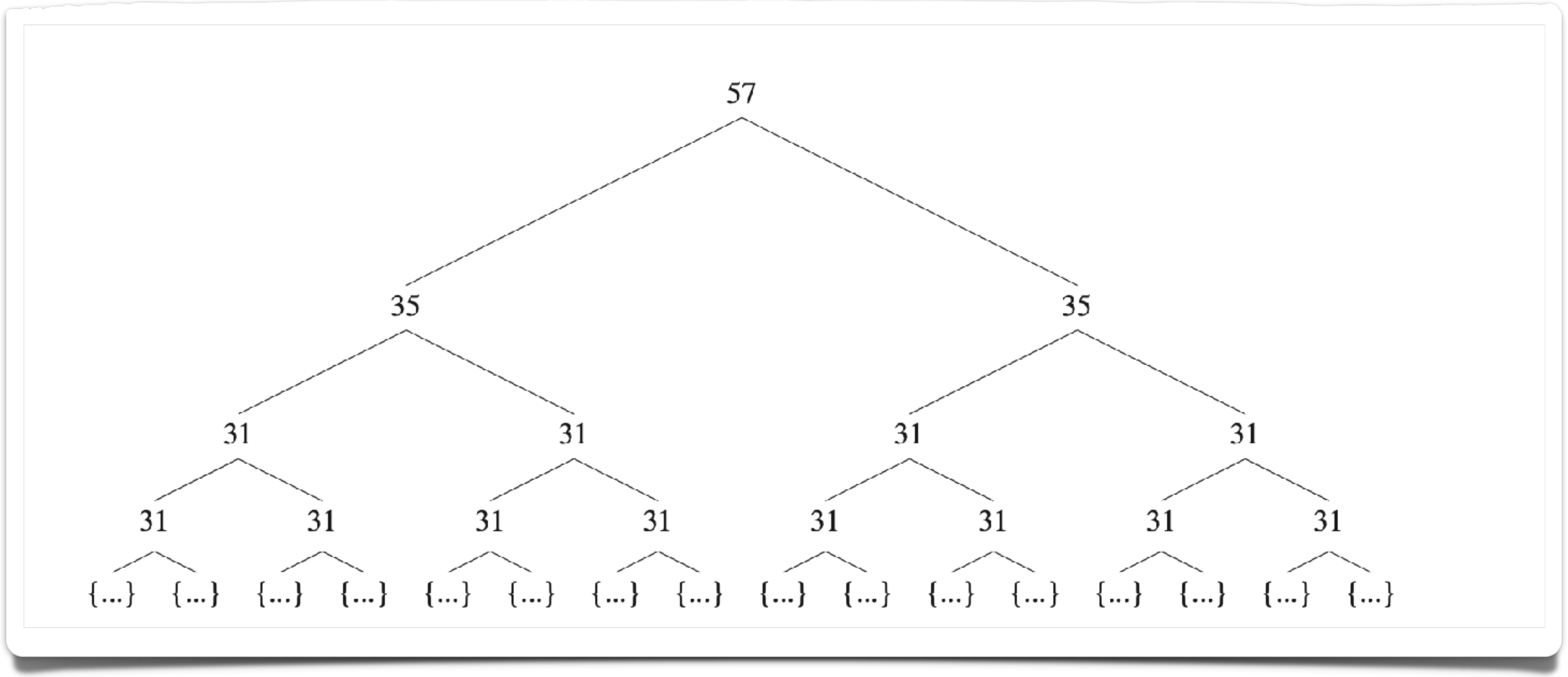




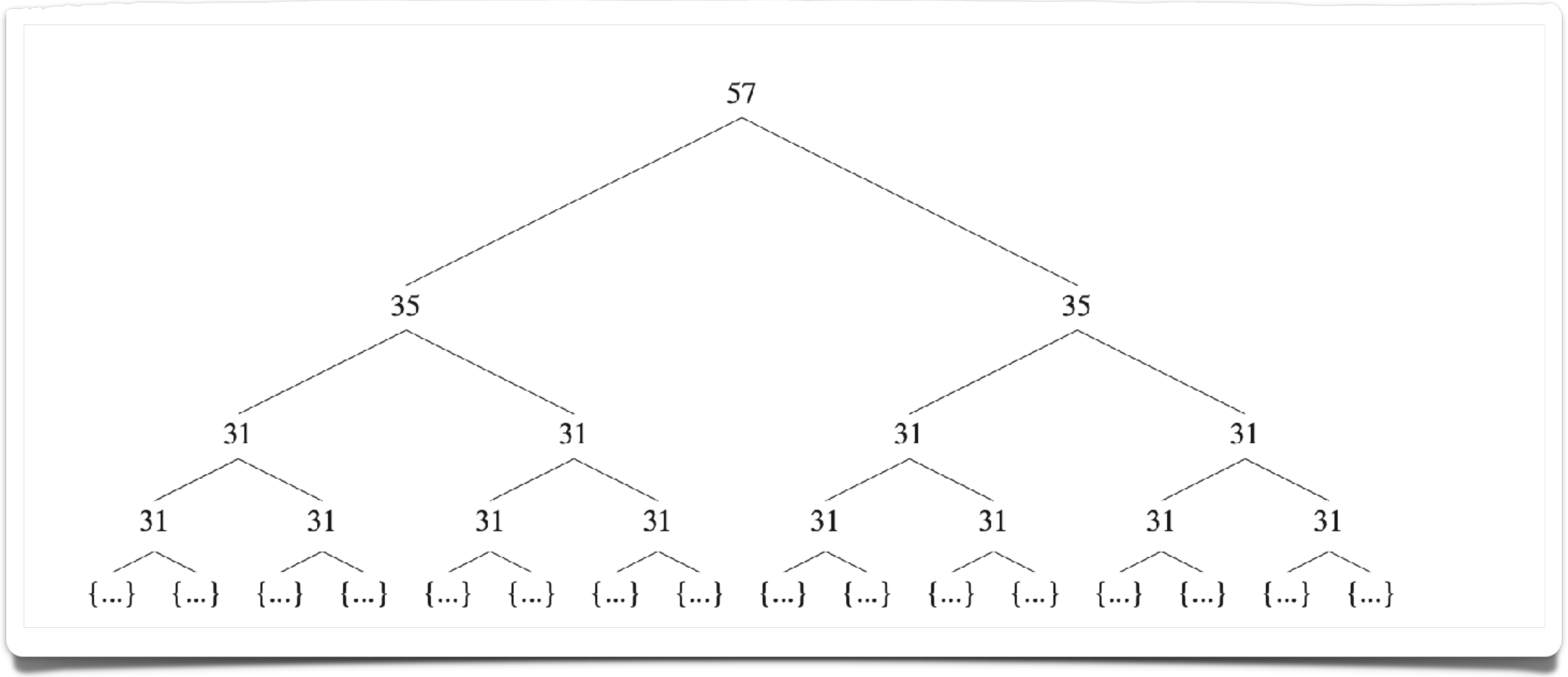
Enumerationsprinzip



Enumerationsprinzip

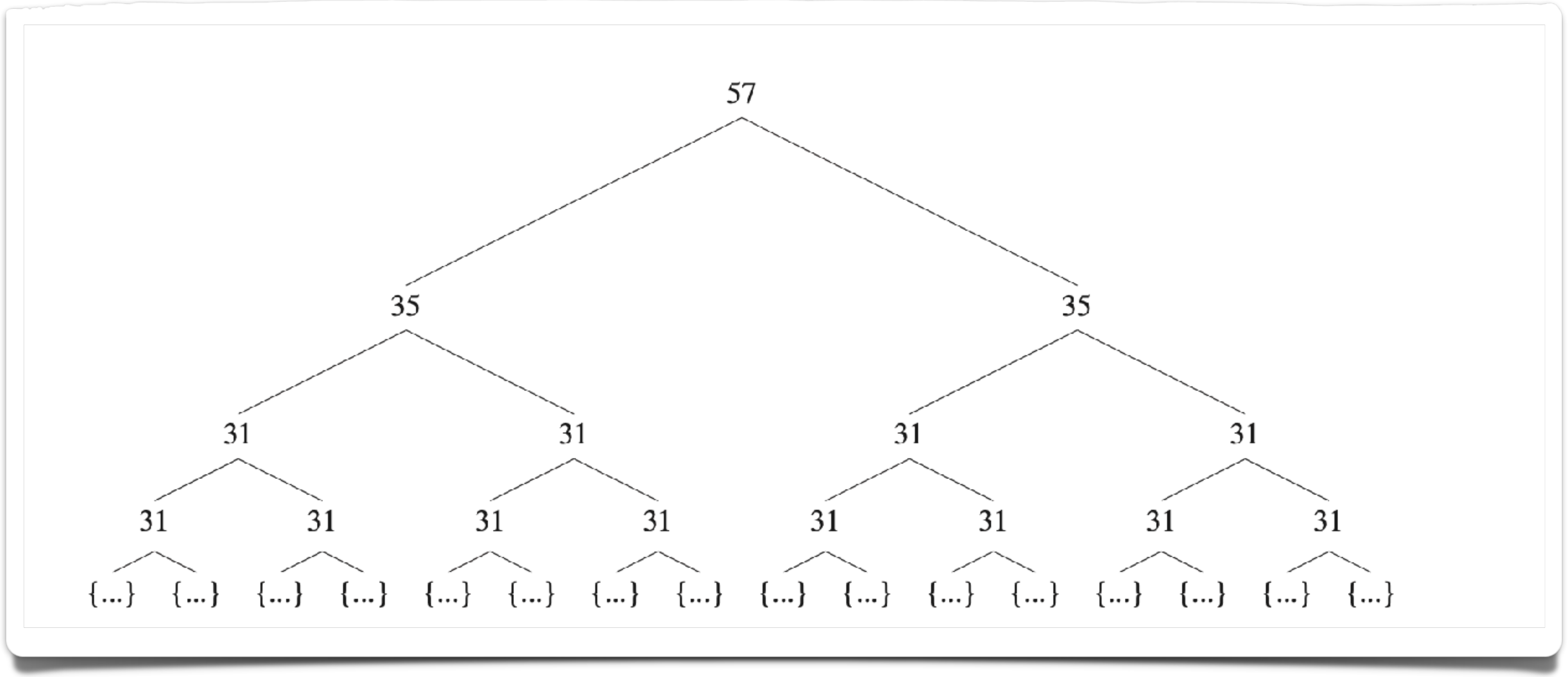


Enumerationsprinzip



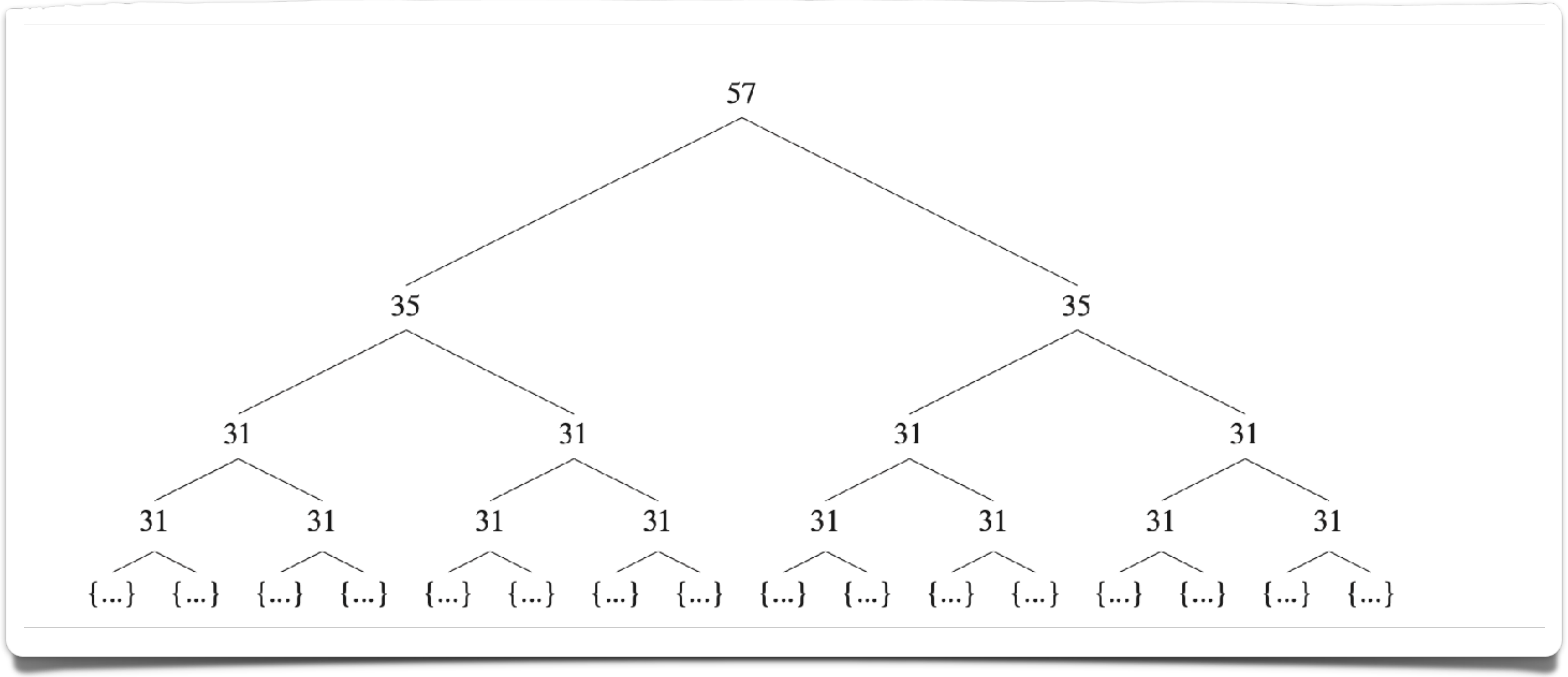
- Exponentiell viele Fälle!

Enumerationsprinzip



- Exponentiell viele Fälle!
- Wie geht das systematisch?

Enumerationsprinzip



- Exponentiell viele Fälle!
- Wie geht das systematisch?
- Wo kann man Arbeit sparen?

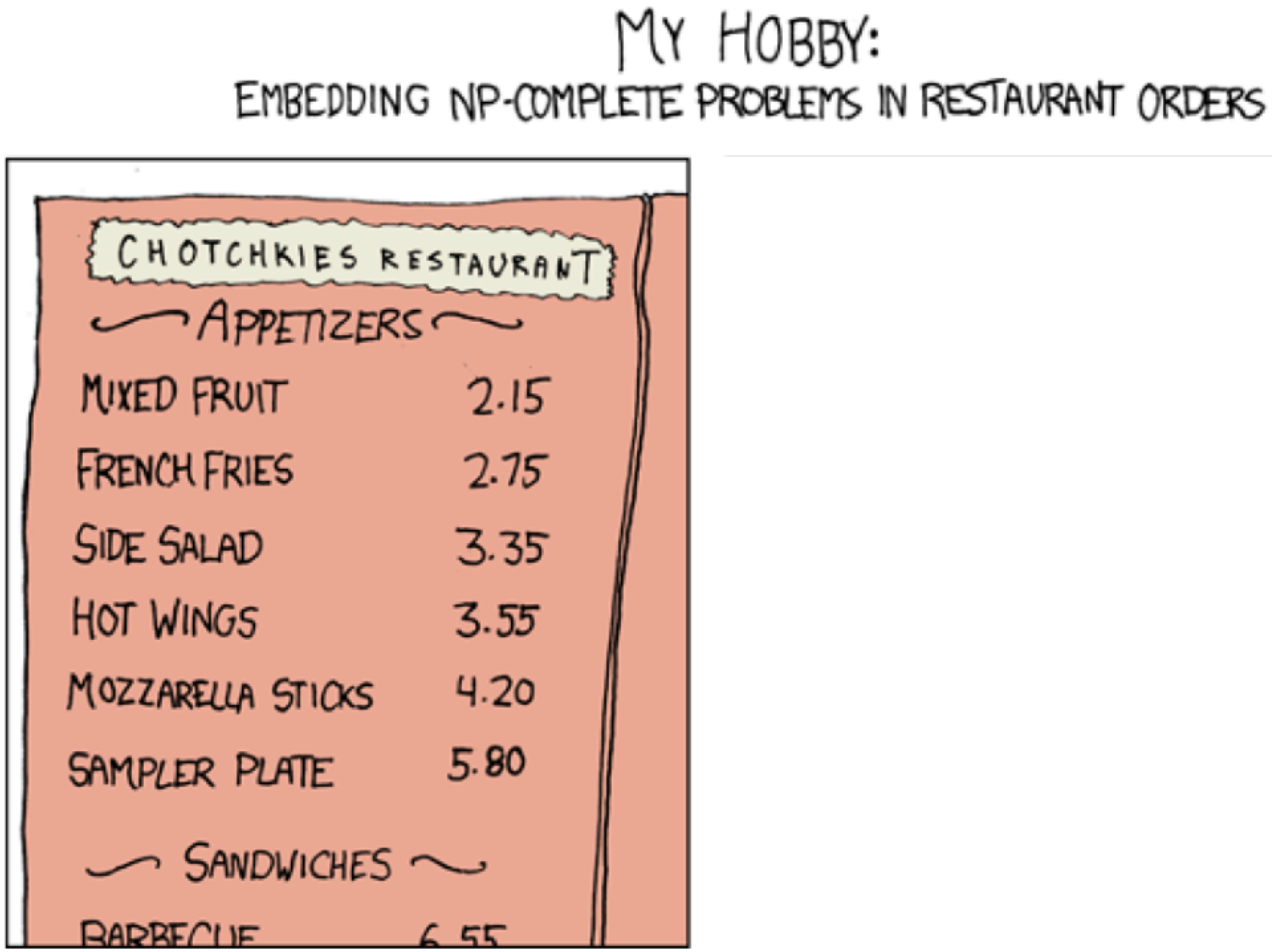
Alltagsanwendung: xkcd #287

Alltagsanwendung: xkcd #287

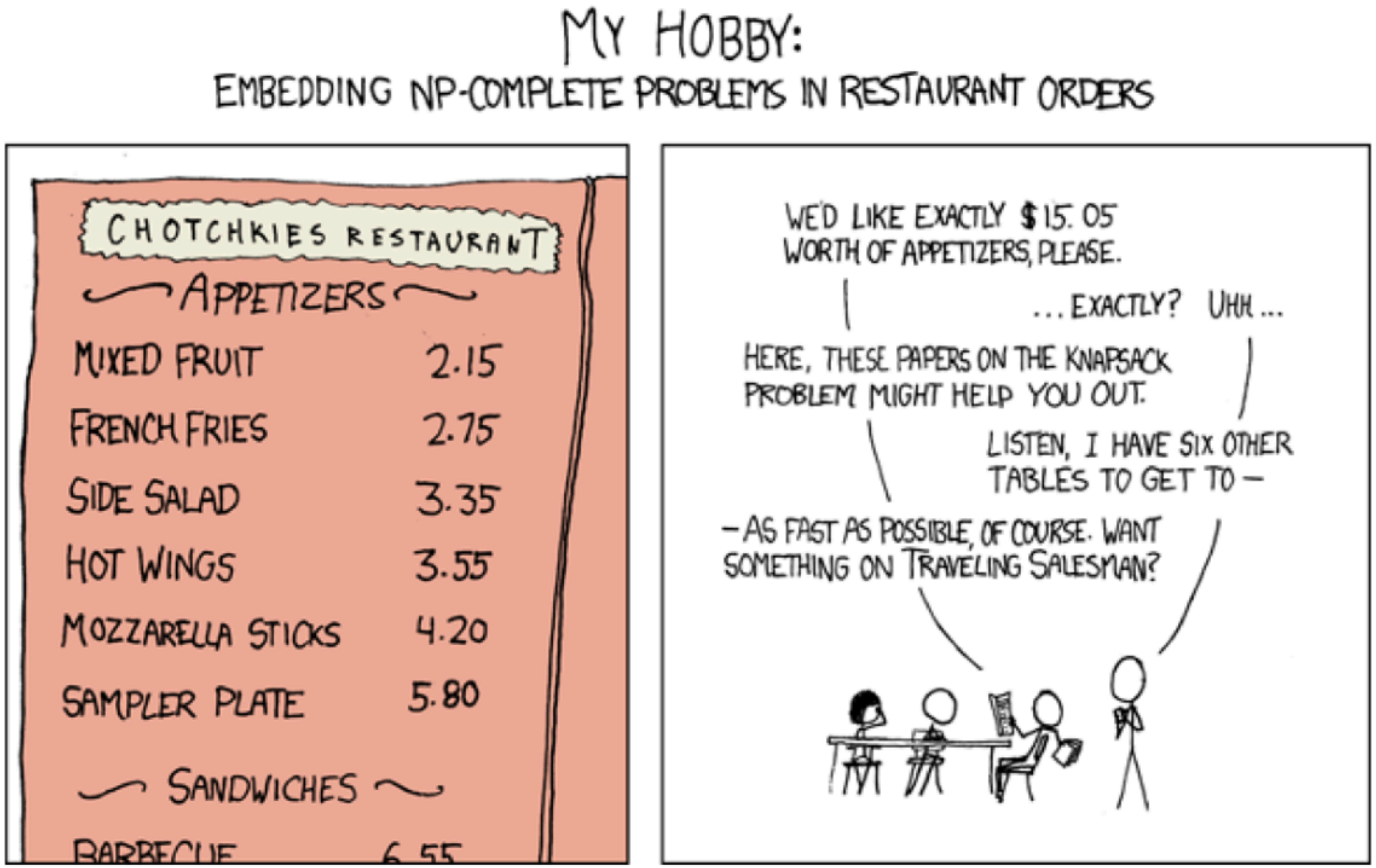
MY HOBBY:

EMBEDDING NP-COMPLETE PROBLEMS IN RESTAURANT ORDERS

Alltagsanwendung: xkcd #287



Alltagsanwendung: xkcd #287



Vielen Dank!

s.fekete@tu-bs.de