

5 Komplexität

*Algorithmen und Datenstrukturen 2
Sommer 2021*

Prof. Dr. Sándor Fekete

5.1 Die Klasse P: „Perfekte“ Algorithmen

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

2.schnell: in polynomieller Zeit

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

2.schnell: in polynomieller Zeit

3.optimal: eine bestmögliche Lösung

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

2.schnell: in polynomieller Zeit

3.optimal: eine bestmögliche Lösung

liefern.

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

2.schnell: in polynomieller Zeit

3.optimal: eine bestmögliche Lösung

liefern.

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

2.schnell: in polynomieller Zeit

3.optimal: eine bestmögliche Lösung

liefern.

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

2.schnell: in polynomieller Zeit

3.optimal: eine bestmögliche Lösung

liefern.

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

2.schnell: in polynomieller Zeit

3.optimal: eine bestmögliche Lösung

liefern.

Definition 5.1. *Ein algorithmisches Problem Π gehört zur Klasse P , wenn es für Π einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit gibt, der immer eine optimale Lösung findet.*

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

2.schnell: in polynomieller Zeit

3.optimal: eine bestmögliche Lösung

liefern.

Definition 5.1. Ein algorithmisches Problem Π gehört zur Klasse P , wenn es für Π einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit gibt, der immer eine optimale Lösung findet.

1	2	3	4	5	6
20	32	40	8	16	4
3	3	10	5	2	4
	8	32		11	12
	40	5		28	20
7	9			3	9
32	8	14			16
2	2	20		15	24
		3		40	4
				10	

Kann Knut die Klausur bestehen?

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

2.schnell: in polynomieller Zeit

3.optimal: eine bestmögliche Lösung

liefern.

Definition 5.1. Ein algorithmisches Problem Π gehört zur Klasse P , wenn es für Π einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit gibt, der immer eine optimale Lösung findet.

1	20	3	8	40	9
2	32	3	10	32	5
3	40	10	10	5	11
4	8	5	10	28	3
5	16	2	16	20	9
6	4	4	13	16	10

Kann Knut die Klausur bestehen?

Achtung:
Das klassifiziert Probleme,
nicht Algorithmen!

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

2.schnell: in polynomieller Zeit

3.optimal: eine bestmögliche Lösung

liefern.

Definition 5.1. Ein algorithmisches Problem Π gehört zur Klasse P , wenn es für Π einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit gibt, der immer eine optimale Lösung findet.

Fractional Knapsack

1	Nummer	2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4

7	8	10	11	12	13
32	40	32	28	20	16
2	9	5	3	9	24

9	14	15
8	20	40
2	3	10

Kann Knut die Klausur bestehen?

Achtung:

Das klassifiziert Probleme,
nicht Algorithmen!

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

2.schnell: in polynomieller Zeit

3.optimal: eine bestmögliche Lösung

liefern.

Definition 5.1. Ein algorithmisches Problem Π gehört zur Klasse P , wenn es für Π einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit gibt, der immer eine optimale Lösung findet.

Fractional Knapsack

1	2	3	4	5	6
20	32	40	8	16	
3	3	10	10		

Algorithmus 1.4 Greedy-Algorithmus für FRACTIONAL KNAPSACK
Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$
Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

Kann Knut die Klausur bestehen?

Achtung:

Das klassifiziert Probleme,
nicht Algorithmen!

Erwünschte Eigenschaften von Algorithmen

Ziele: Ein „perfekter“ Algorithmus sollte

1.immer: für jede beliebige Instanz

2.schnell: in polynomieller Zeit

3.optimal: eine bestmögliche Lösung

liefern.

Definition 5.1. Ein algorithmisches Problem Π gehört zur Klasse P , wenn es für Π einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit gibt, der immer eine optimale Lösung findet.

0-1 Knapsack ?!

1	2	3	4	5	6
20	32	40	8	16	4
3	3	10	5	2	4

7	8	9	10	11	12	13
32	40	8	32	28	20	16
2	9	2	5	3	9	10

14	15	16	17
20	40	24	16
3	10	4	4

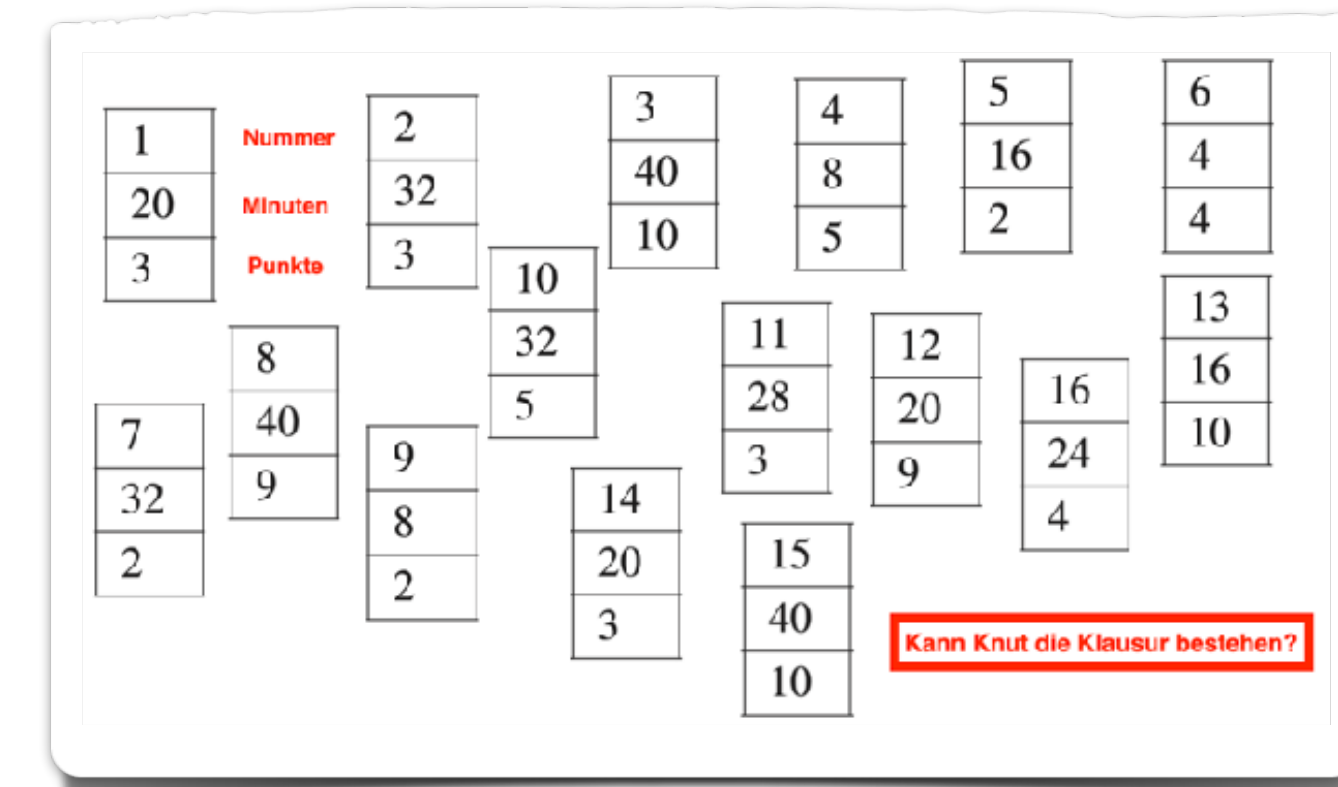
Kann Knut die Klausur bestehen?

Achtung:

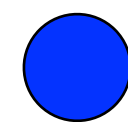
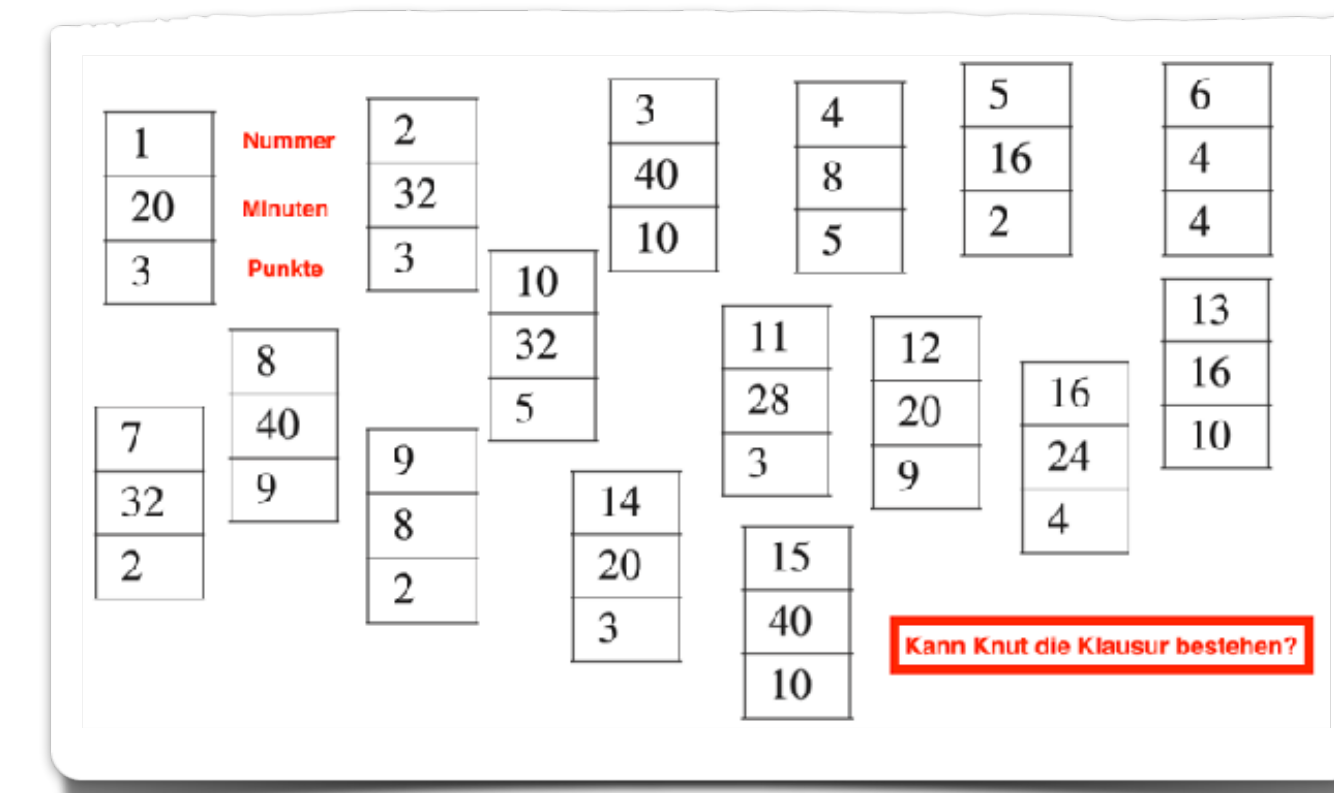
Das klassifiziert Probleme,
nicht Algorithmen!

Das Dreieck der Perfektion

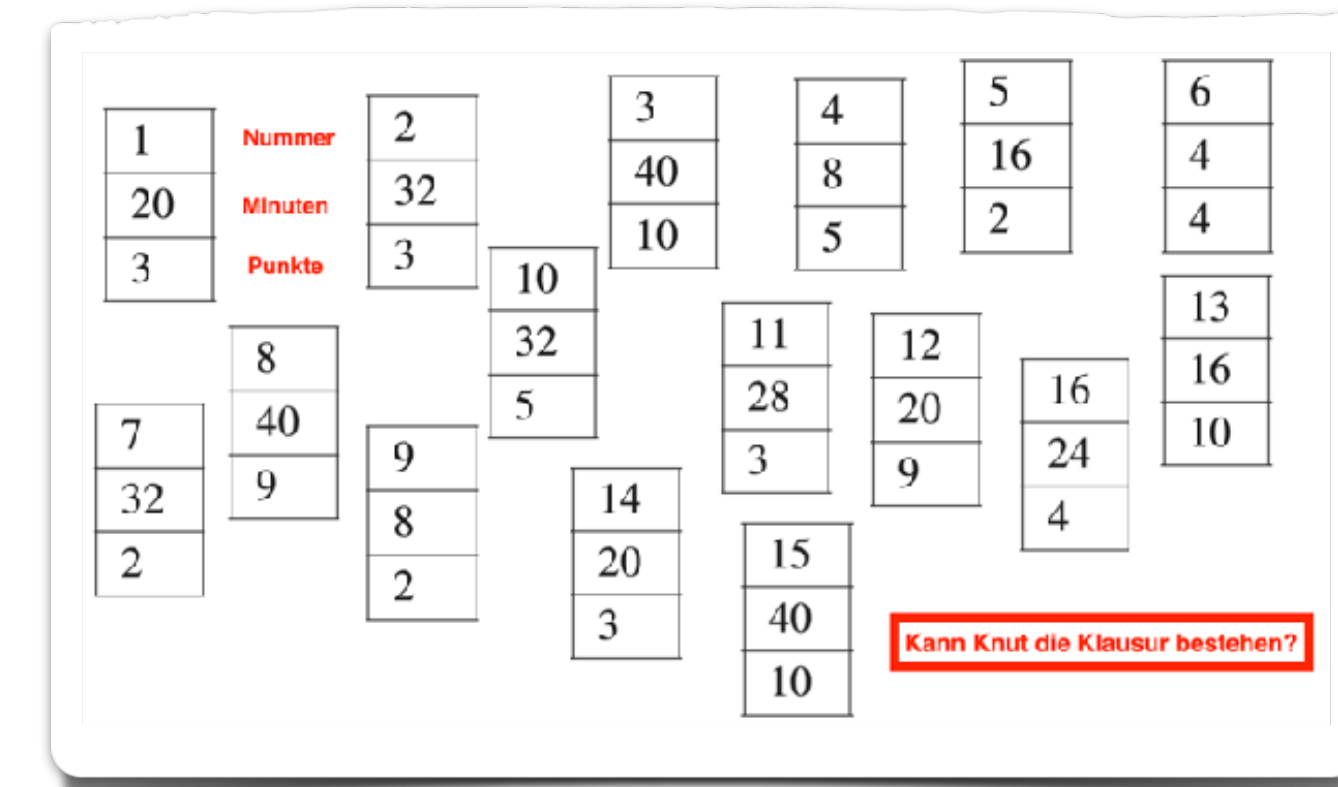
Das Dreieck der Perfektion



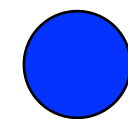
Das Dreieck der Perfektion



Das Dreieck der Perfektion



1. immer

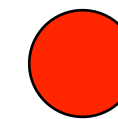
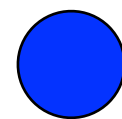


Das Dreieck der Perfektion

1	Nummer	2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4
		8	32	11	12	13
			5	28	20	16
7		9		3	9	10
32		40	14		16	
2		9	20	15	24	
		8	3	40	4	
		2		10		

Kann Knut die Klausur bestehen?

1. immer

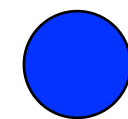


Das Dreieck der Perfektion

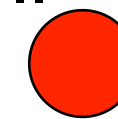
1	Nummer	2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4
		8	32	11	12	13
			5	28	20	16
7		9		3	9	10
32		40	14			
2		9	20	15	16	
		8	3	40	24	
		2		10	4	

Kann Knut die Klausur bestehen?

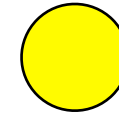
1. immer



2. schnell



Das Dreieck der Perfektion

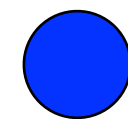


1	Nummer	2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4

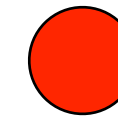
7	8	9	10	11	12	13
32	40	9	32	28	20	16
2	9	8	5	3	9	24
		2	14	15	4	10
			20	40		
			3	10		

Kann Knut die Klausur bestehen?

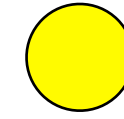
1. immer



2. schnell



Das Dreieck der Perfektion



3. optimal

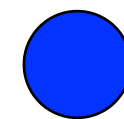
1	Nummer	2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4

7	8	9	10	11	12	13
32	40	9	32	28	20	16
2	9	8	5	3	9	24

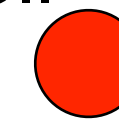
14	15	16	17	18
20	40	16	4	10
3	10	4	4	10

Kann Knut die Klausur bestehen?

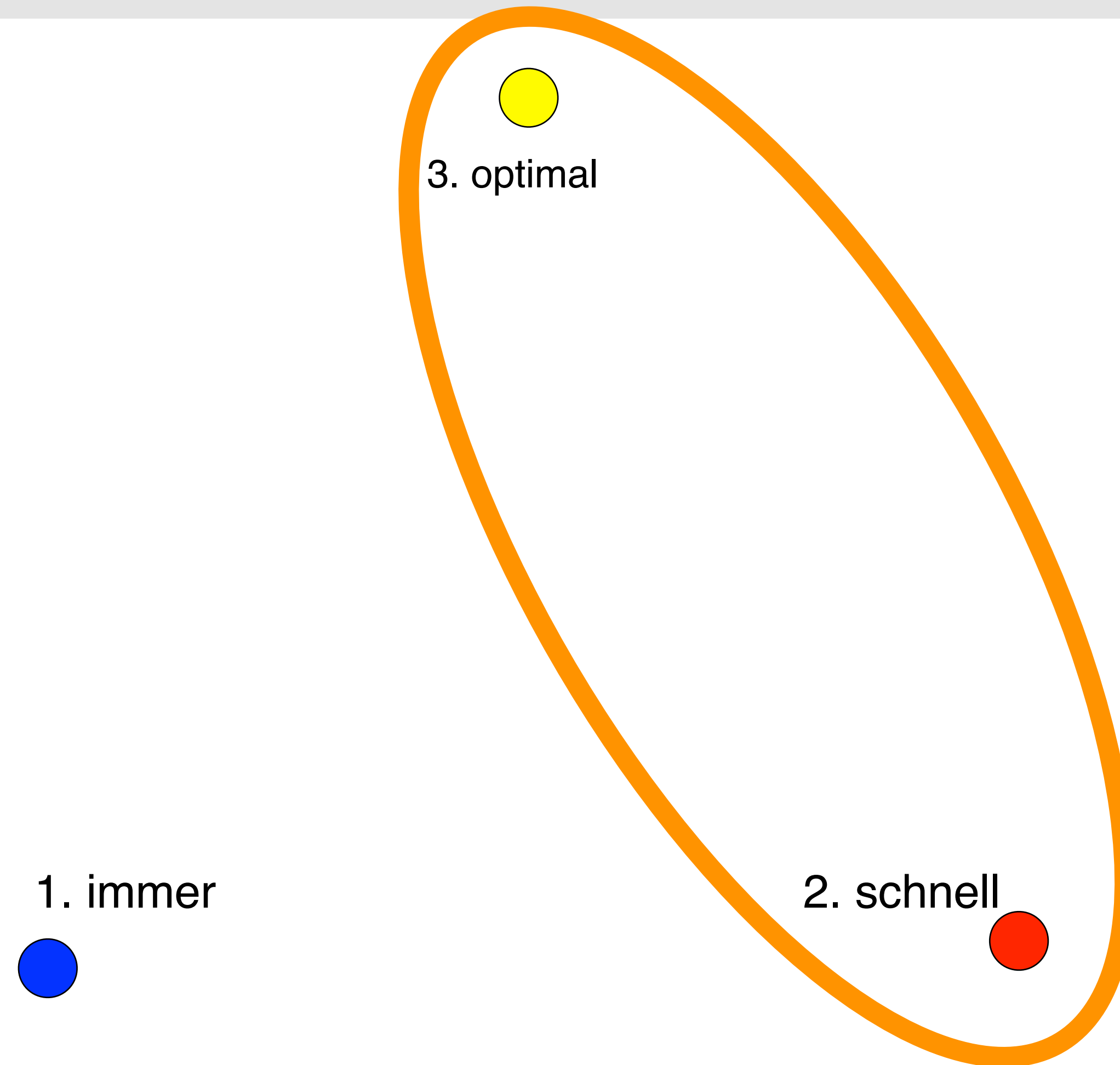
1. immer



2. schnell



Das Dreieck der Perfektion



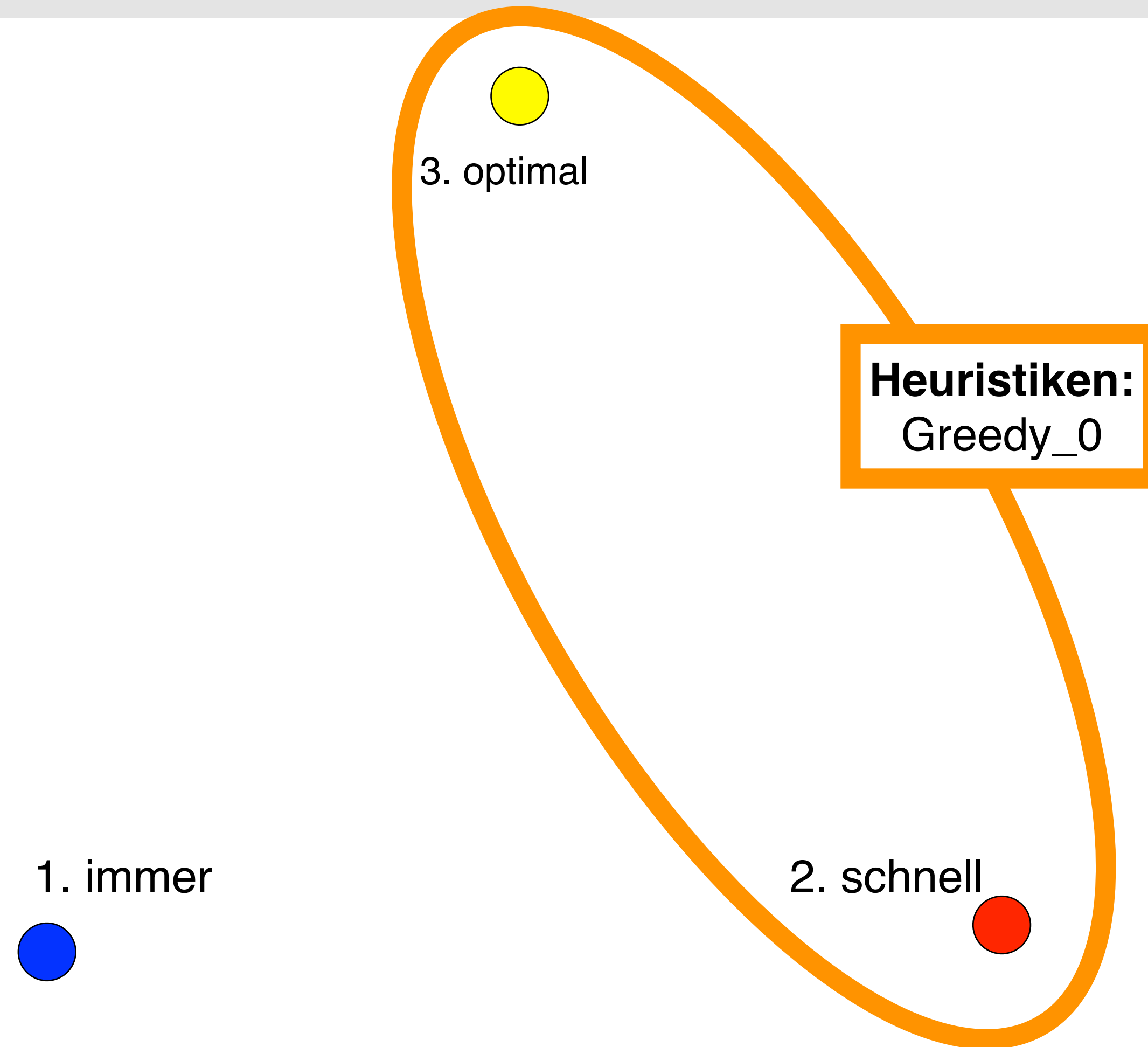
1	Nummer	2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4

7	8	9	10	11	12	13
32	40	9	32	28	20	16
2	9	8	5	3	9	24

14	15	16	17
20	15	4	10
3	40	10	

Kann Knut die Klausur bestehen?

Das Dreieck der Perfektion

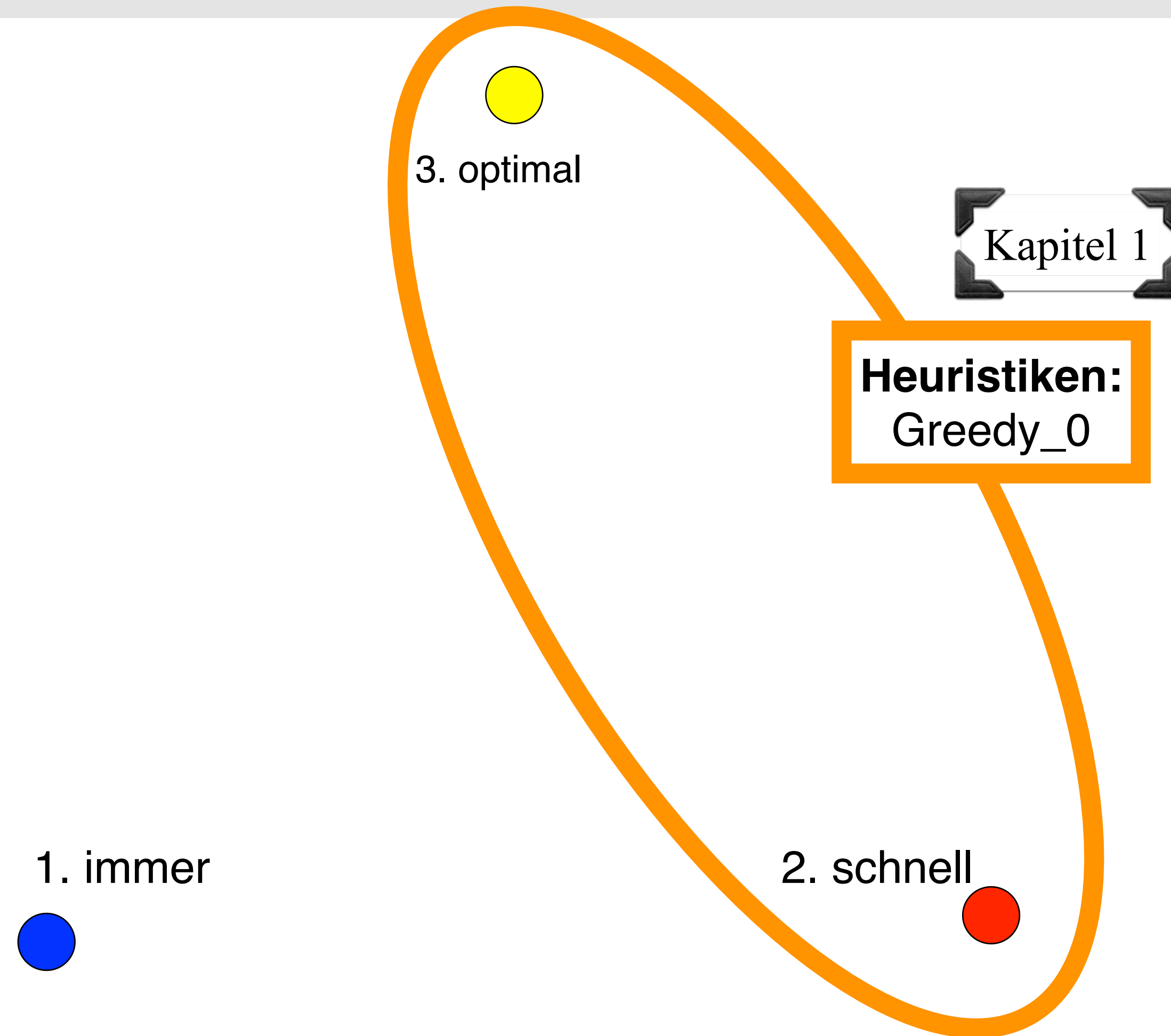


1	Nummer	2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4

7	8	9	10	11	12	13
32	40	9	32	28	20	16
2	9	8	5	3	9	24
		2	14	15	4	10
			20	40		
			3	10		

Kann Knut die Klausur bestehen?

Das Dreieck der Perfektion



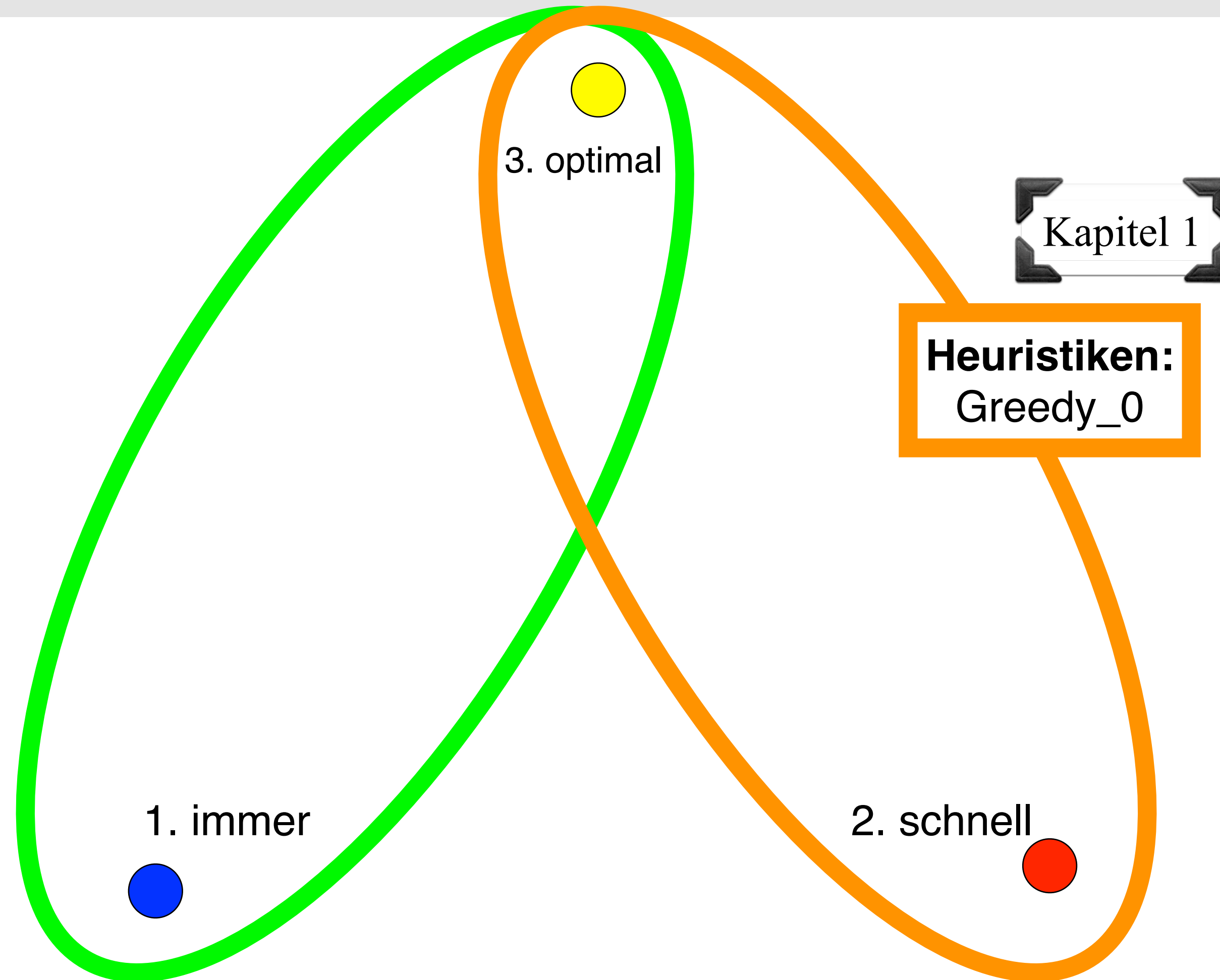
1	Nummer	2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4

7	8	9	10	11	12	13
32	40	9	32	28	20	16
2	9	8	5	3	9	24

14	15	16	17
20	40	16	4
3	10	4	10

Kann Knut die Klausur bestehen?

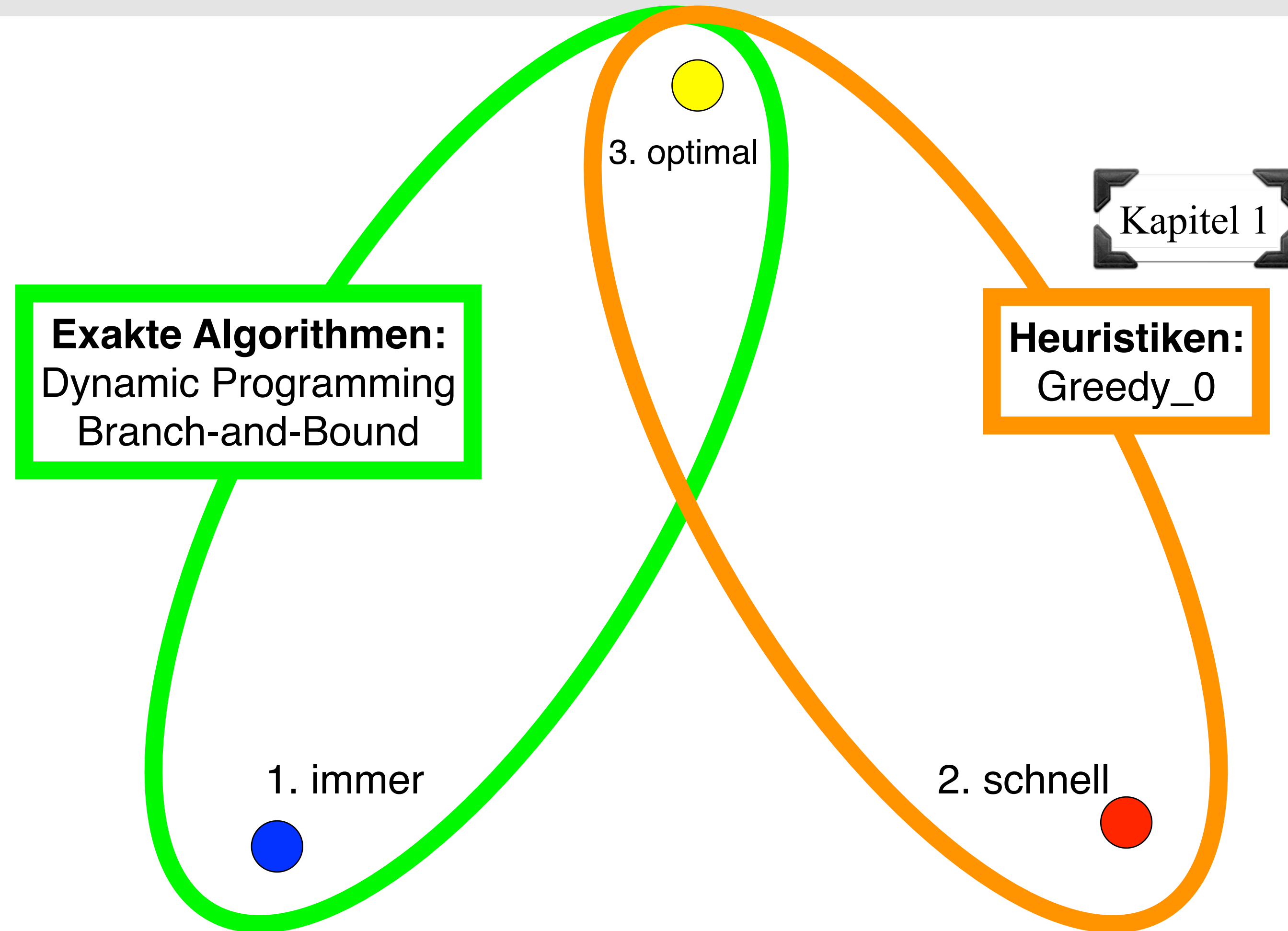
Das Dreieck der Perfektion



1	Nummer	2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4
		8	32	11	12	13
7		40	5	28	20	16
32		9		3	9	16
2		8	14			10
		2	20	15		
			3	40		
				10		

Kann Knut die Klausur bestehen?

Das Dreieck der Perfektion



1	2	3	4	5	6
20	32	40	8	16	4
3	3	10	5	2	4
	8	32	11	12	13
	40	5	28	20	16
7	9		3	9	10
32	8	14		16	
2	2	20	15	24	
		3	40	4	
			10		

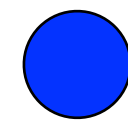
Kann Knut die Klausur bestehen?

Das Dreieck der Perfektion

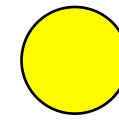
Kapitel 2

Exakte Algorithmen:
Dynamic Programming
Branch-and-Bound

1. immer



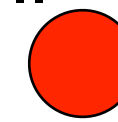
3. optimal



Kapitel 1

Heuristiken:
Greedy_0

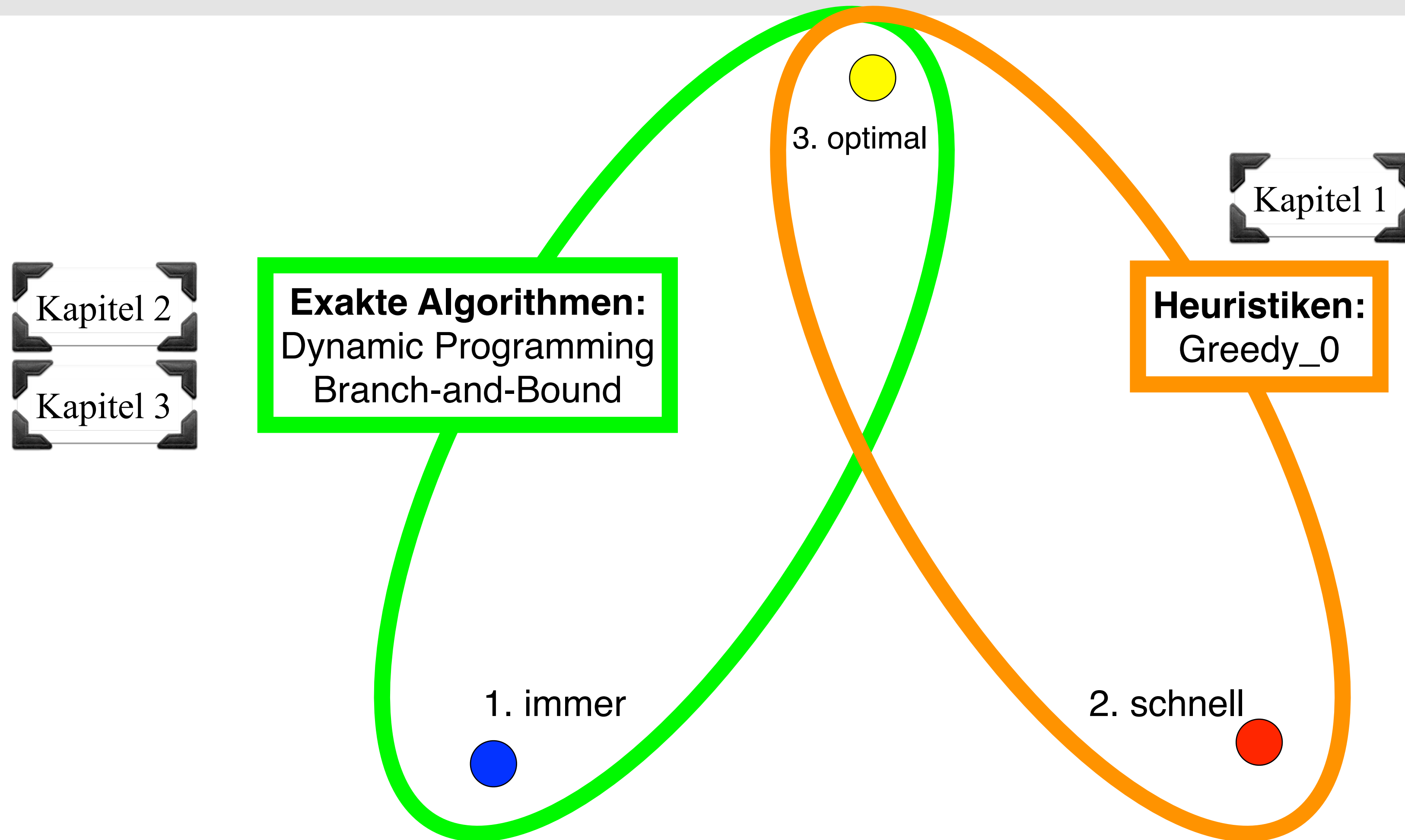
2. schnell



1	2	3	4	5	6
20	32	40	8	16	4
3	3	10	5	2	4
	8	32	11	12	13
7	40	5	28	20	16
32	9	9	3	9	16
2	8	14	15	24	10
	2	20	40	4	
		3	10		

Kann Knut die Klausur bestehen?

Das Dreieck der Perfektion



1	2	3	4	5	6
20	32	40	8	16	4
3	3	10	5	2	4
	8	32	11	12	13
7	40	5	28	20	16
32	9	9	3	9	16
2	8	14	15	24	10
	2	20	40	4	
		3	10		

Kann Knut die Klausur bestehen?

Das Dreieck der Perfektion

Kapitel 2
Kapitel 3

Exakte Algorithmen:
Dynamic Programming
Branch-and-Bound

Kapitel 1

Heuristiken:
Greedy_0

1. immer

3. optimal

2. schnell

1	Nummer	2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4
			10			
		8	32	11	12	13
7	40	9	5	28	20	16
32	9	8		3	9	24
2		2	14			4
			20	15		
			3	40		
				10		

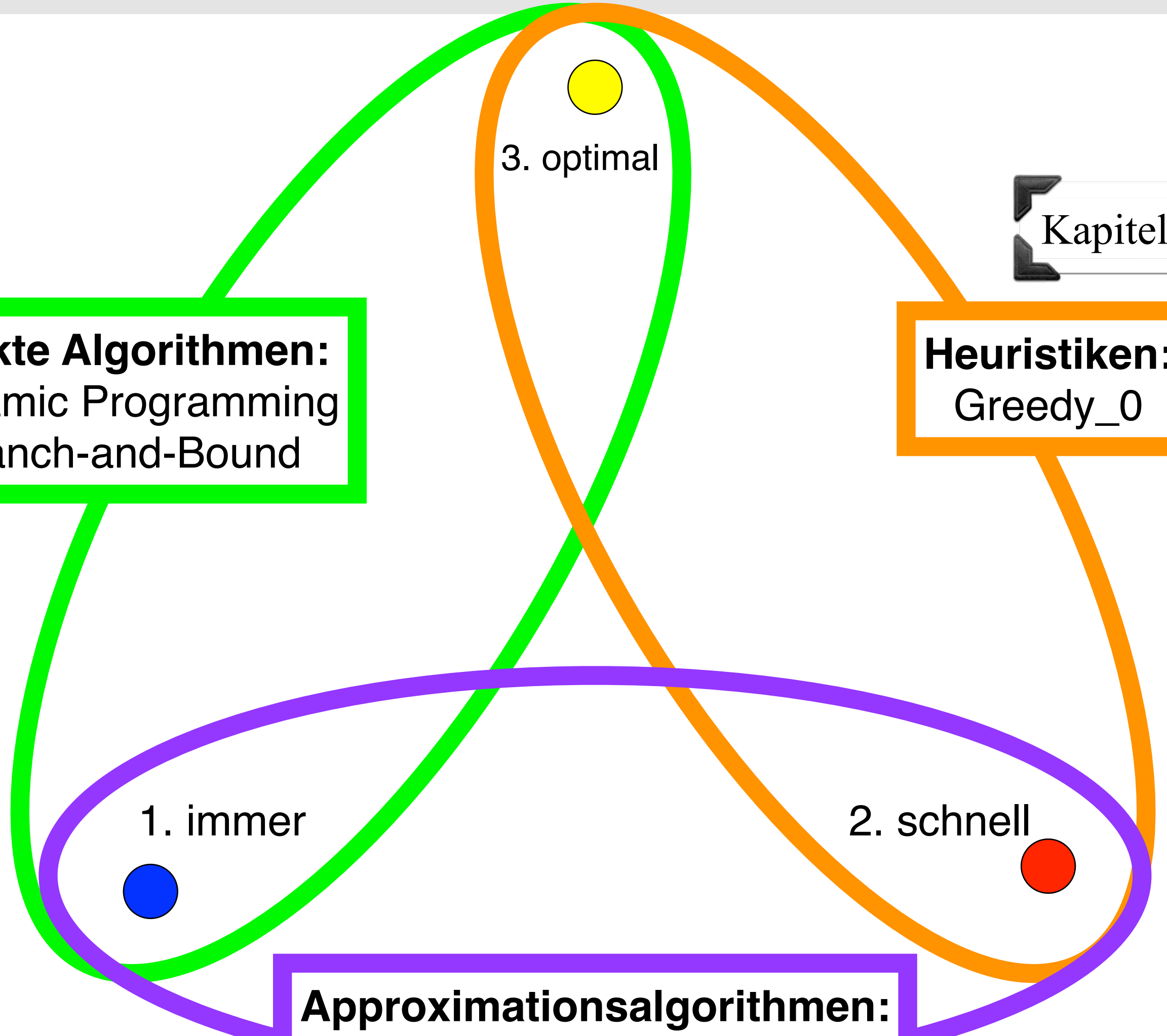
Kann Knut die Klausur bestehen?

Das Dreieck der Perfektion

Kapitel 2
Kapitel 3

Exakte Algorithmen:
Dynamic Programming
Branch-and-Bound

Kapitel 1
Heuristiken:
Greedy_0

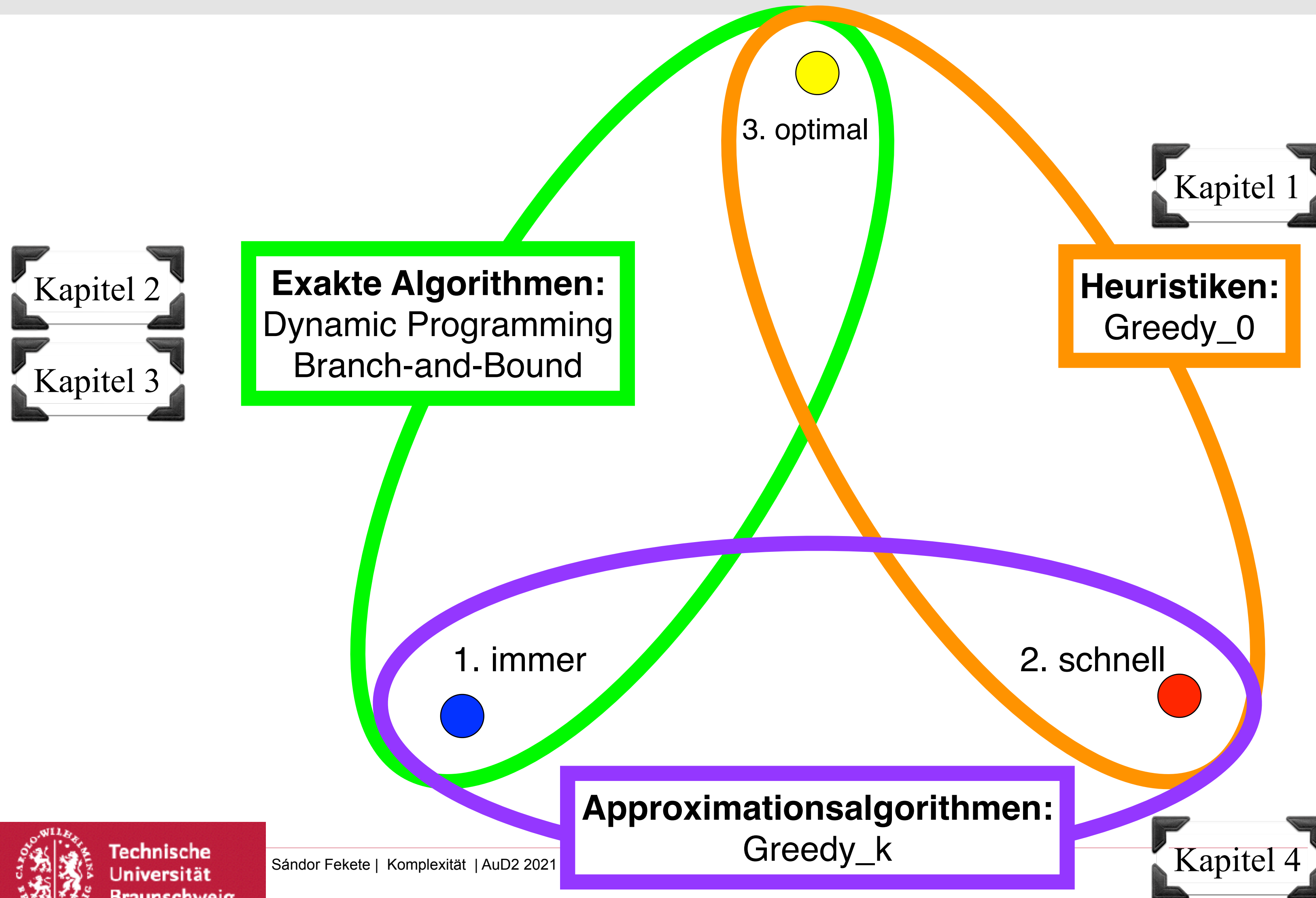


Approximationsalgorithmen:
Greedy_k

1	Nummer	2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4
			10			13
		8	32	11	12	16
7	40		5	28	20	16
32	9	9		3	9	24
2		8	14			4
		2	20	15		
			3	40		
				10		

Kann Knut die Klausur bestehen?

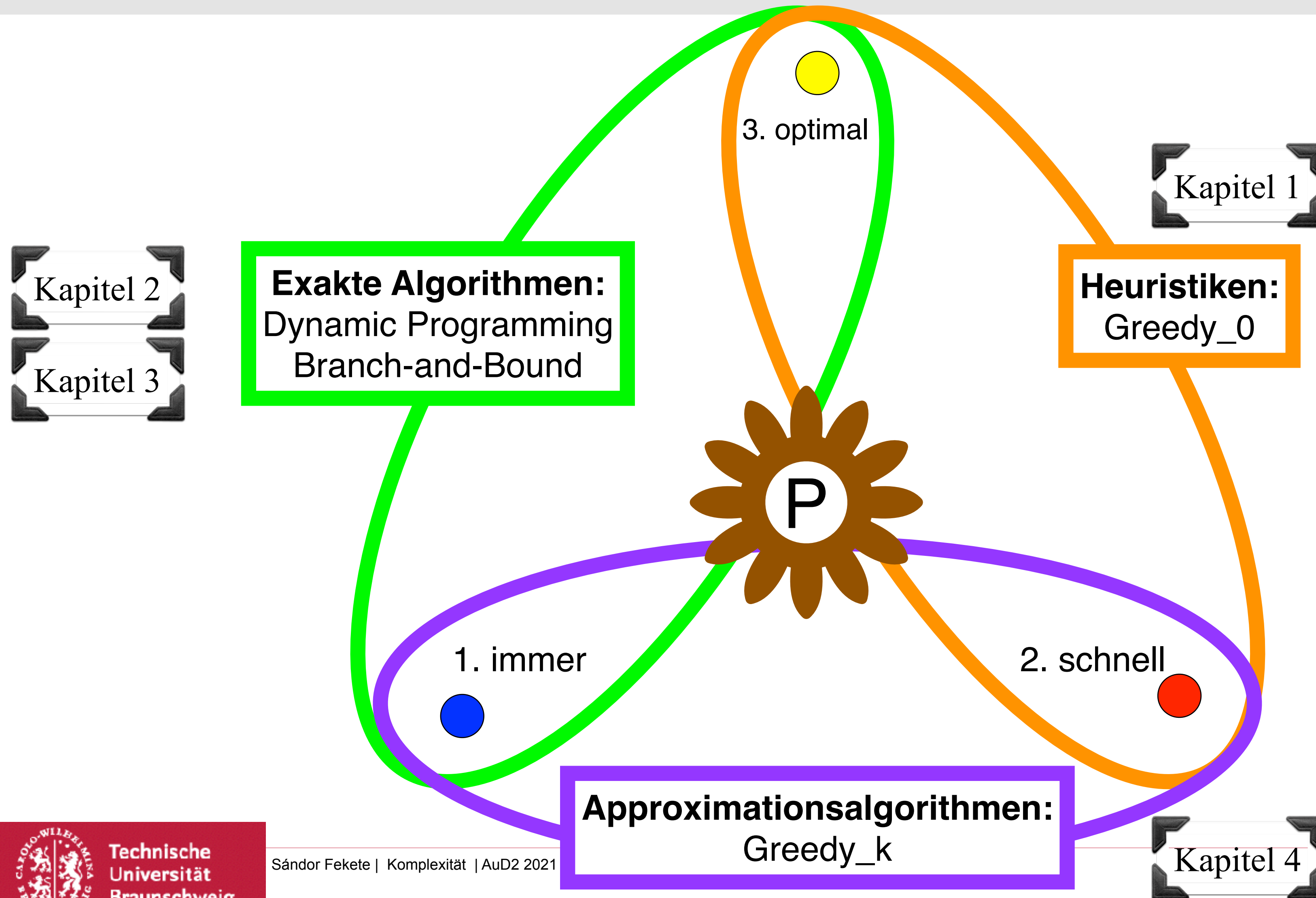
Das Dreieck der Perfektion



1	Nummer	2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4
			10			
		8	32	11	12	13
7		40	5	28	20	16
32		9		3	9	16
2						24
		9	14			4
		8	20	15		
		2	3	40		
				10		

Kann Knut die Klausur bestehen?

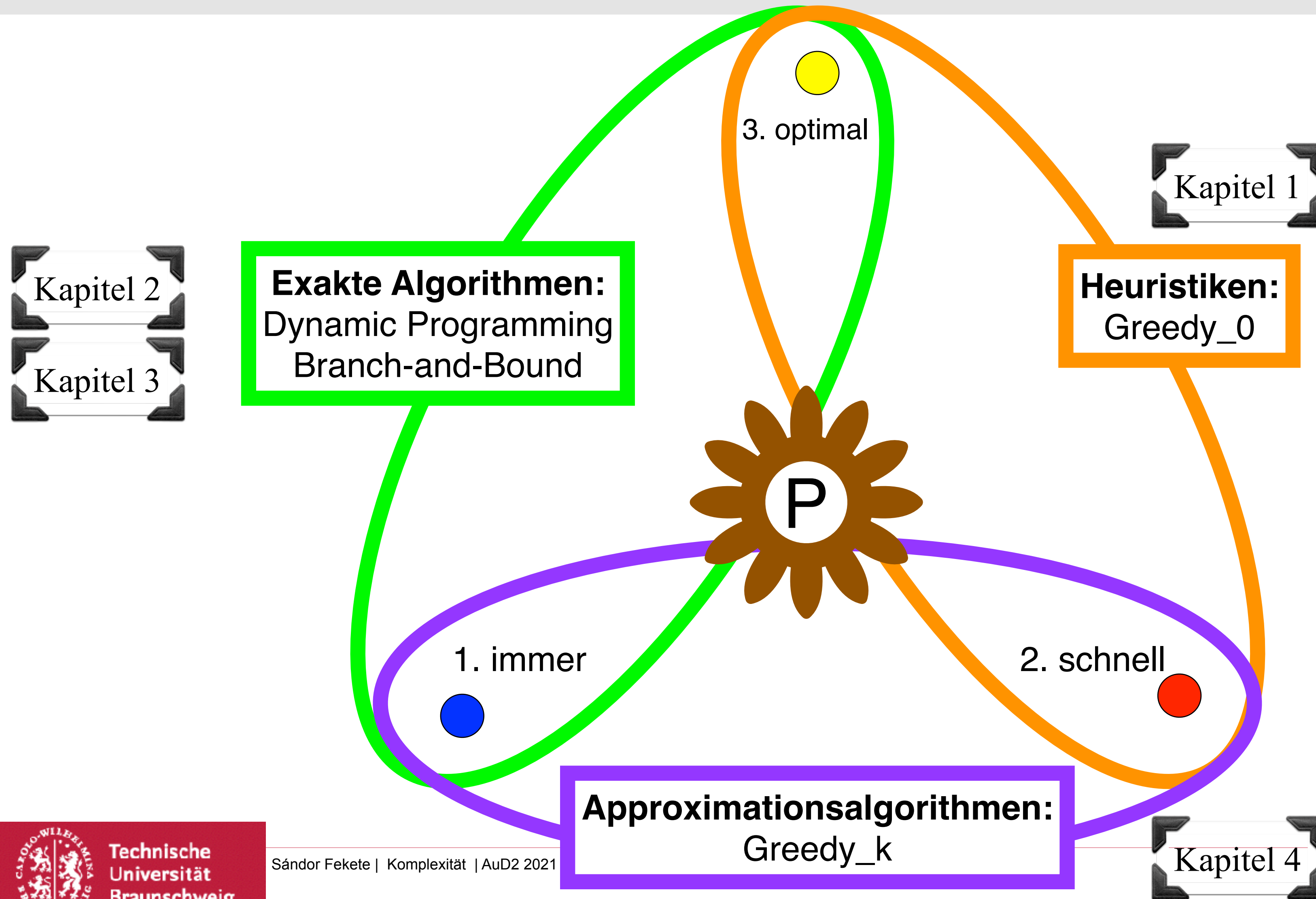
Das Dreieck der Perfektion



1	Nummer	2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4
			10			
		8	32	11	12	13
7	40	9	5	28	20	16
32	9	8		3	9	16
2		2	14			10
			20	15		
			3	40		
				10		

Kann Knut die Klausur bestehen?

Das Dreieck der Perfektion

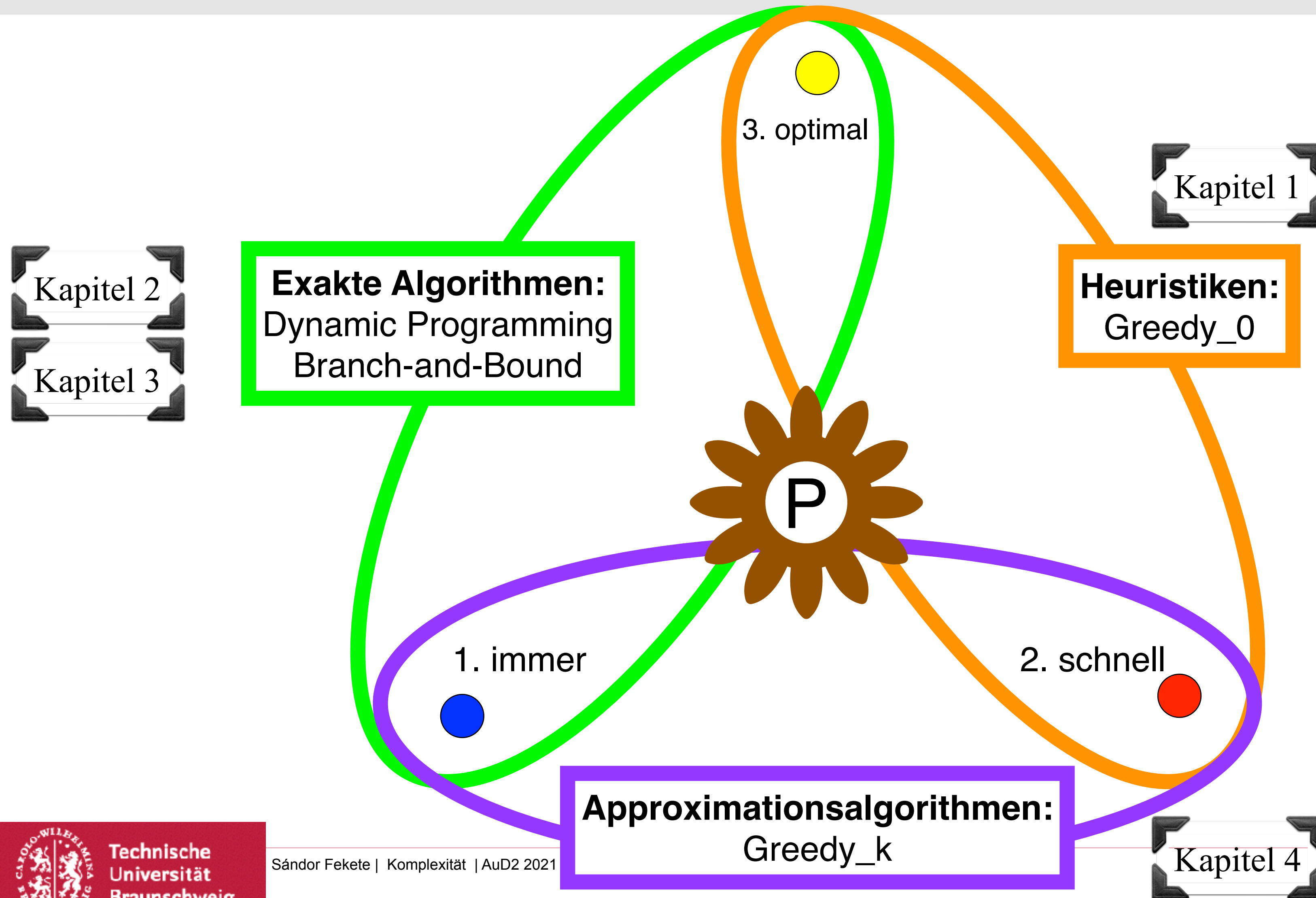


Fractional Knapsack

1	Nummer	2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4
			10			
		8	32	11	12	13
7		40	5	28	20	16
32		9		3	9	16
2						10
		9				
		8	14		16	
		2	20		24	
			3		4	
				15		
				40		
				10		

Kann Knut die Klausur bestehen?

Das Dreieck der Perfektion



Fractional Knapsack

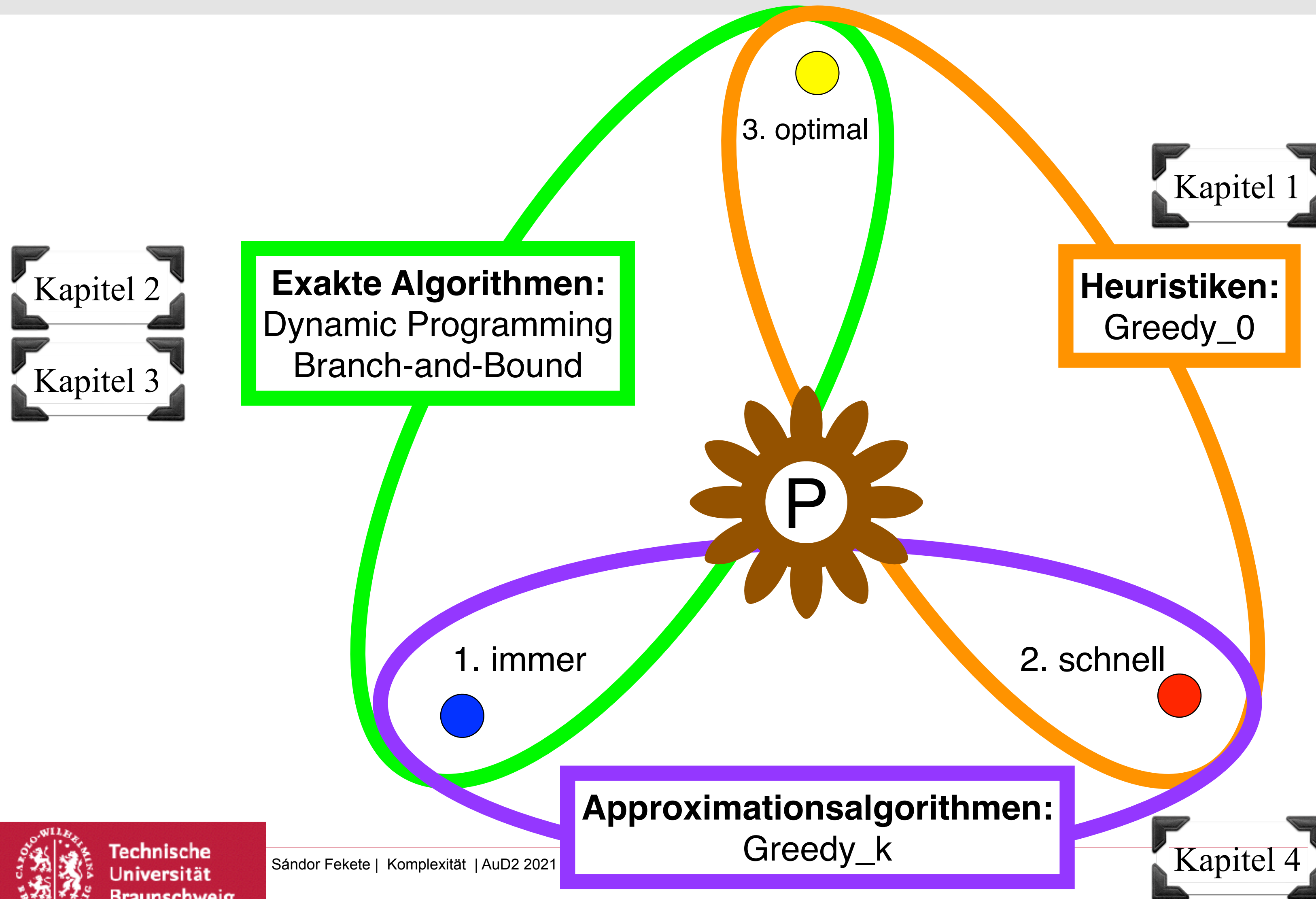
1	Nummer	2	3	4	5
20	Minuten	32	40	8	
3	Punkte	3	10	10	
		8			

Algorithmus 1.4 Greedy-Algorithmus für FRACTIONAL KNAPSACK
 Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$
 Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

	15	24	10
	4		
3	40		
	10		

Kann Knut die Klausur bestehen?

Das Dreieck der Perfektion



0-1 Knapsack ?!

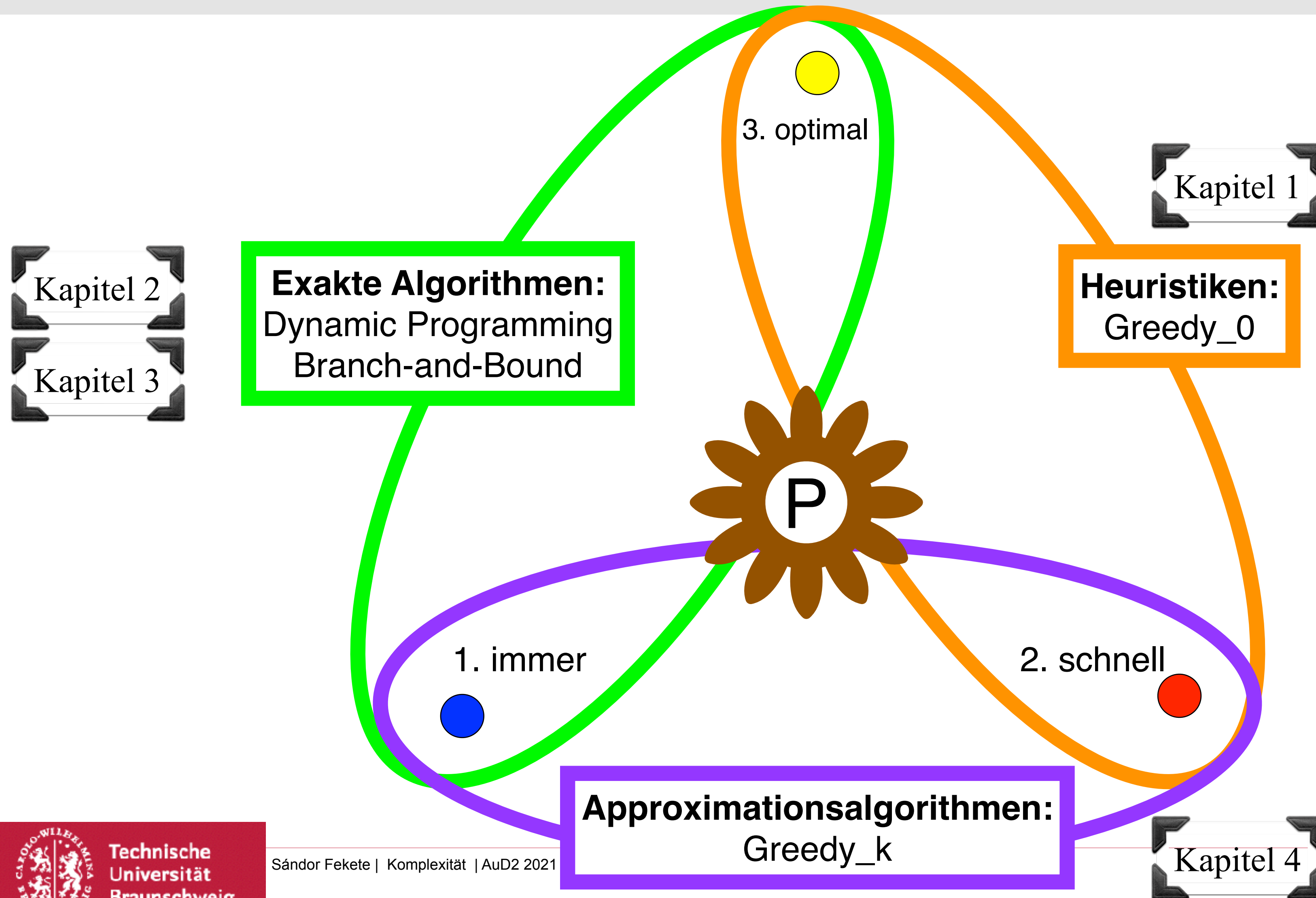
1	Nummer	2	3	4	5
20	Minuten	32	40	8	
3	Punkte	3	10	10	
		8			

Algorithmus 1.4 Greedy-Algorithmus für FRACTIONAL KNAPSACK
 Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$
 Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

	15	24	10
3	40	4	
	10		

Kann Knut die Klausur bestehen?

Das Dreieck der Perfektion

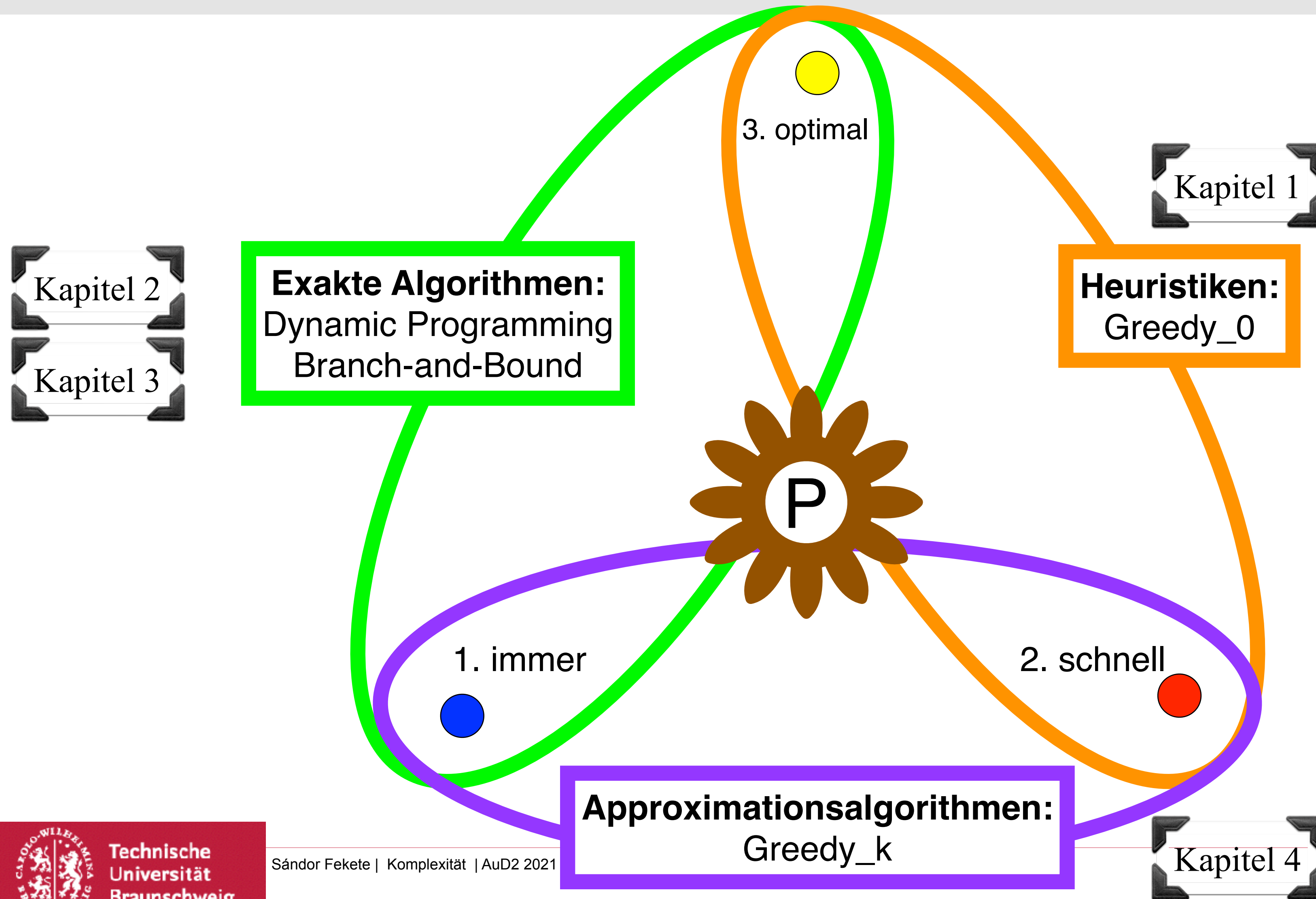


0-1 Knapsack ?!

1	2	3	4	5	6
20	32	40	8	16	4
3	3	10	5	2	4
	8	32	11	12	13
7	40	5	28	20	16
32	9	9	3	9	16
2	8	14	15	24	10
	2	20	40	4	
		3	10		

Kann Knut die Klausur bestehen?

Das Dreieck der Perfektion



0-1 Knapsack ?!

1	2	3	4	5	6
20	32	40	8	16	4
3	3	10	5	2	4
	8	32	11	12	13
7	40	5	28	20	16
32	9	8	3	9	16
2		2	14		10
			20	15	
			3	40	
				10	

Kann Knut die Klausur bestehen?

Gehört 0-1 Knapsack zu P?

5.2 Die Klasse NP: „NachPrüfen“

Nachprüfen!

Nachprüfen!

Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, \dots, z_9\} = \{7, 13, 17, 24, 29, 31, 31, 35, 53\}$

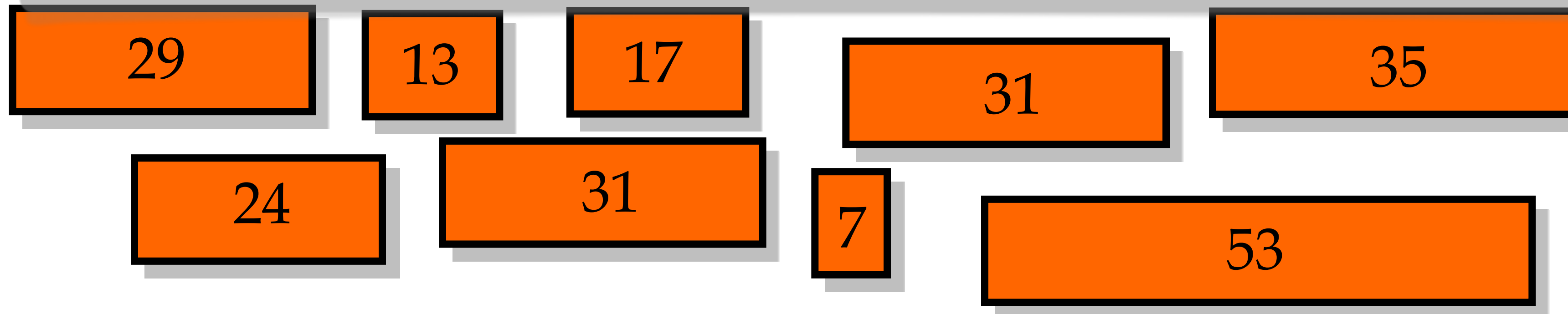
Gesamtsumme: 240

Nachprüfen!

Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, \dots, z_9\} = \{7, 13, 17, 24, 29, 31, 31, 35, 53\}$

Gesamtsumme: 240

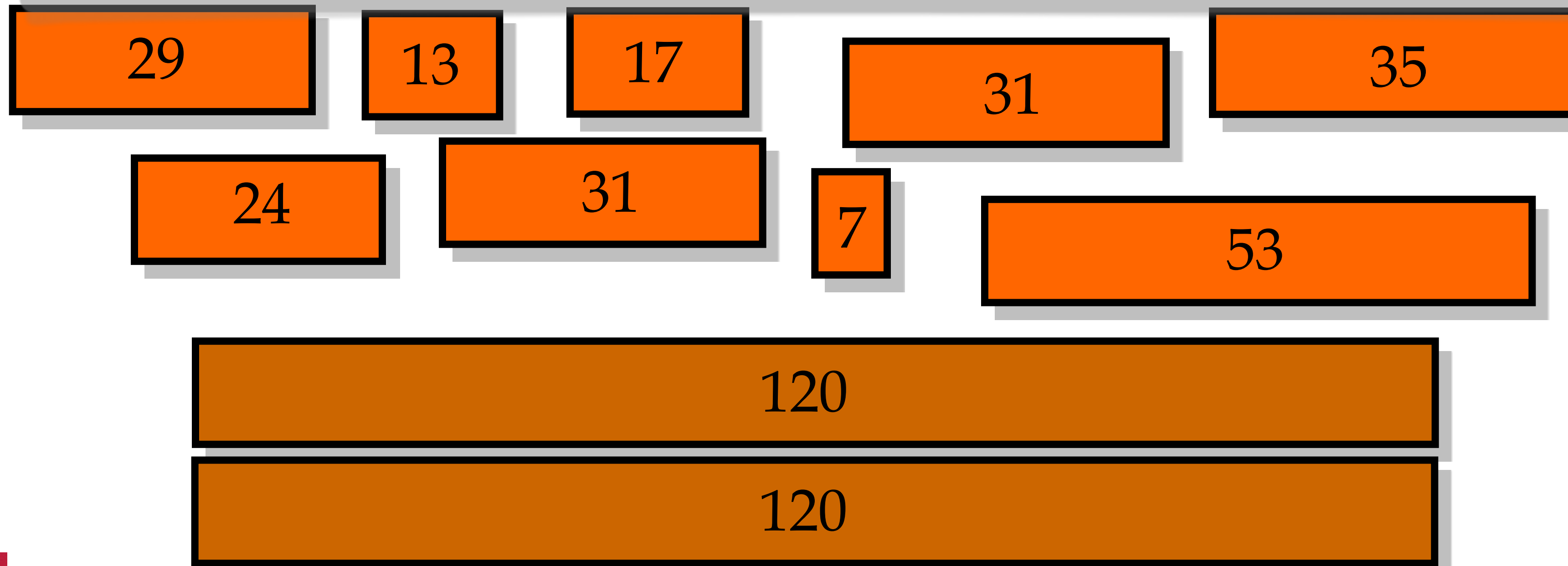


Nachprüfen!

Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, \dots, z_9\} = \{7, 13, 17, 24, 29, 31, 31, 35, 53\}$

Gesamtsumme: 240

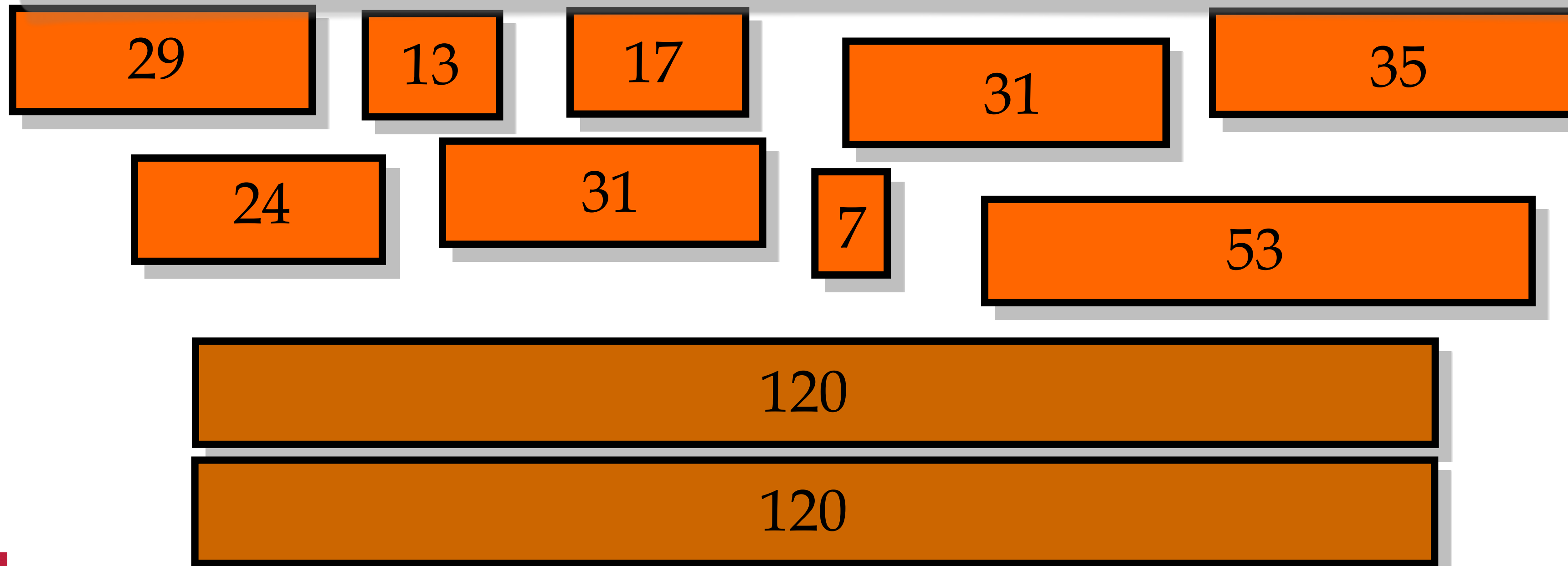


Nachprüfen!

Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, \dots, z_9\} = \{7, 13, 17, 24, 29, 31, 31, 35, 53\}$

Gesamtsumme: 240

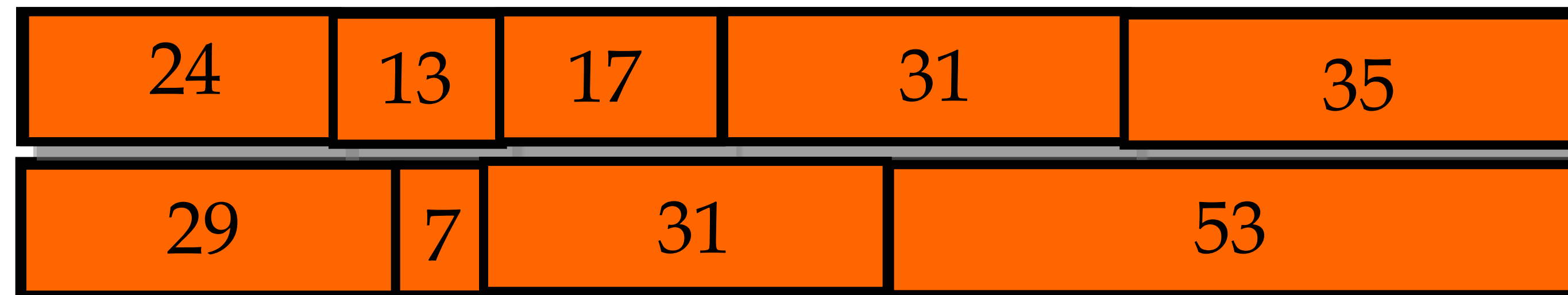


Nachprüfen!

Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, \dots, z_9\} = \{7, 13, 17, 24, 29, 31, 31, 35, 53\}$

Gesamtsumme: 240



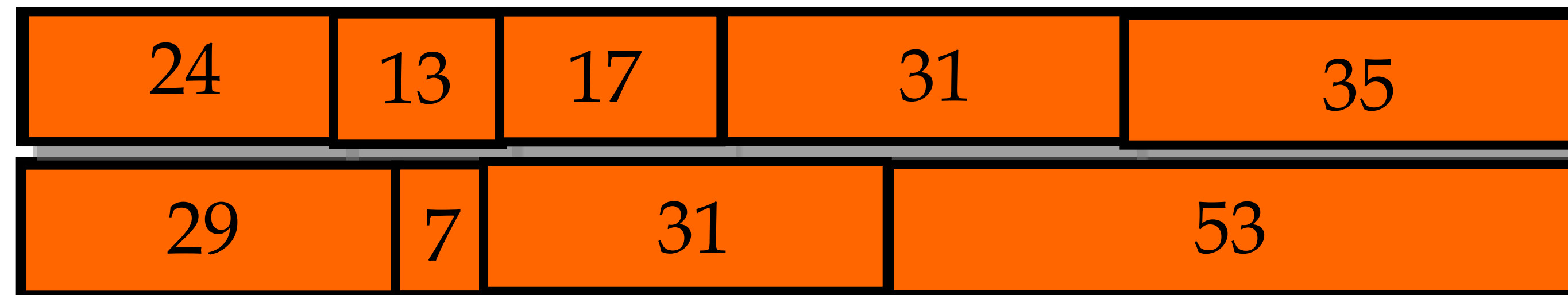
Nachprüfen!

Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, \dots, z_9\} = \{7, 13, 17, 24, 29, 31, 31, 35, 53\}$

Gesamtsumme: 240

Existenz einer Lösung: einfach zu überprüfen!



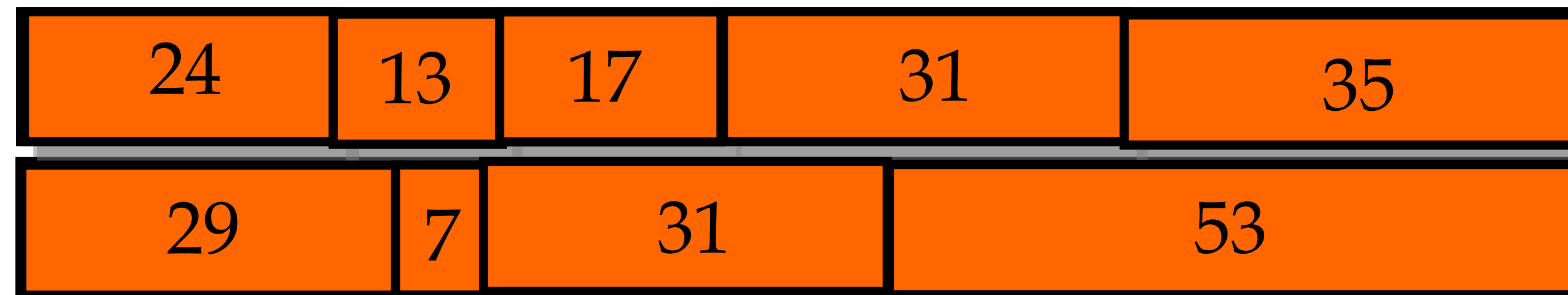
Nachprüfen!

Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, \dots, z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 53\}$

Gesamtsumme: 240

Existenz einer Lösung: einfach zu überprüfen!



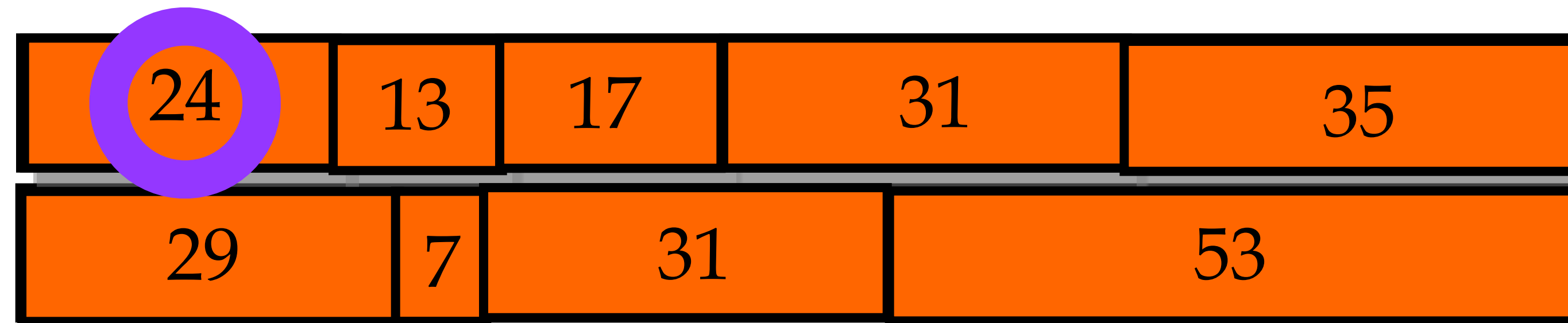
Nachprüfen!

Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, \dots, z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

Gesamtsumme: 240

Existenz einer Lösung: einfach zu überprüfen!



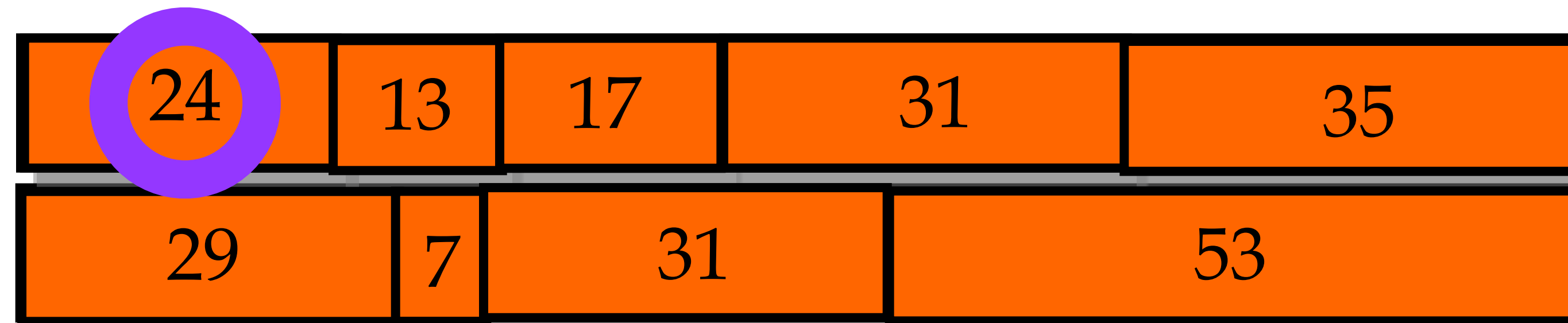
Nachprüfen!

Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, \dots, z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

Gesamtsumme: 240

Existenz einer Lösung: einfach zu überprüfen!



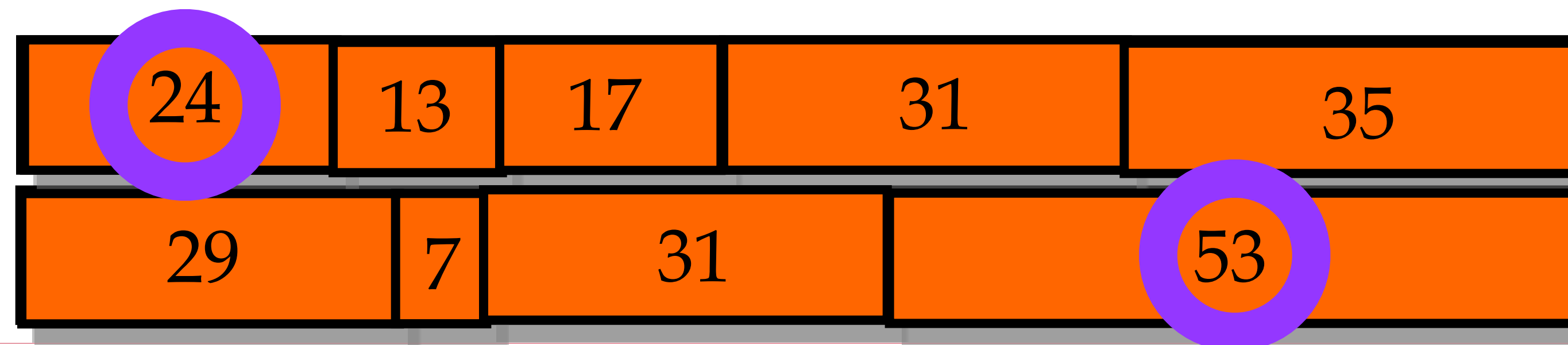
Nachprüfen!

Beispiel 1.10.

Partition für $\{z_1, \dots, z_9\} = \{7, 13, 17, 20, 29, 31, 31, 35, 57\}$

Gesamtsumme: 240

Existenz einer Lösung: einfach zu überprüfen!



Keine Lösung?!

Keine Lösung?!

120

120

Keine Lösung?!

120

57

120

Keine Lösung?!

120

57

35

120

Keine Lösung?!

120

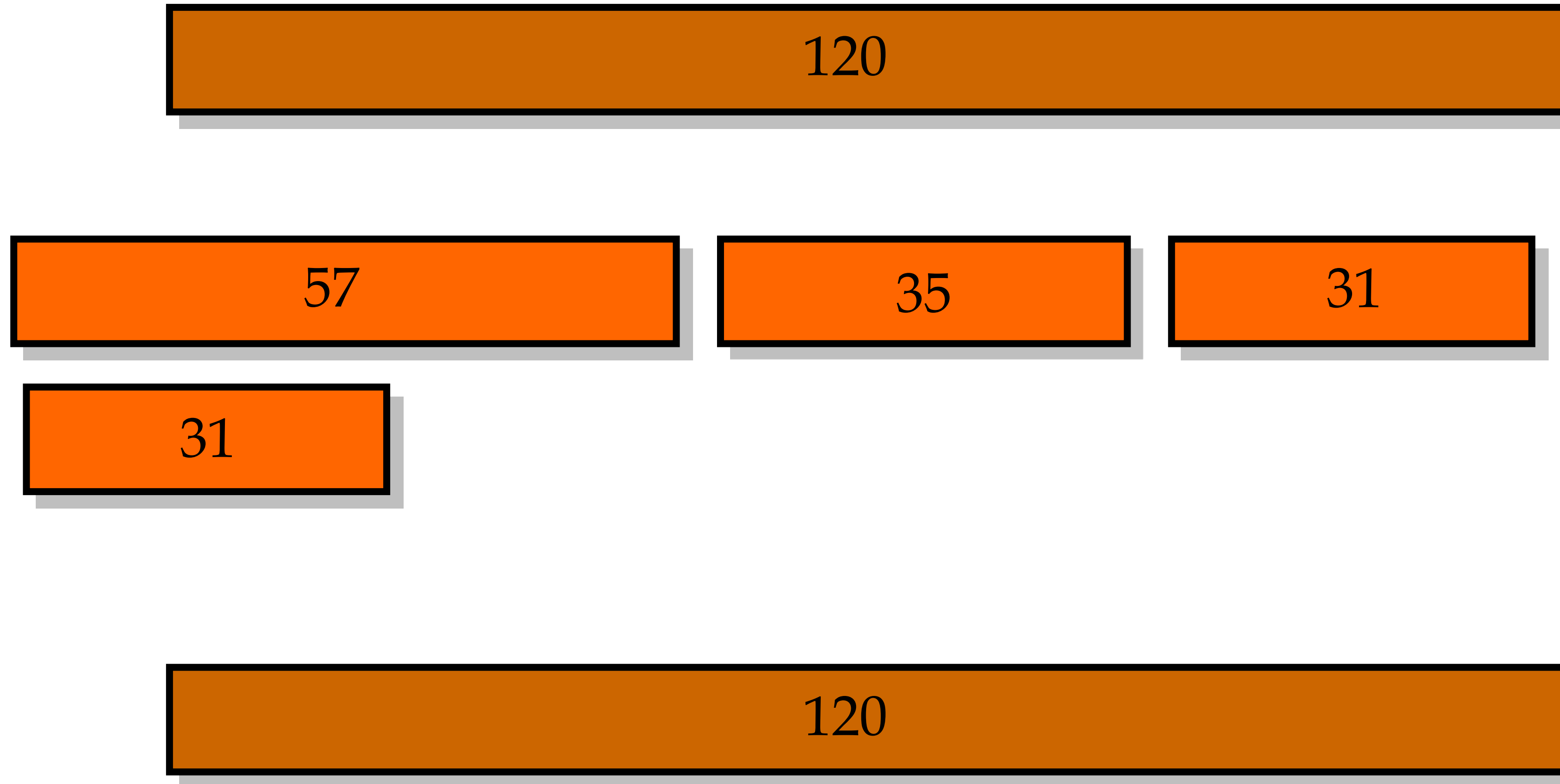
57

35

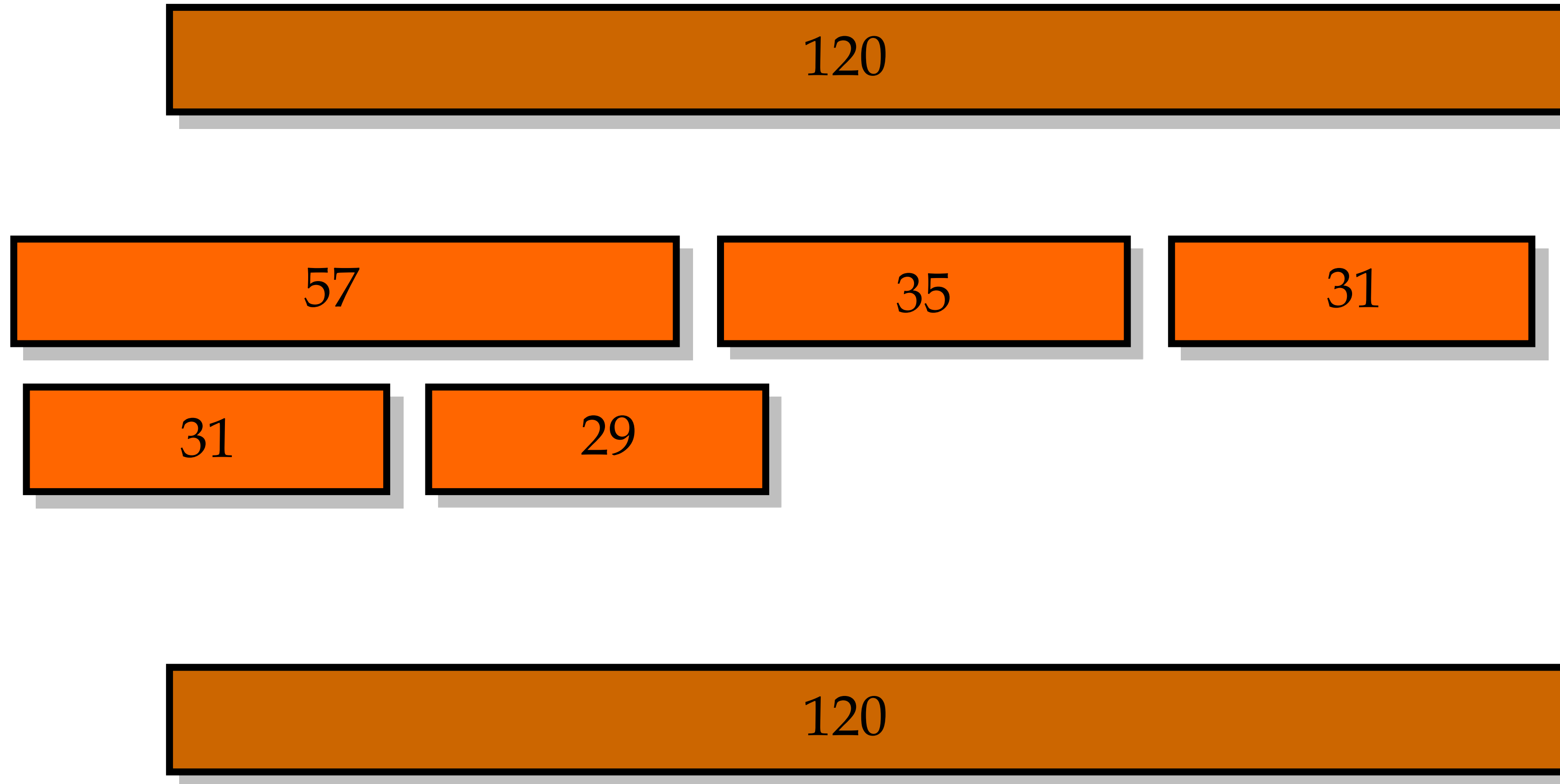
31

120

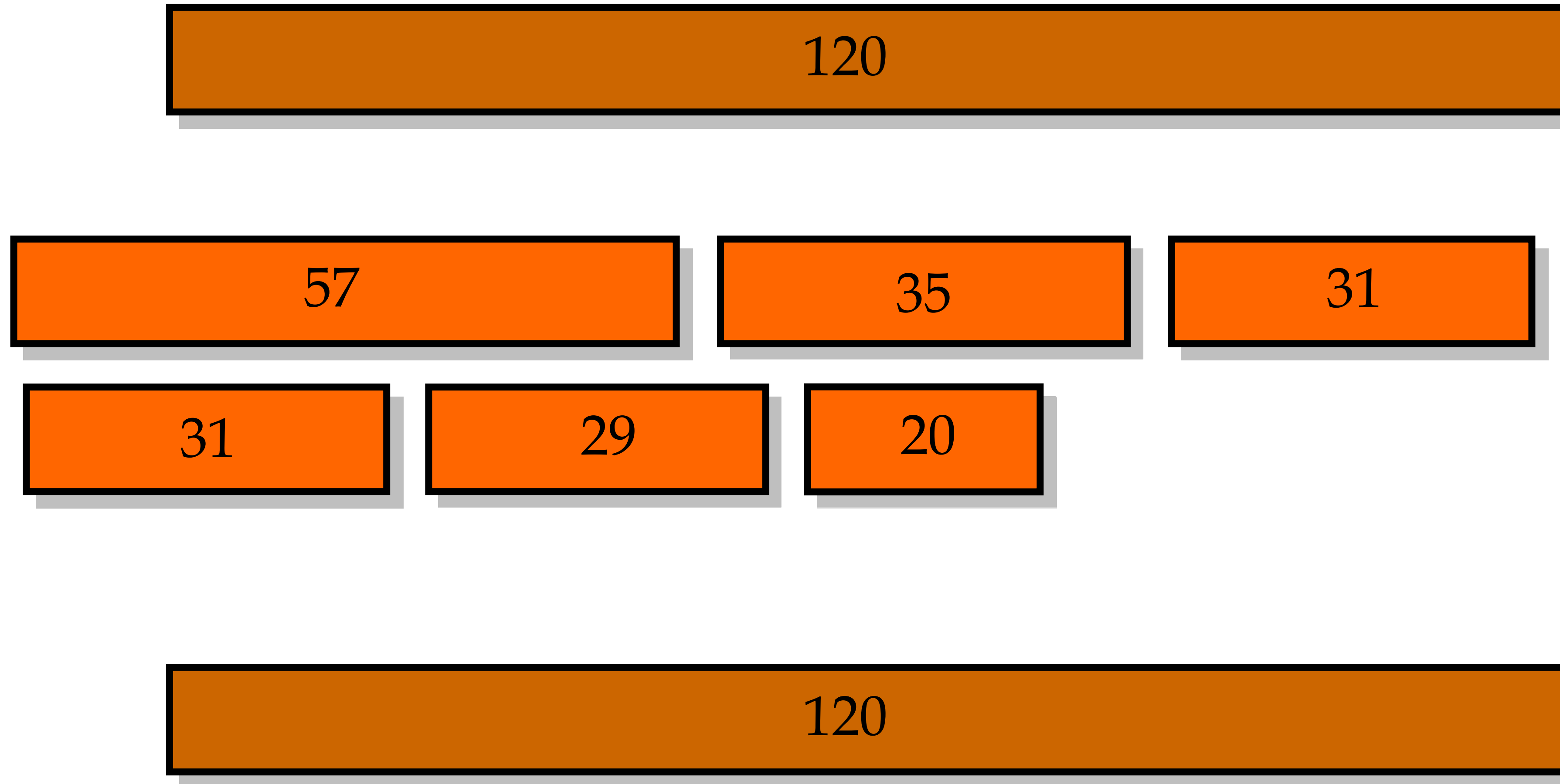
Keine Lösung?!



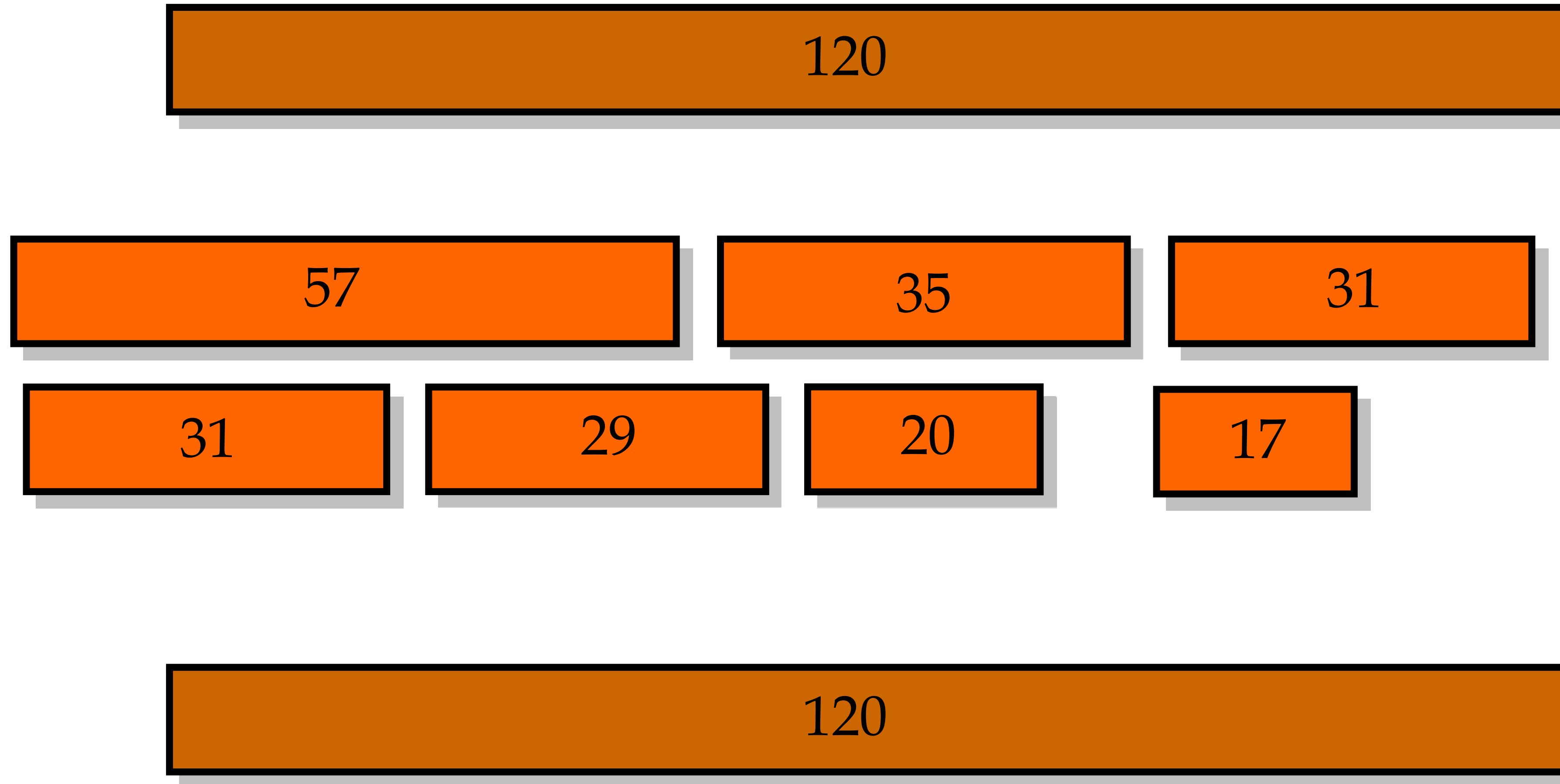
Keine Lösung?!



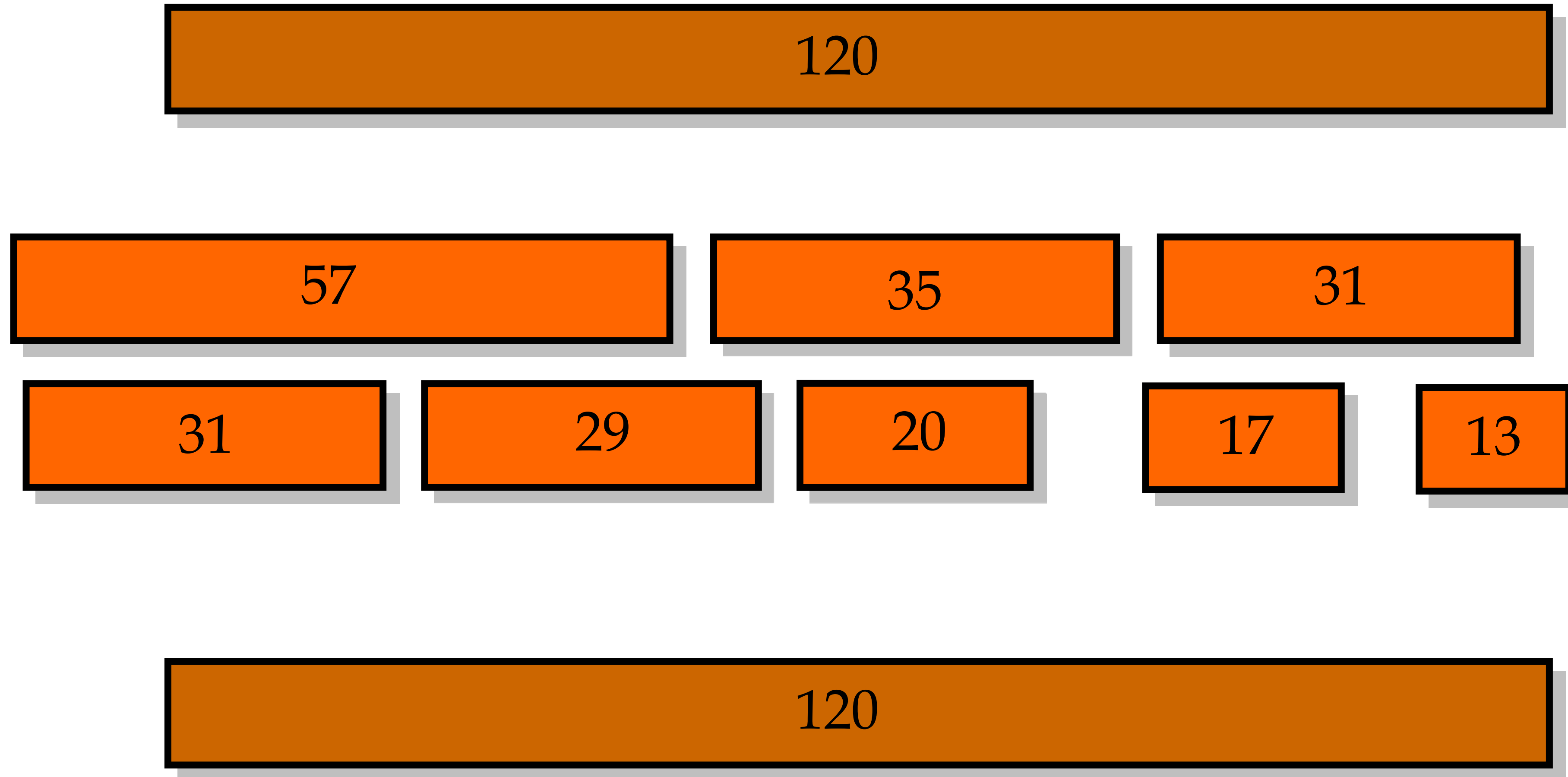
Keine Lösung?!



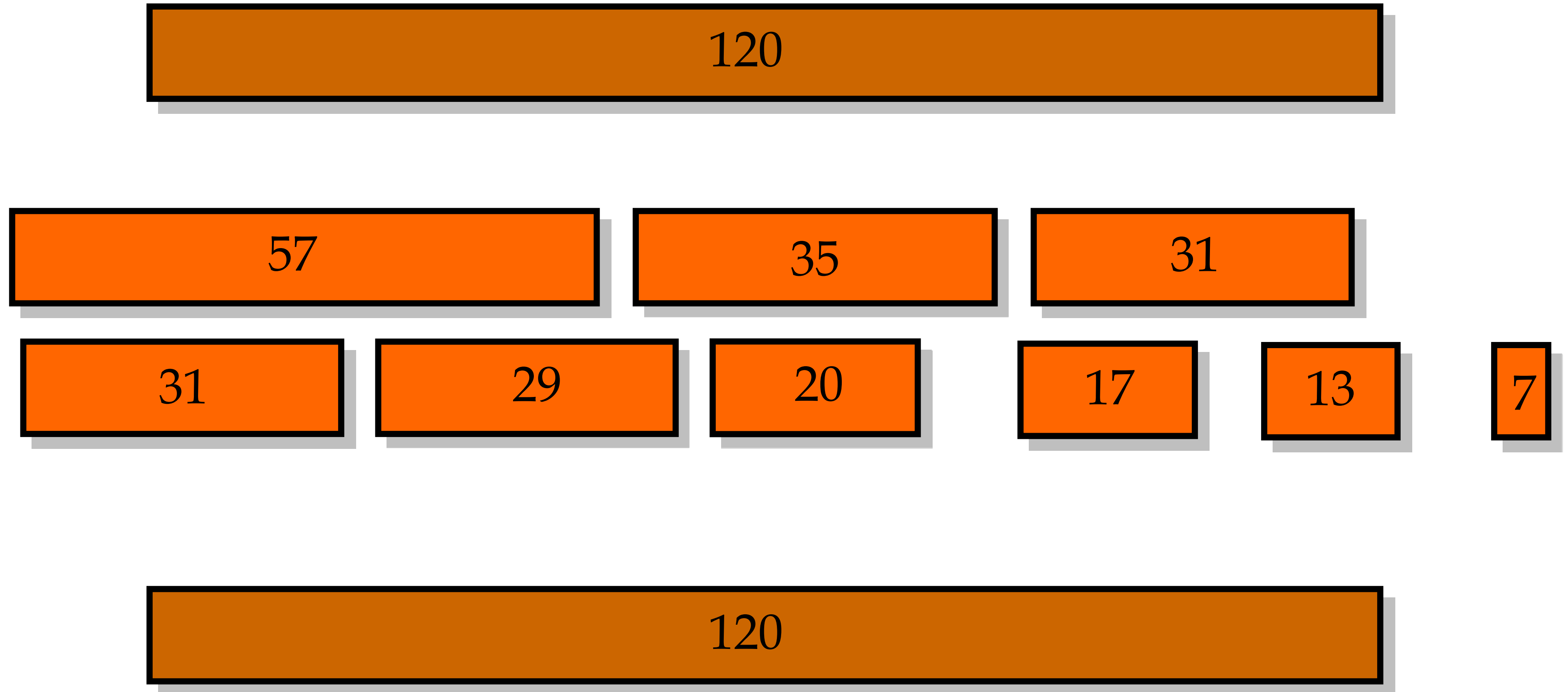
Keine Lösung?!



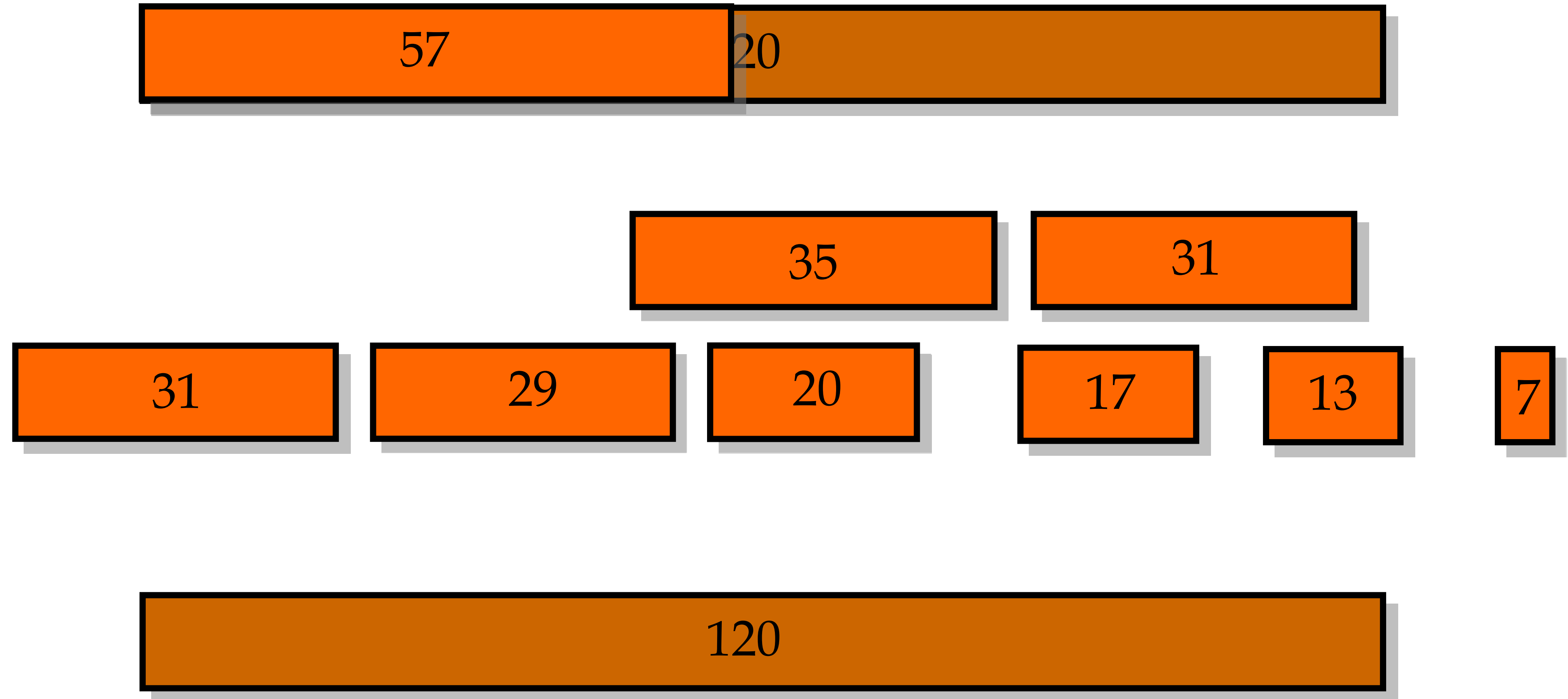
Keine Lösung?!



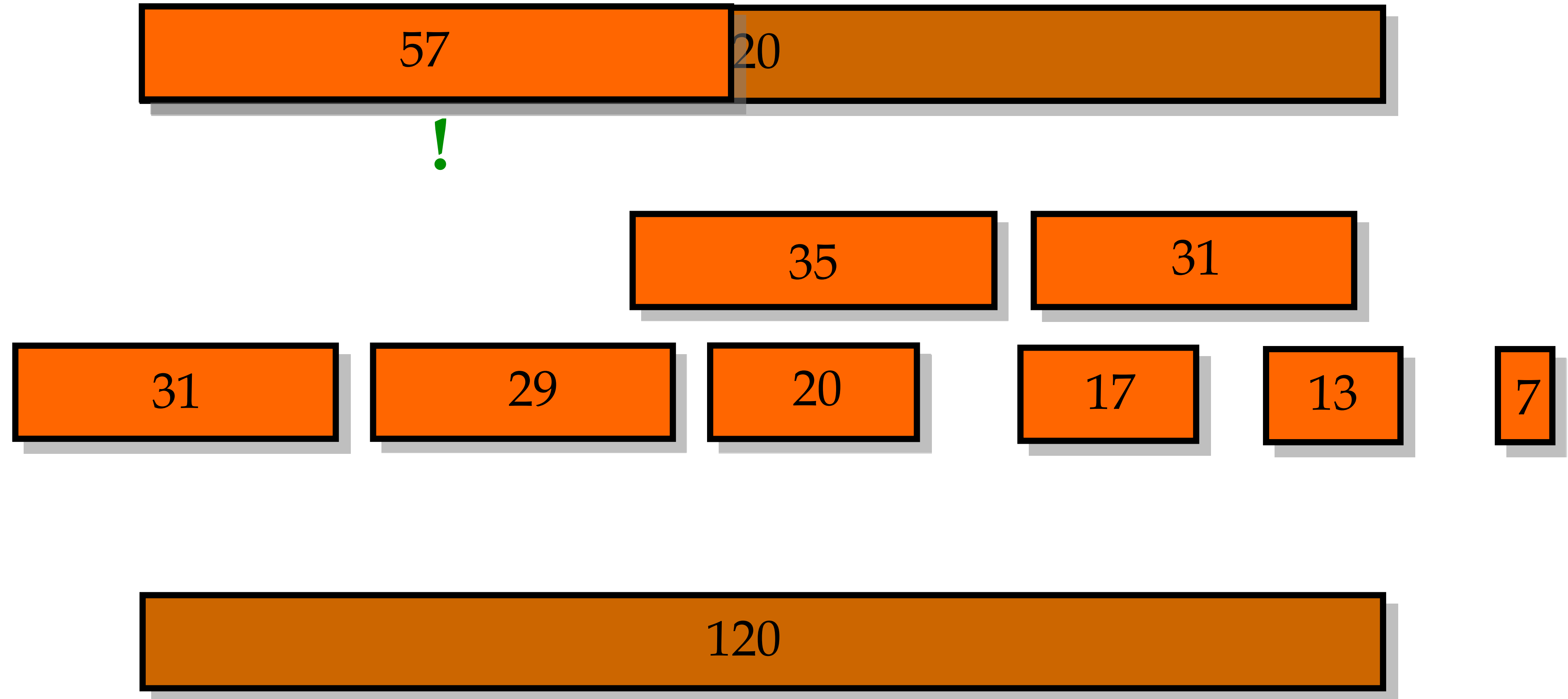
Keine Lösung?!



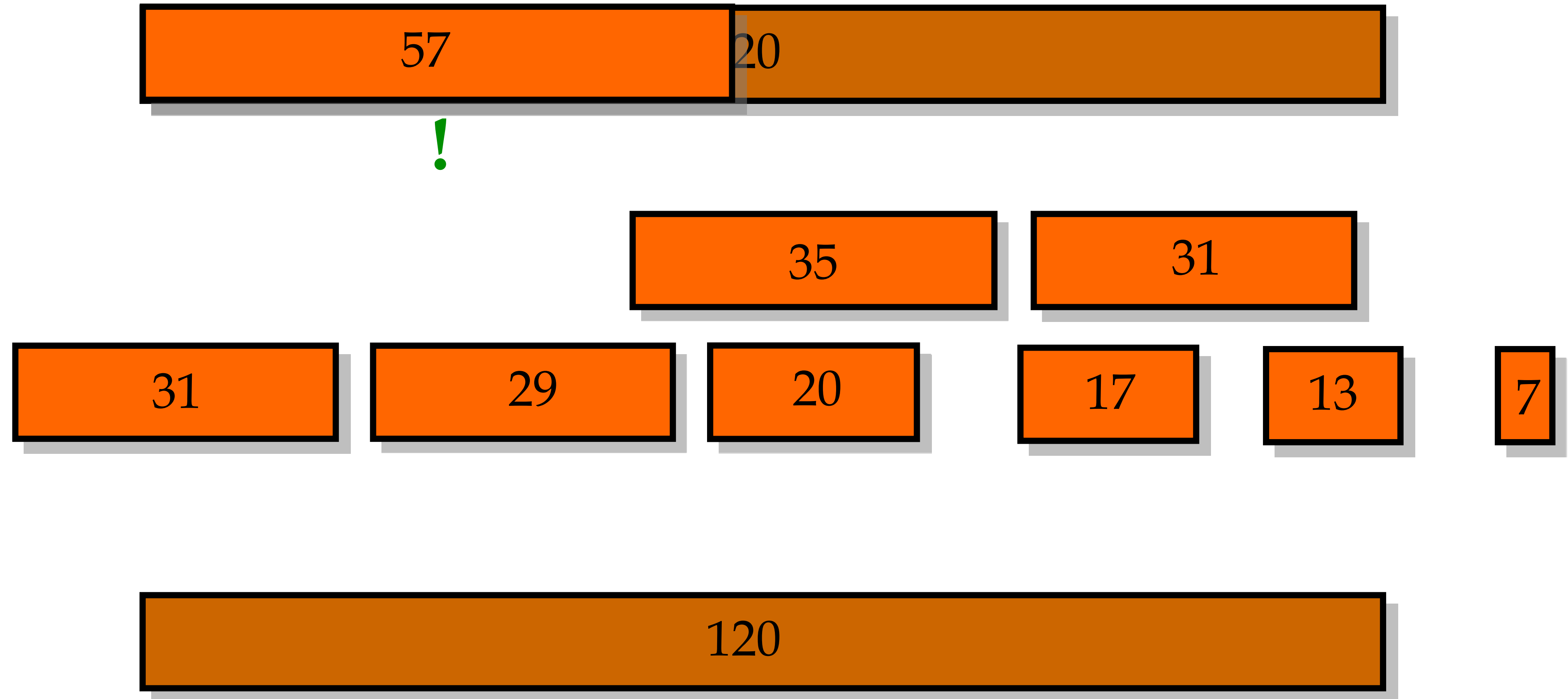
Keine Lösung?!



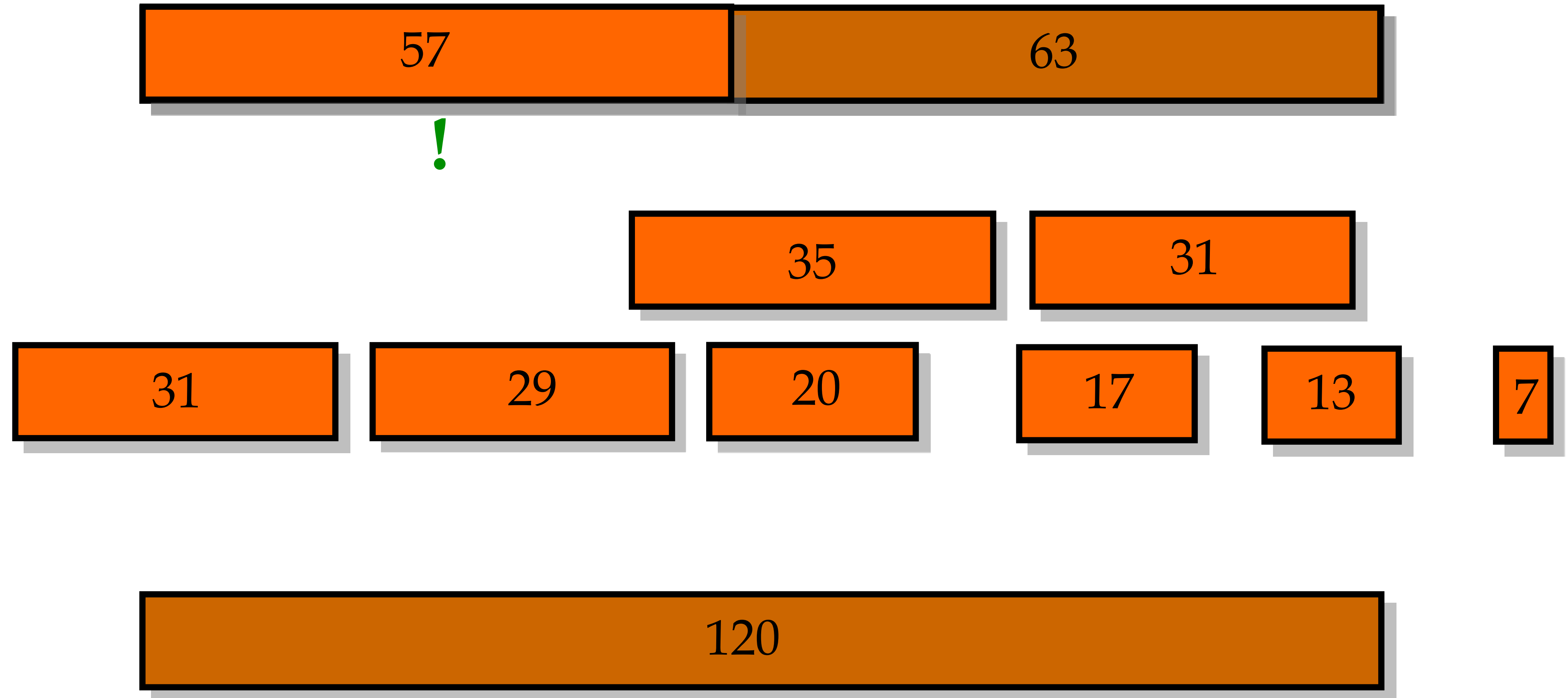
Keine Lösung?!



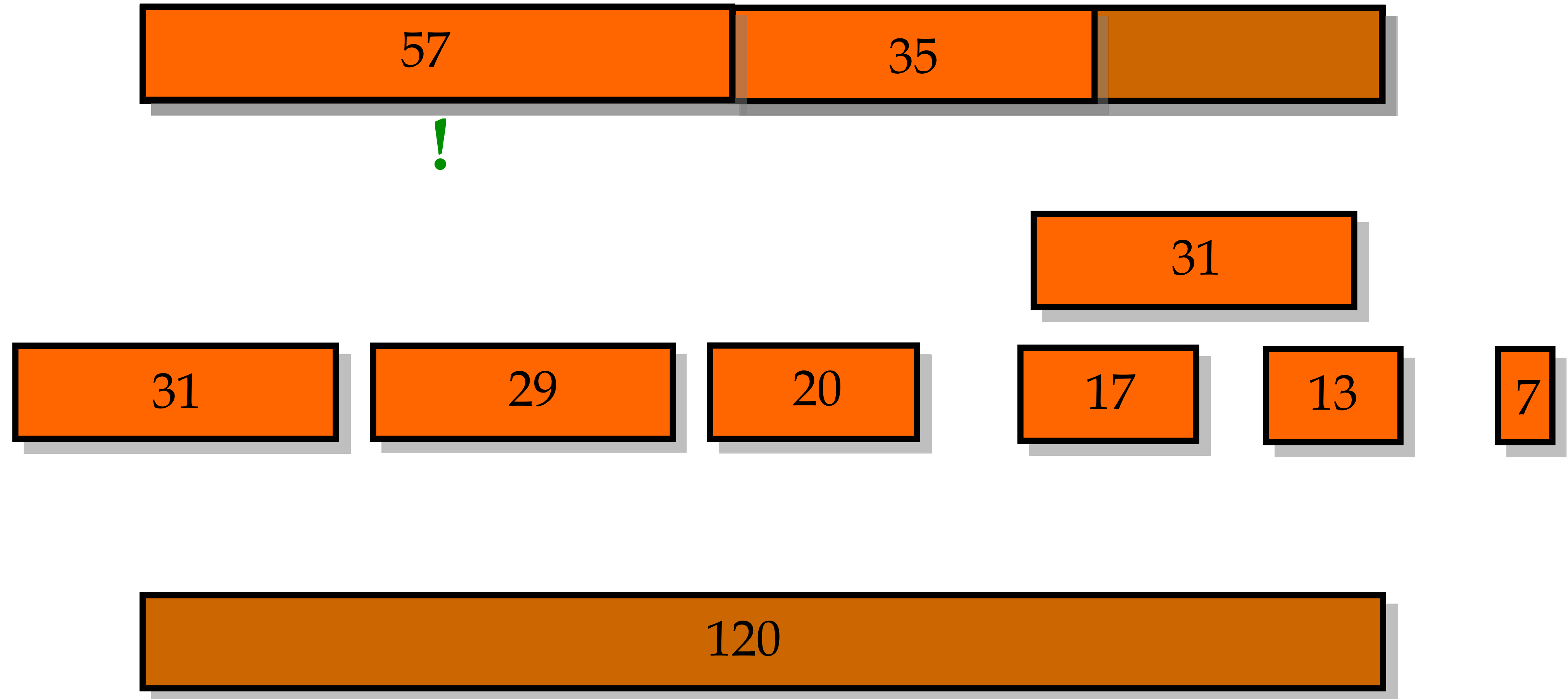
Keine Lösung?!



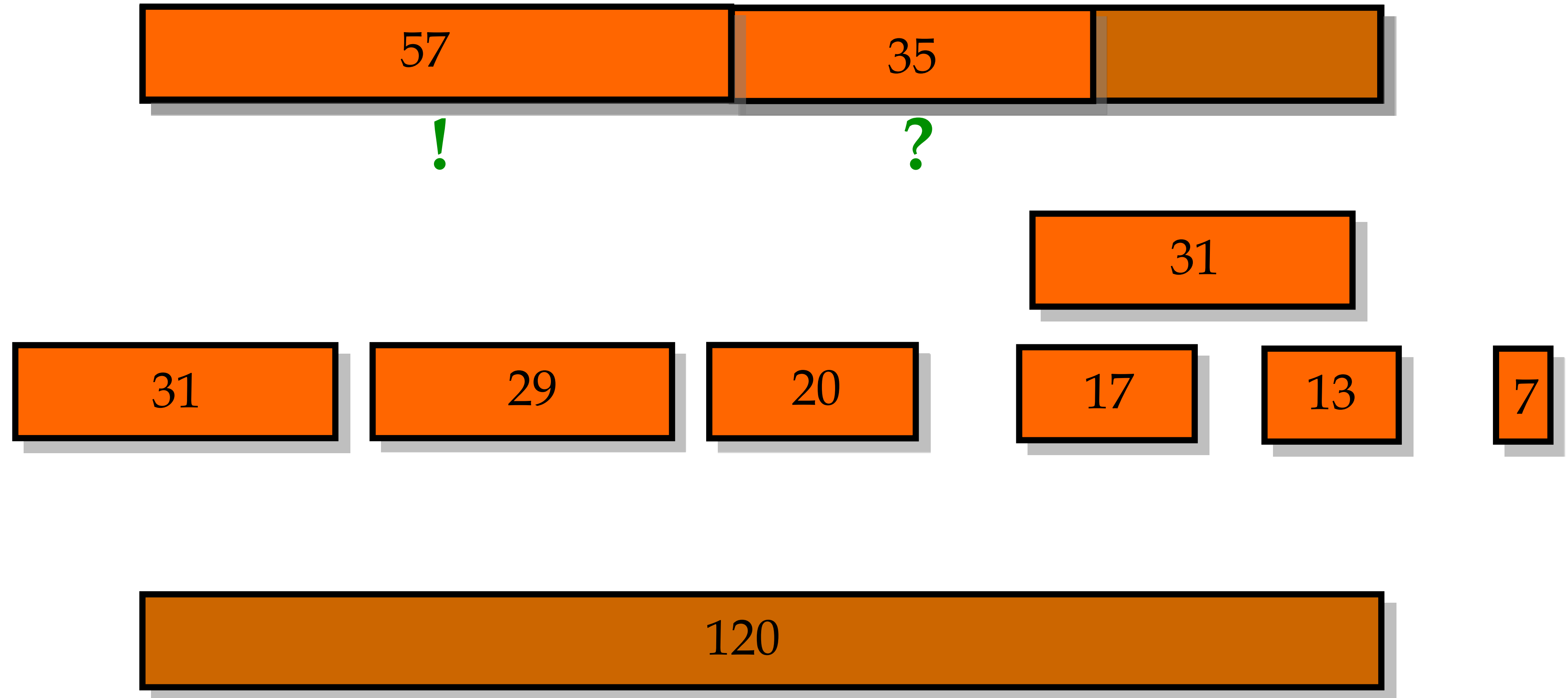
Keine Lösung?!



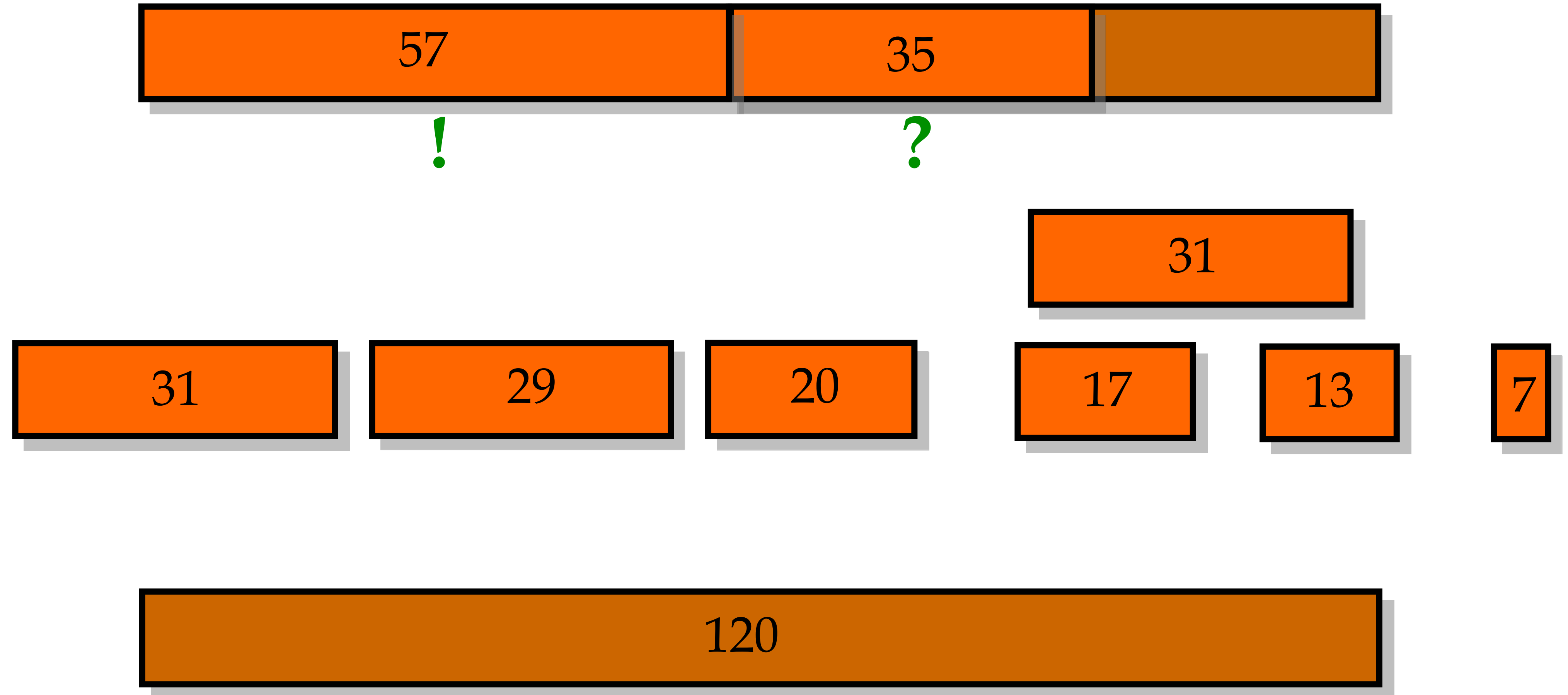
Keine Lösung?!



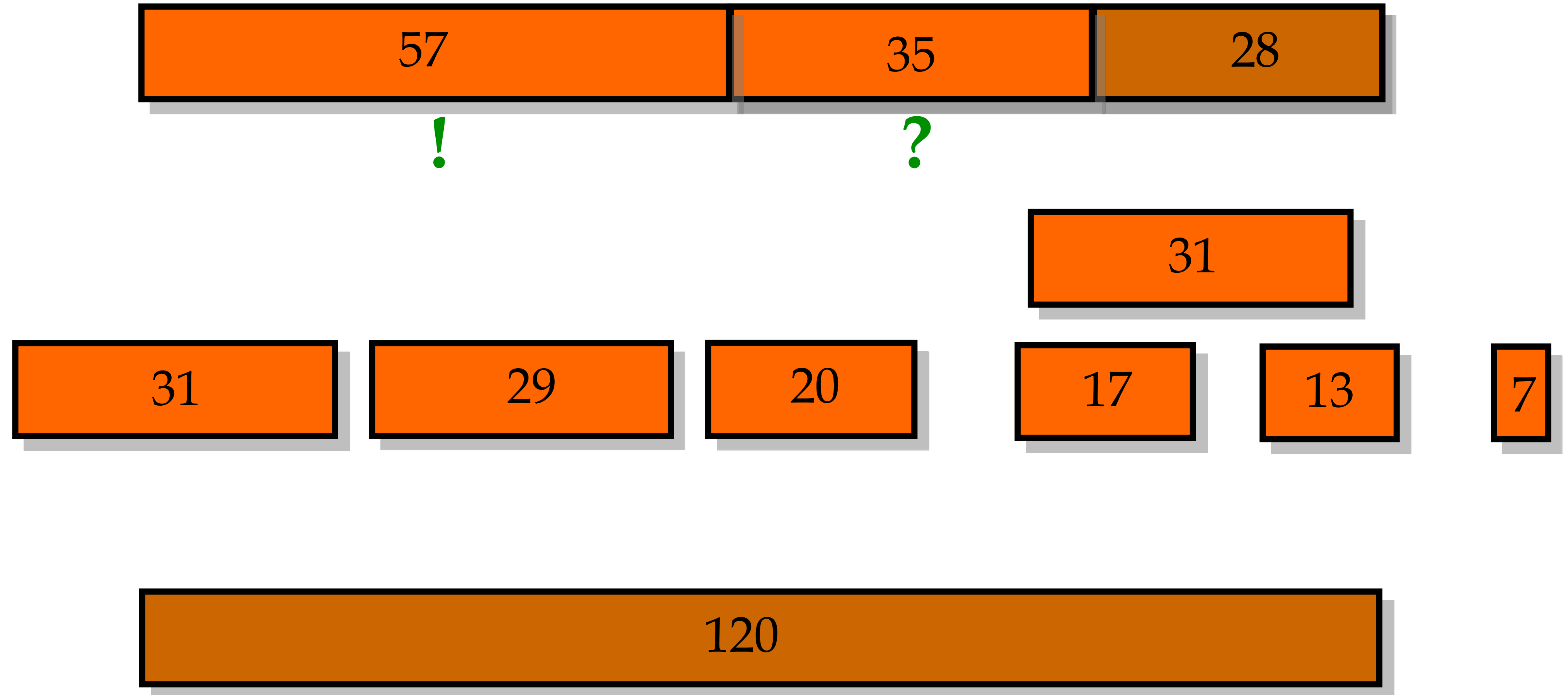
Keine Lösung?!



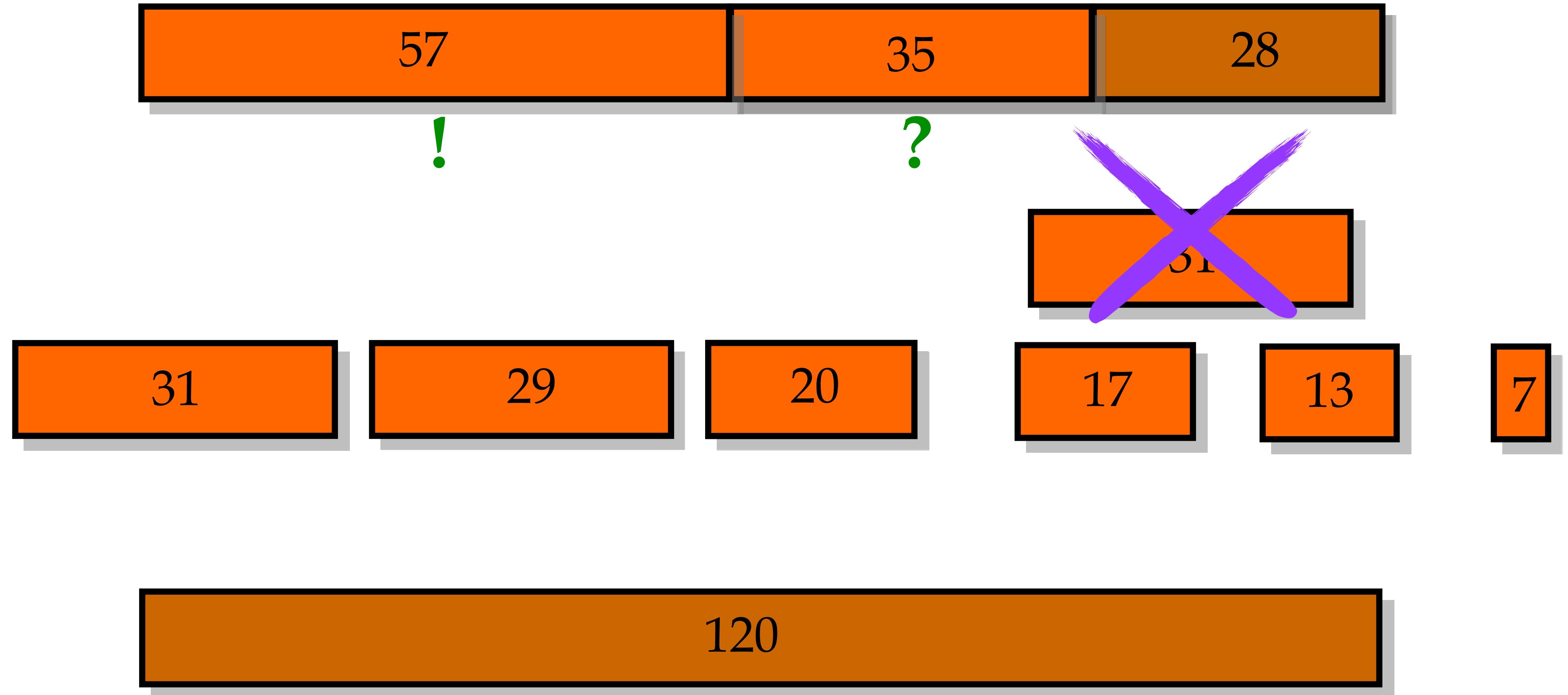
Keine Lösung?!



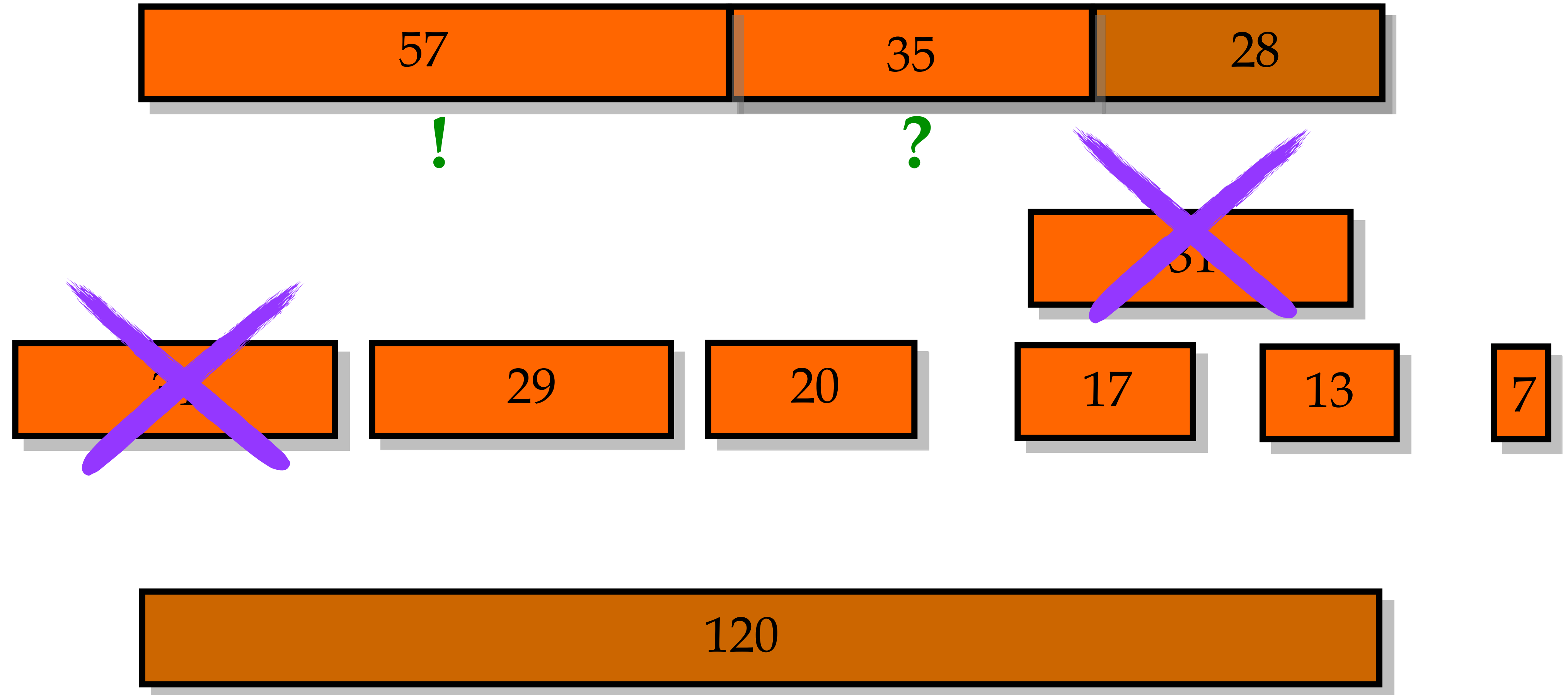
Keine Lösung?!



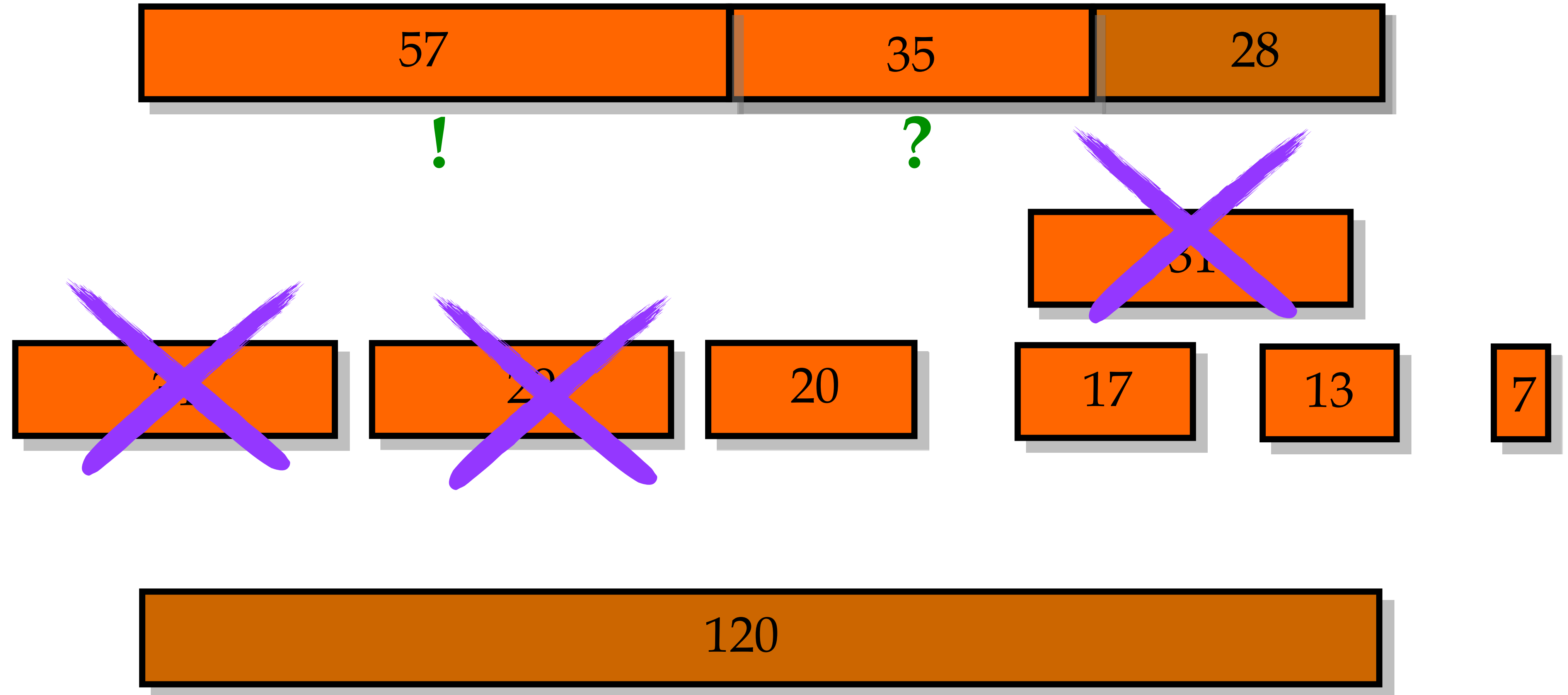
Keine Lösung?!



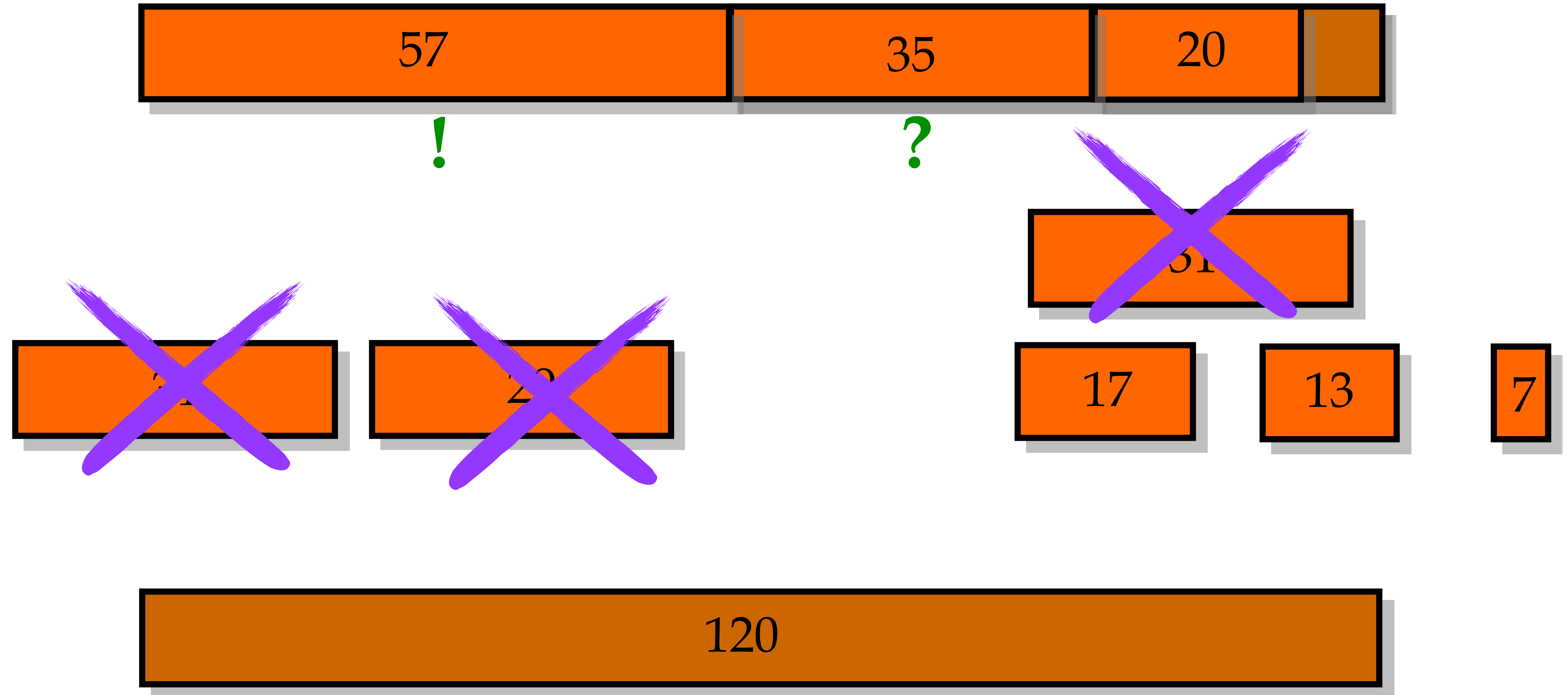
Keine Lösung?!



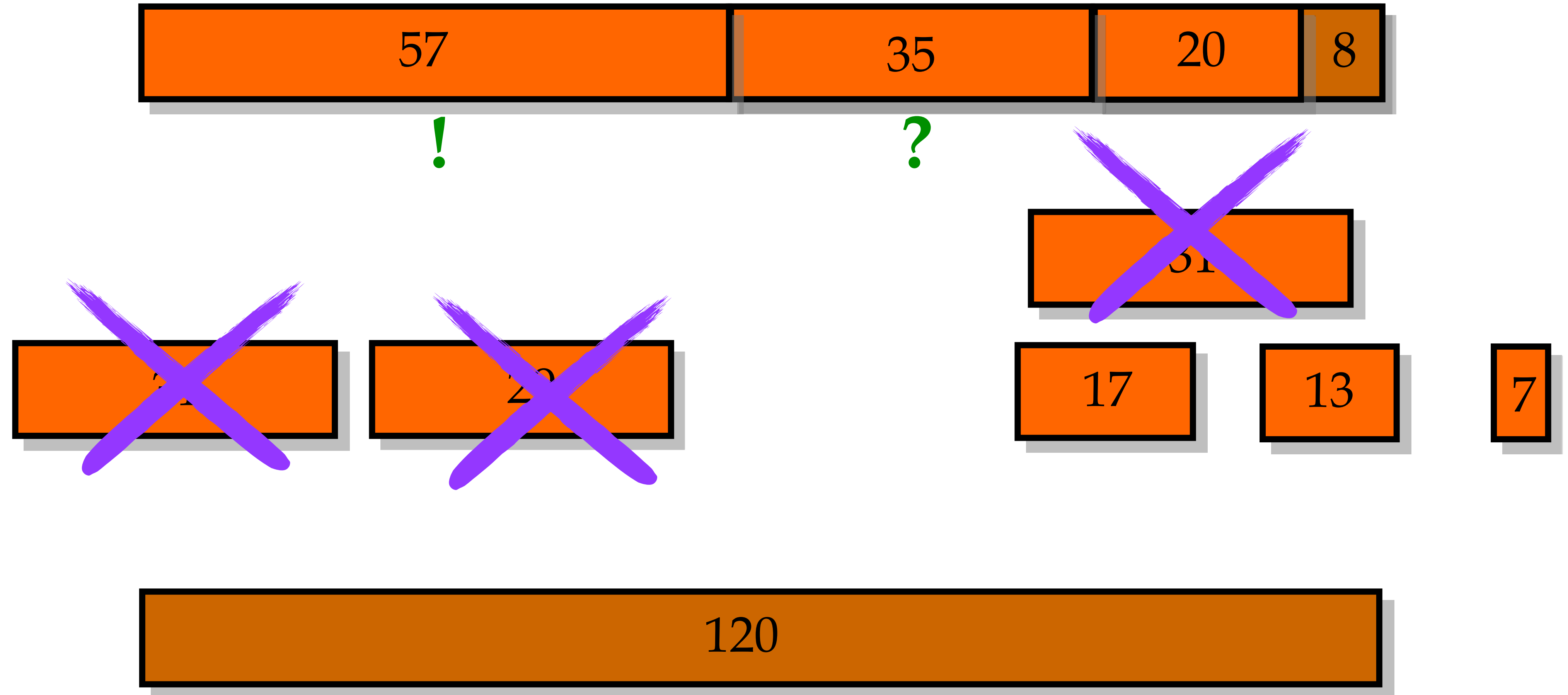
Keine Lösung?!



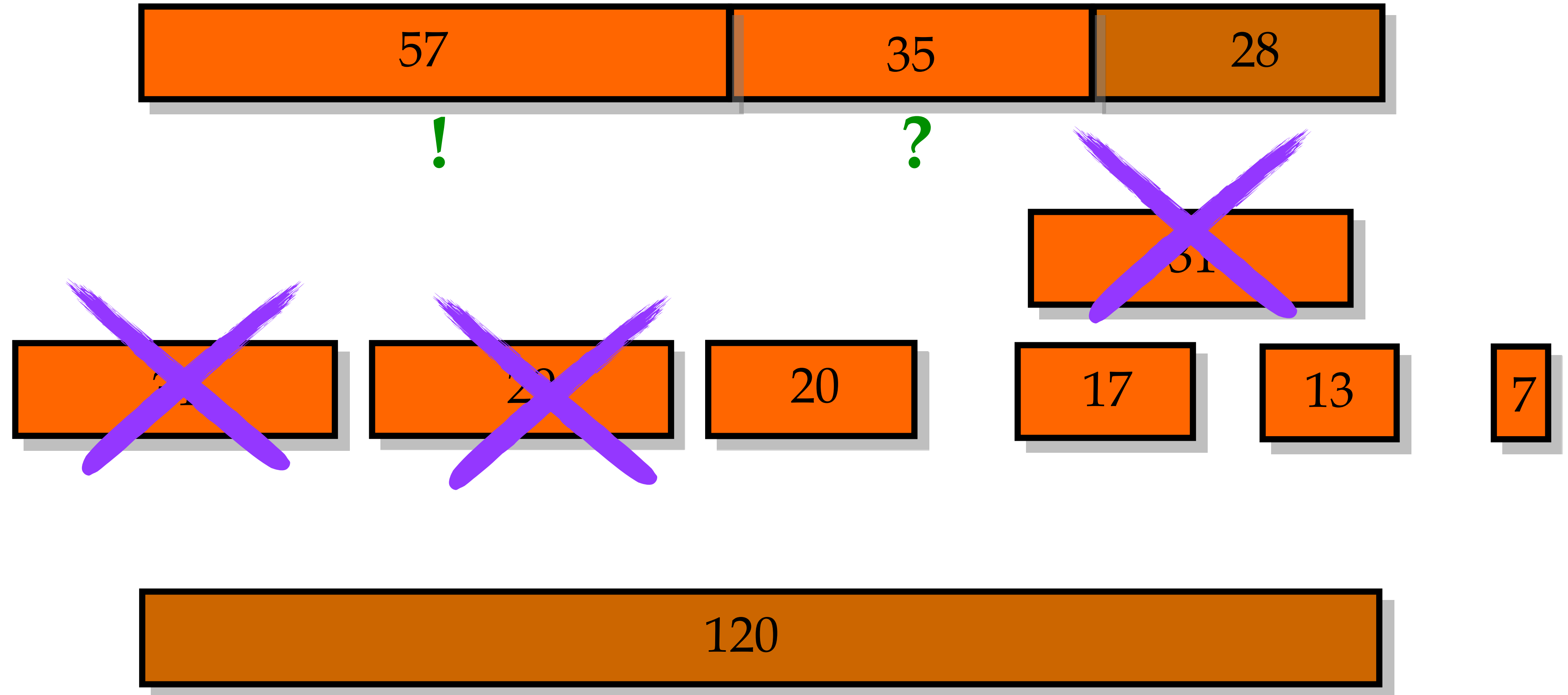
Keine Lösung?!



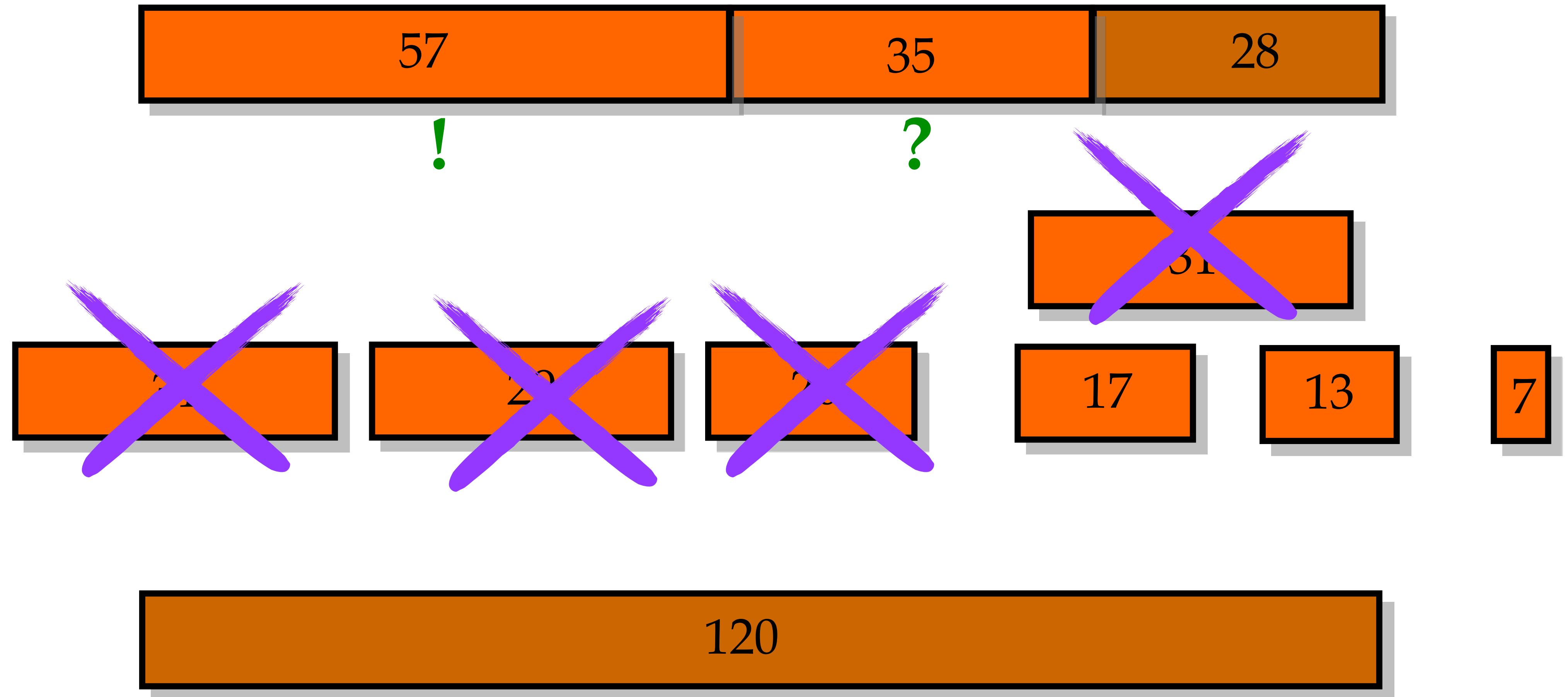
Keine Lösung?!



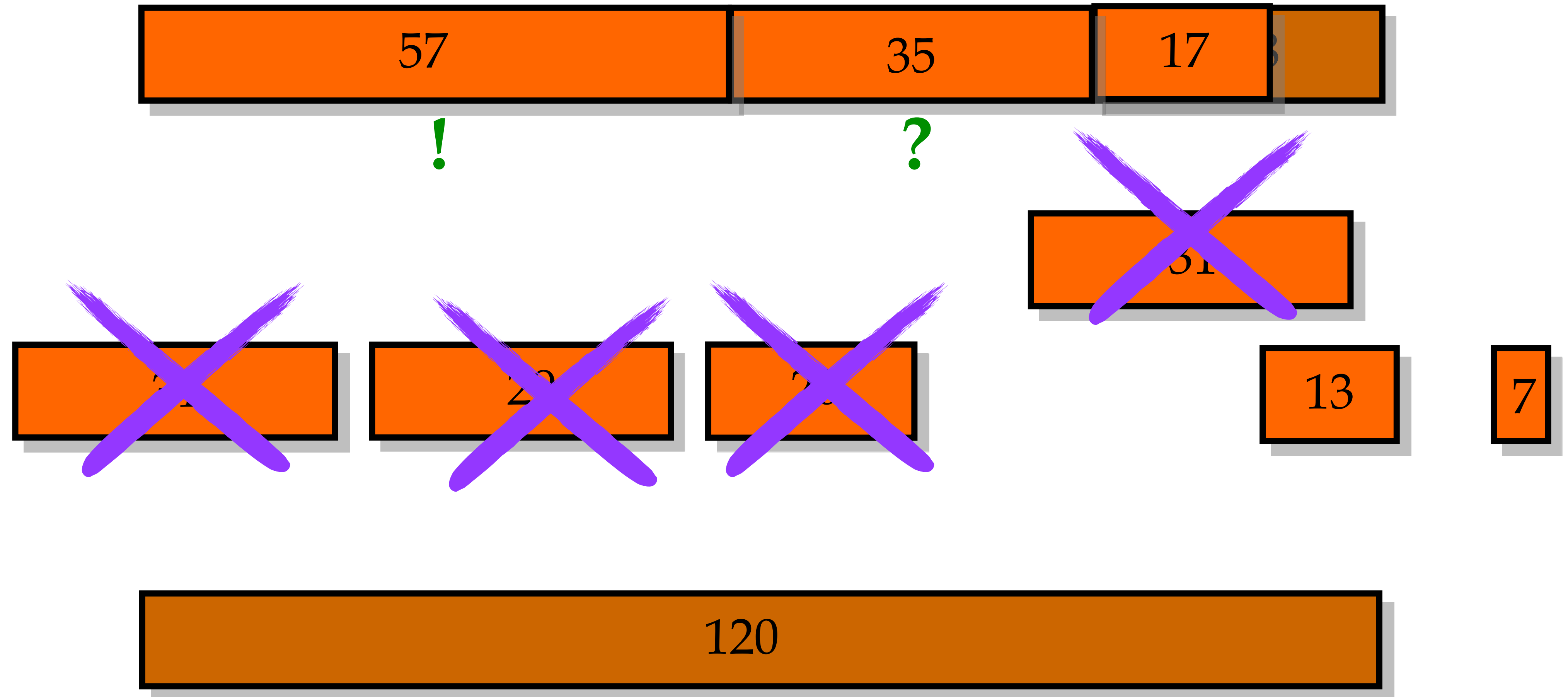
Keine Lösung?!



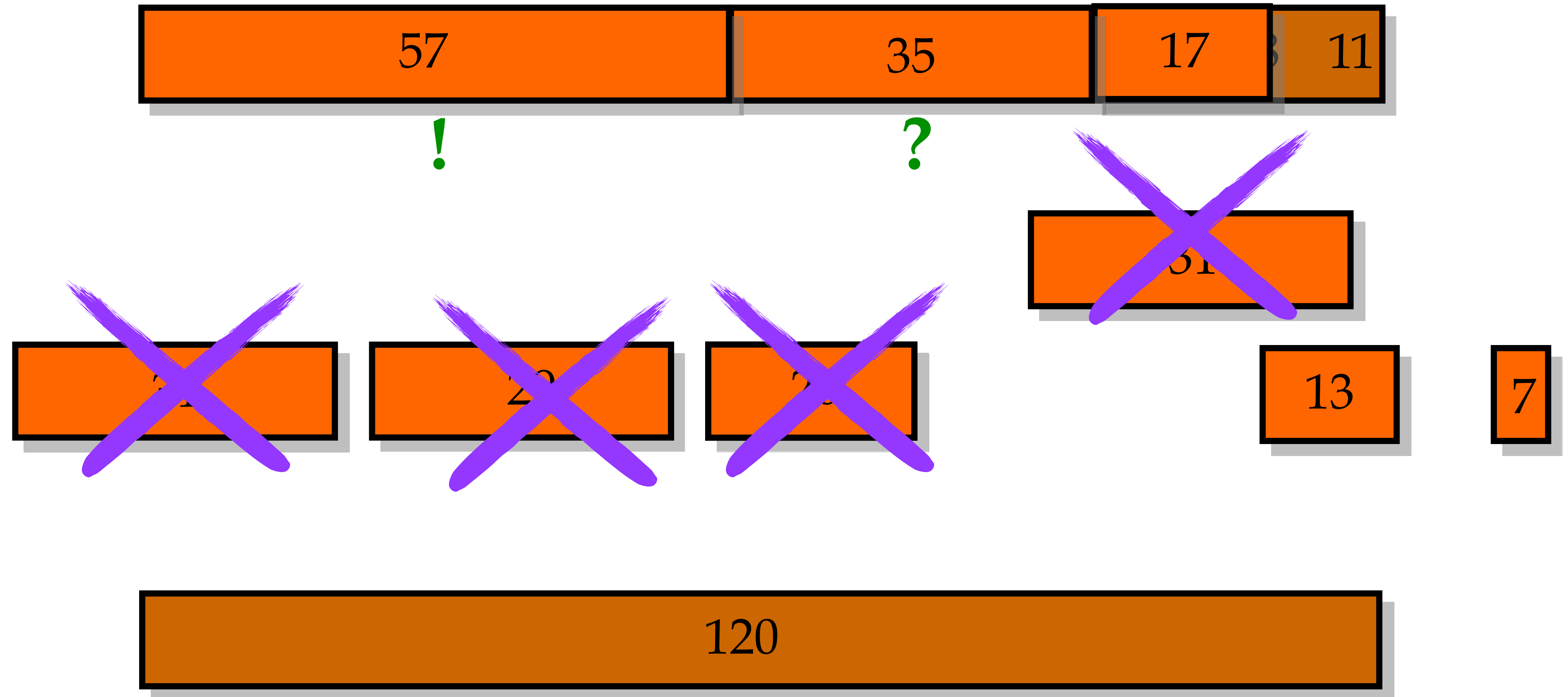
Keine Lösung?!



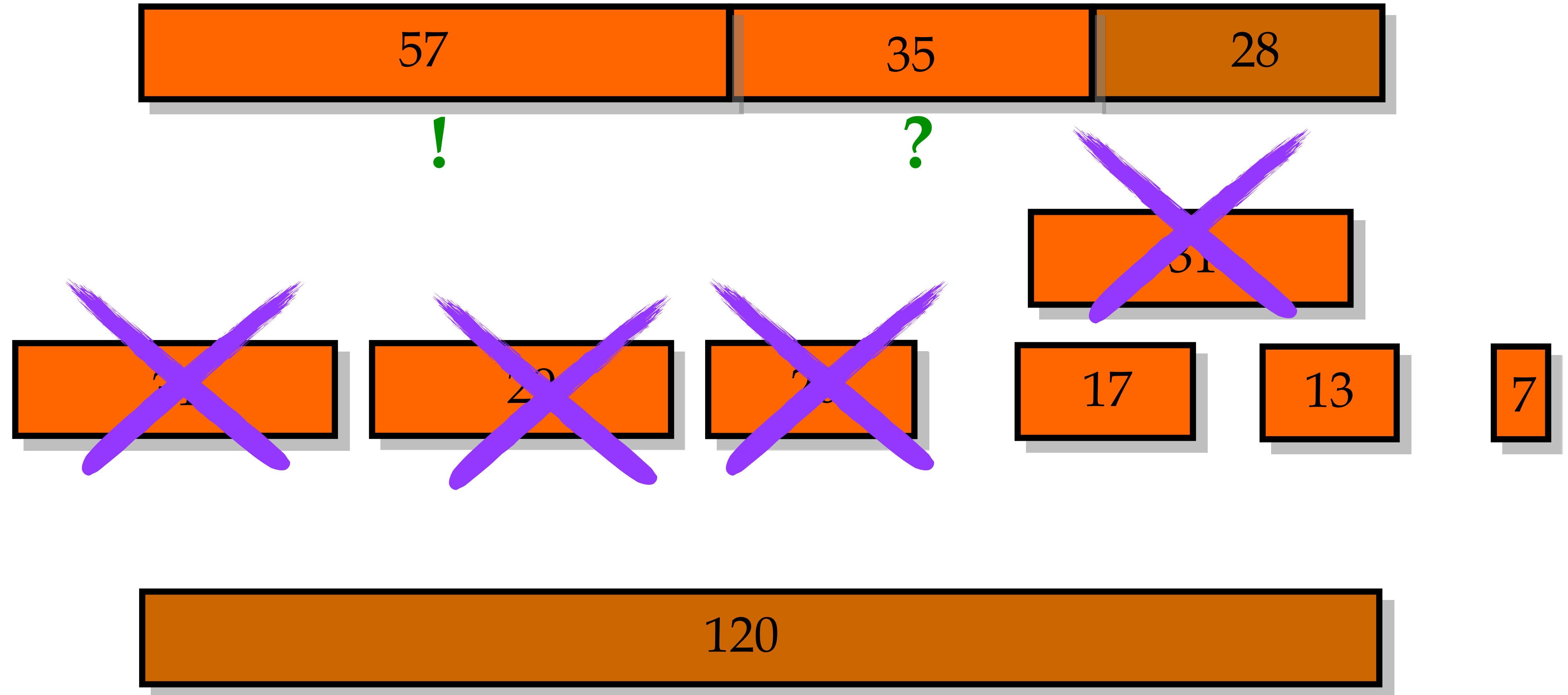
Keine Lösung?!



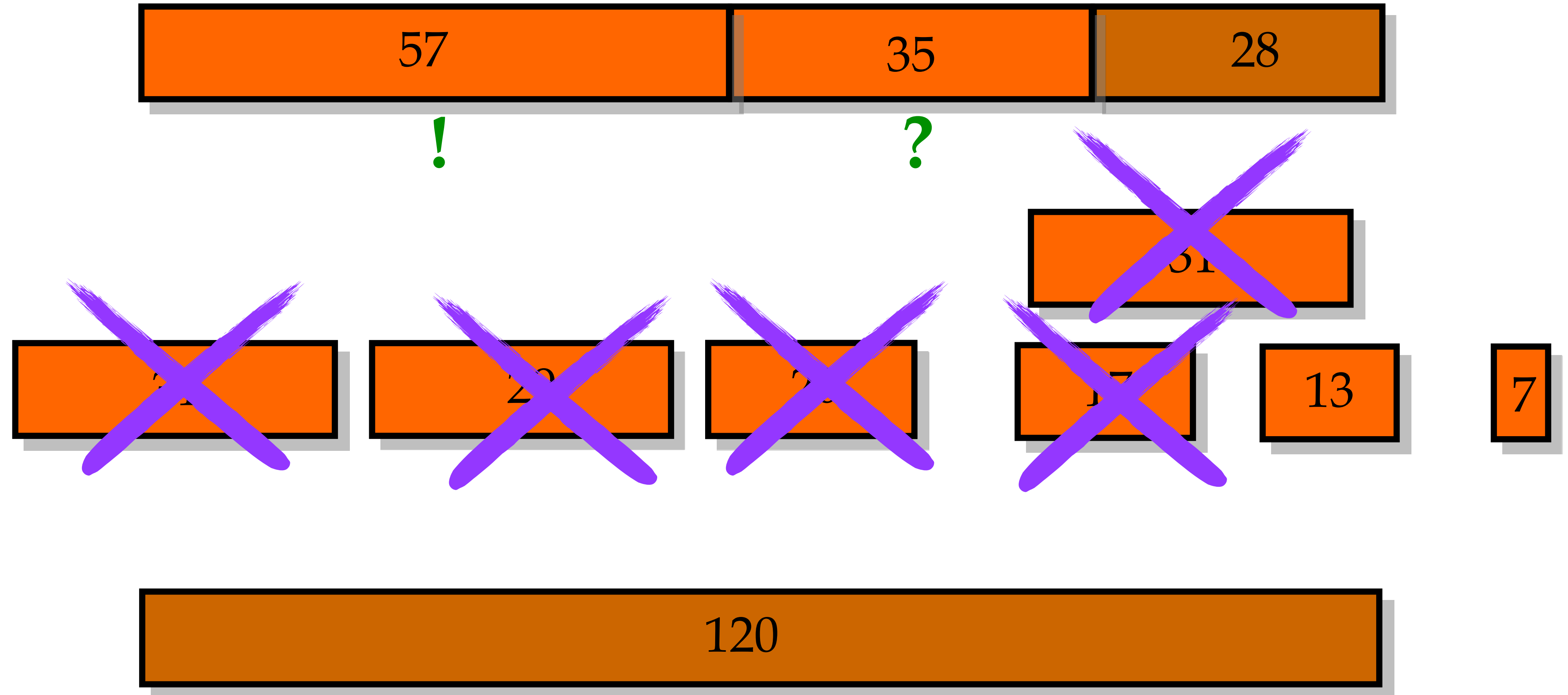
Keine Lösung?!



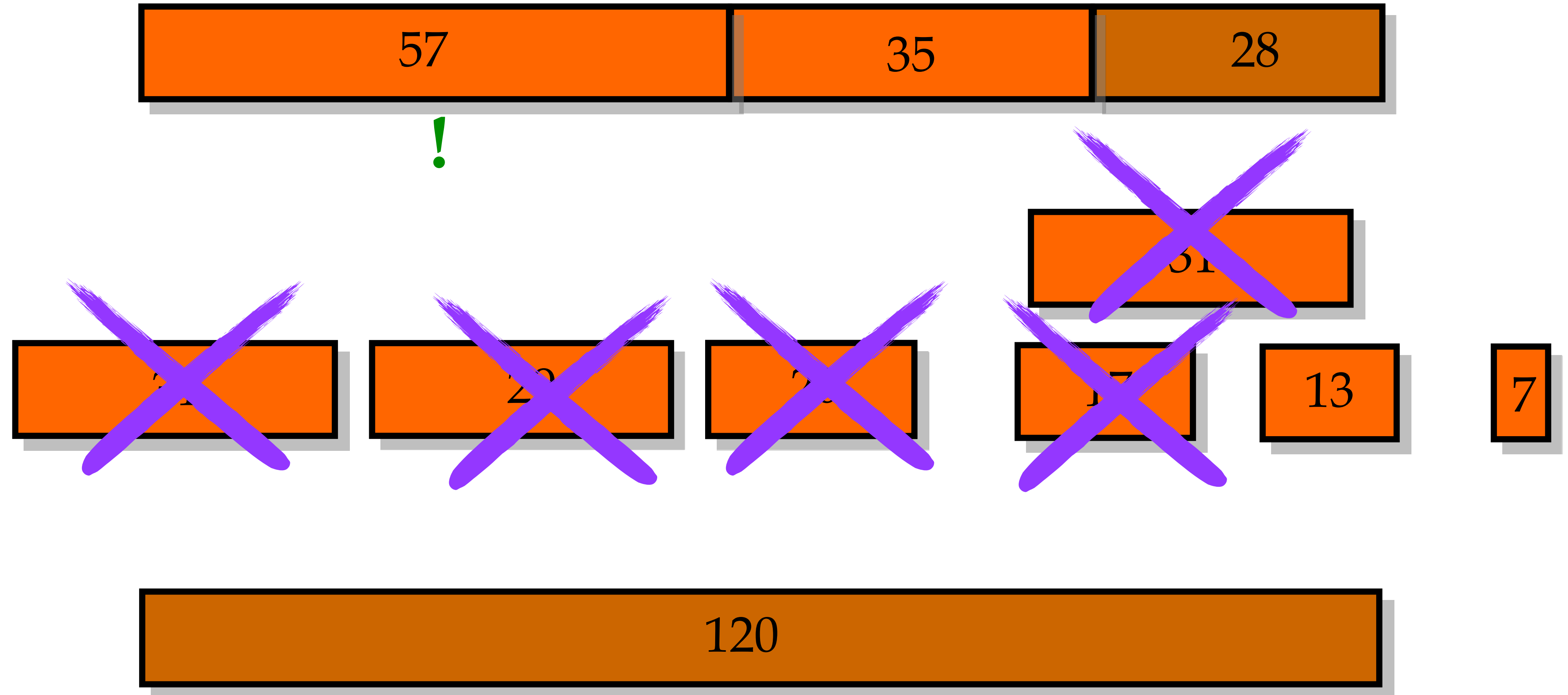
Keine Lösung?!



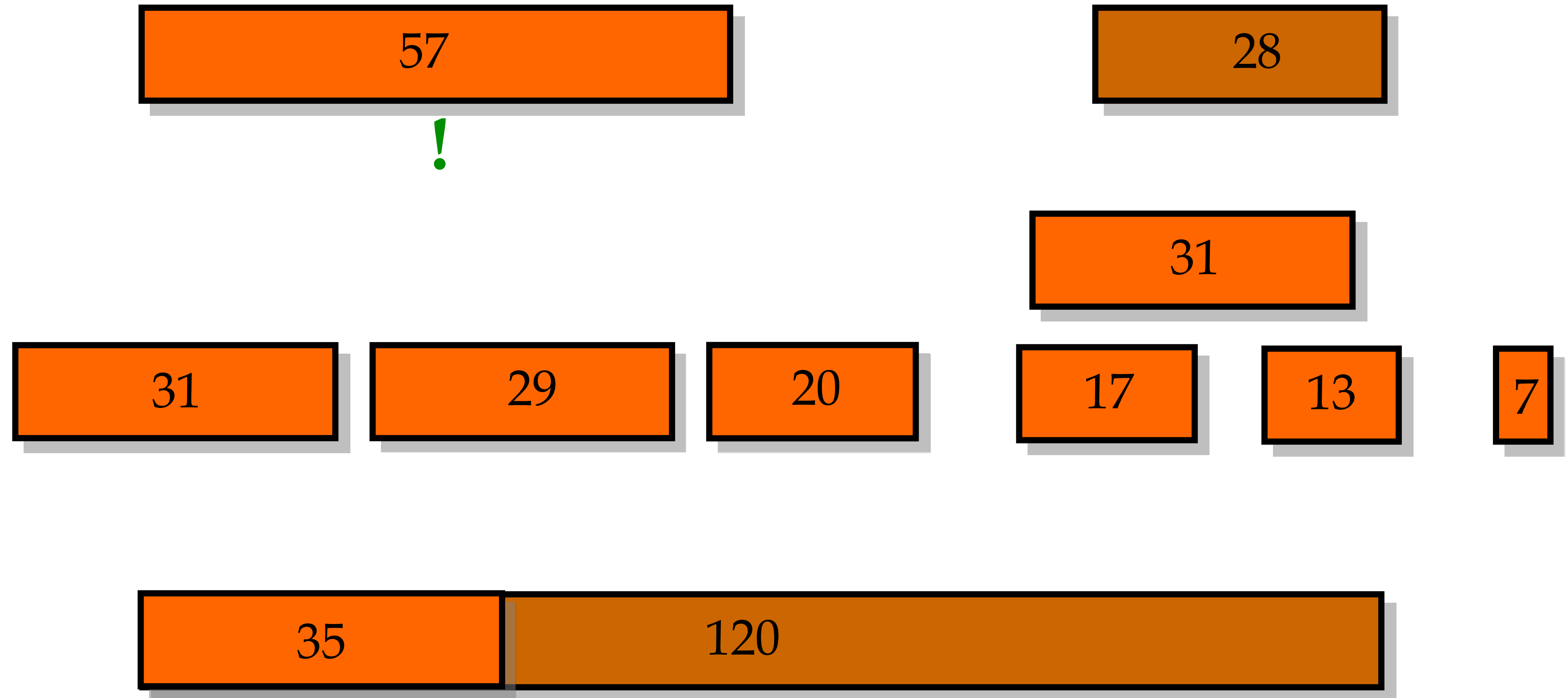
Keine Lösung?!



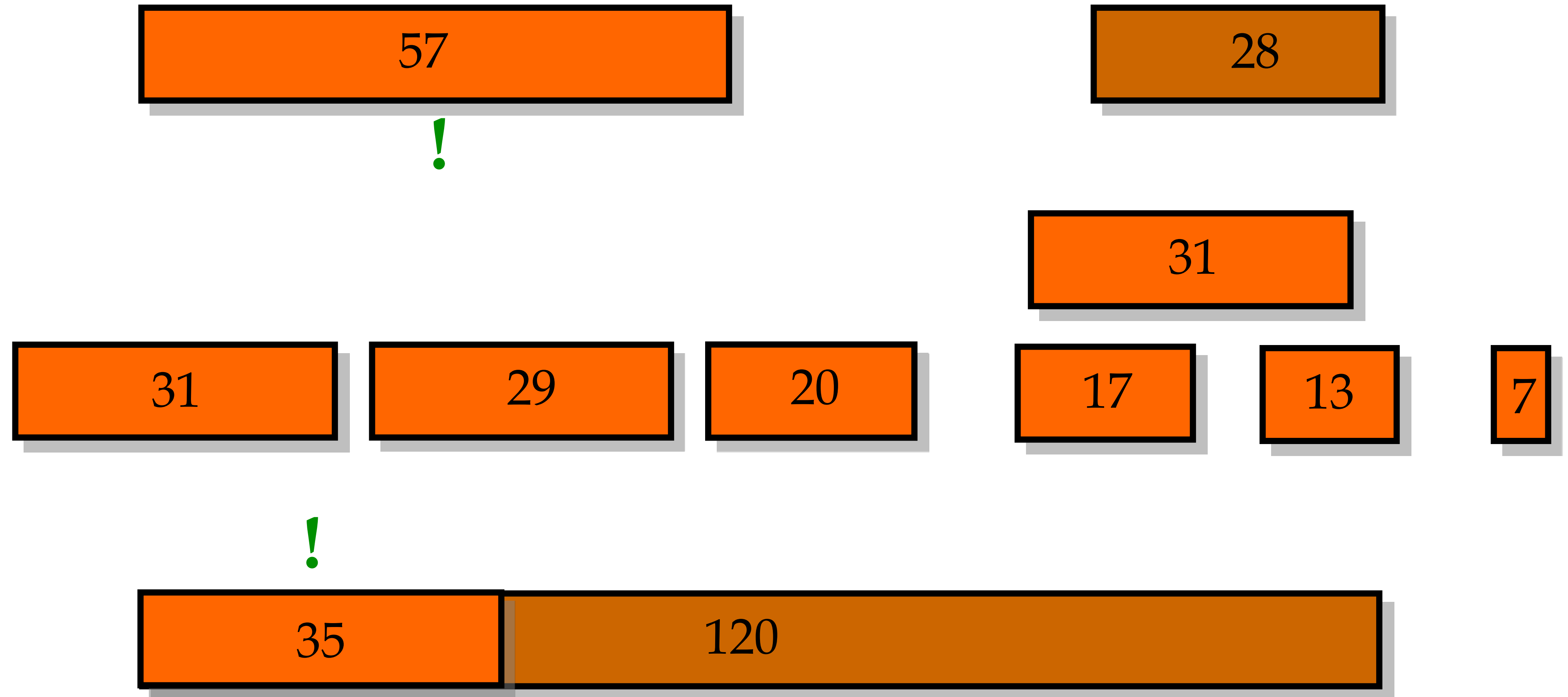
Keine Lösung?!



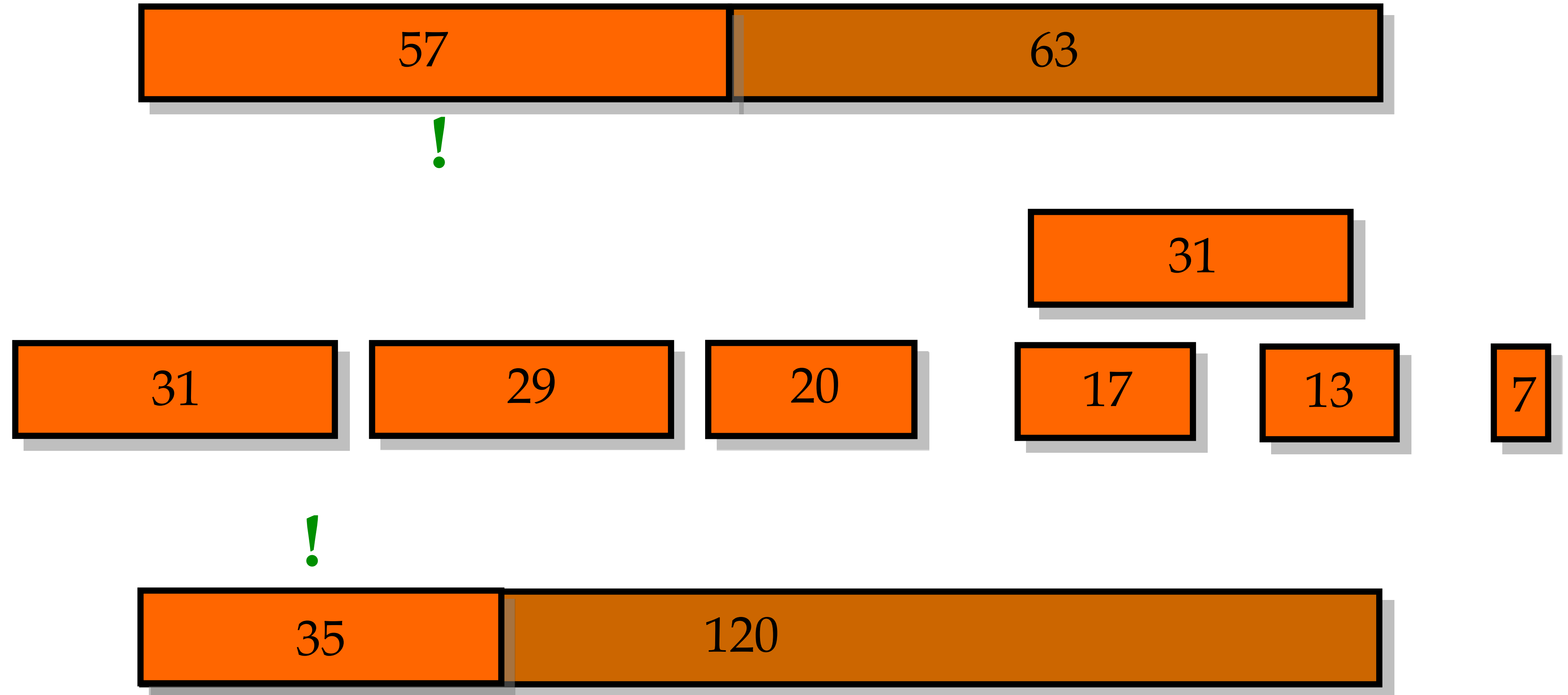
Keine Lösung?!



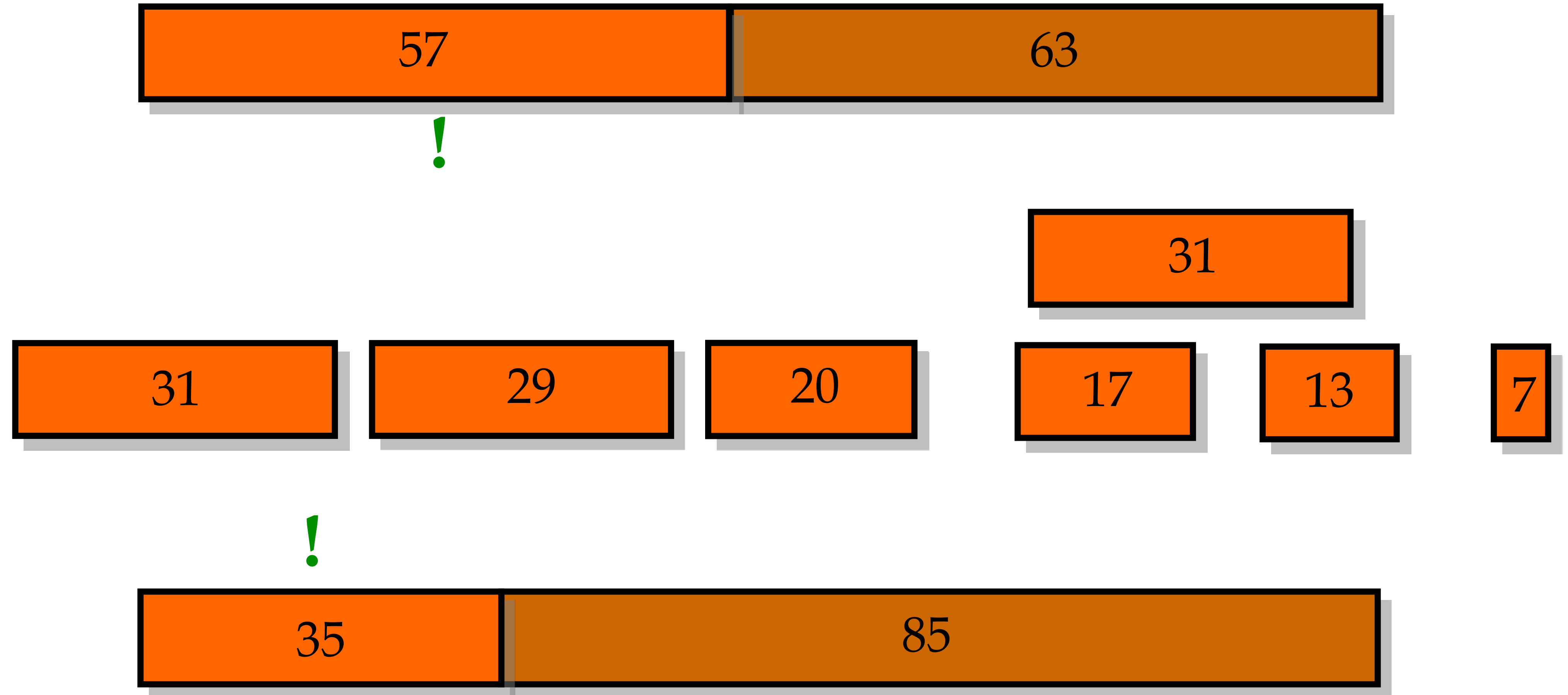
Keine Lösung?!



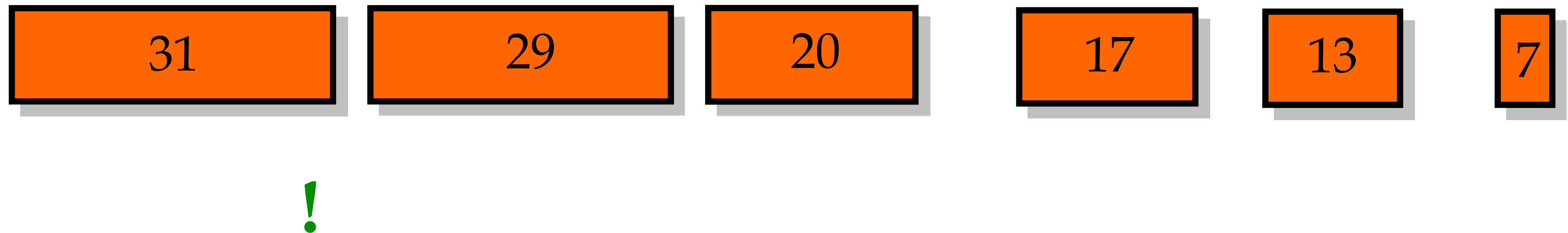
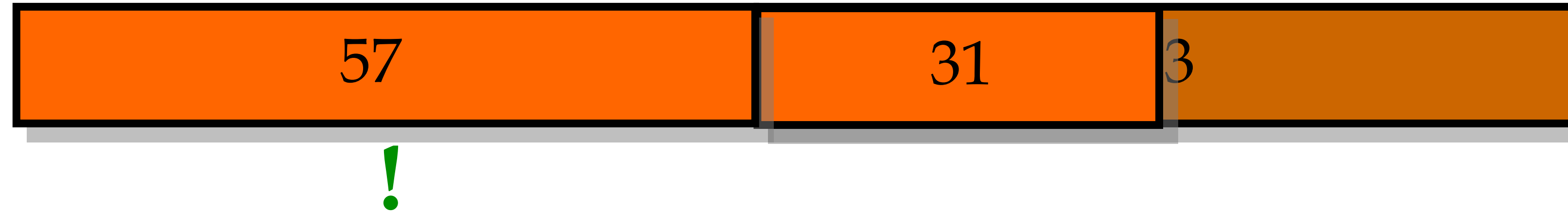
Keine Lösung?!



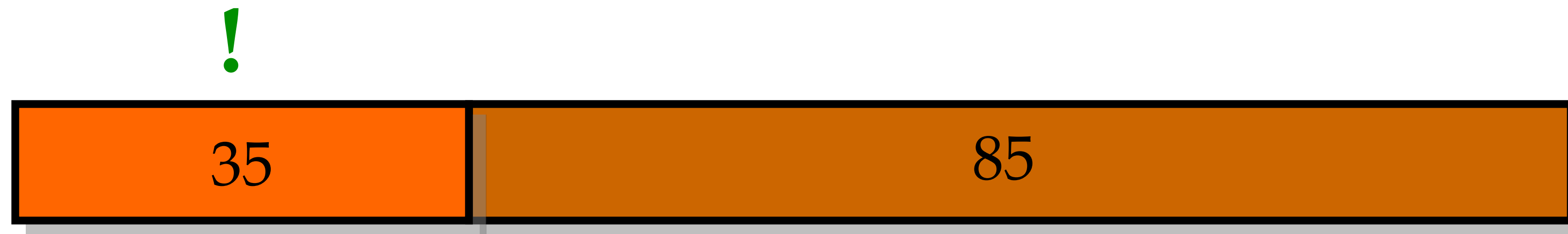
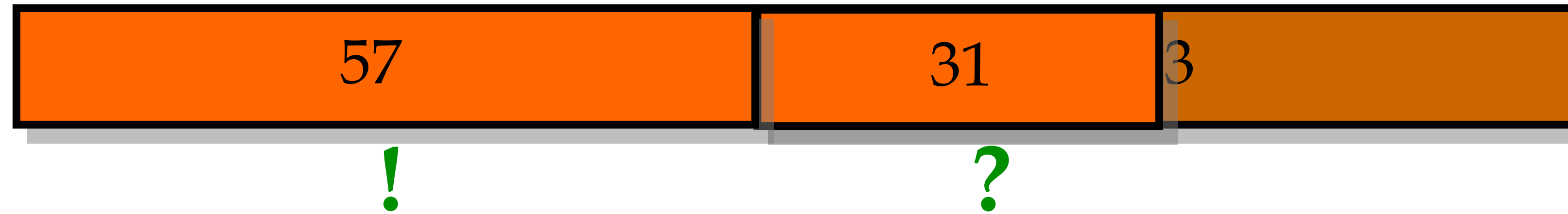
Keine Lösung?!



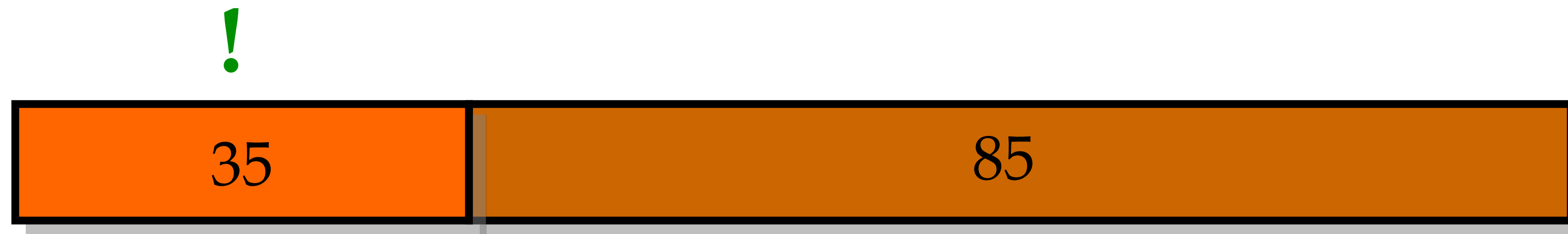
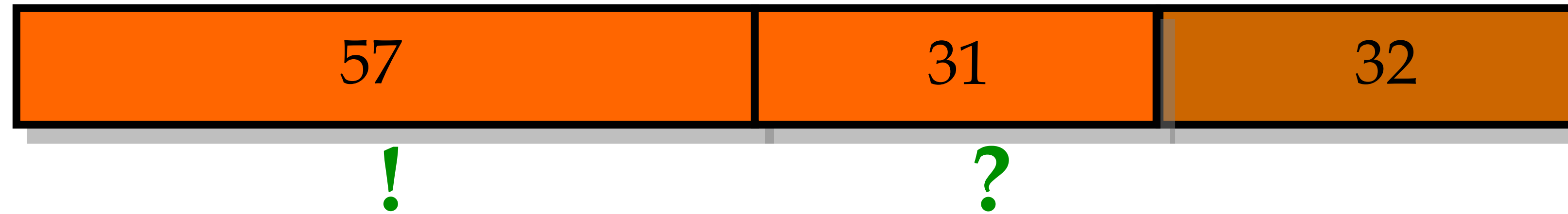
Keine Lösung?!



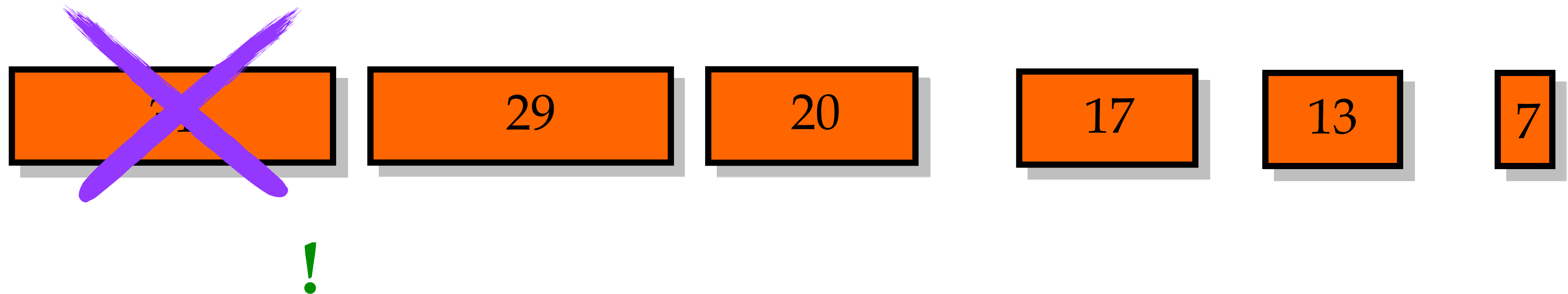
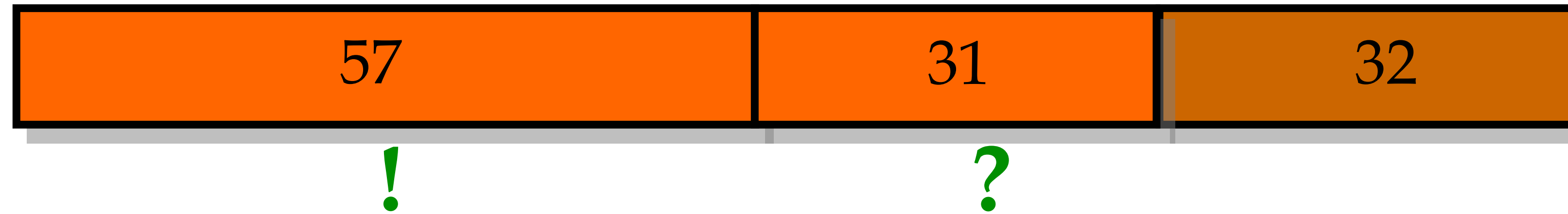
Keine Lösung?!



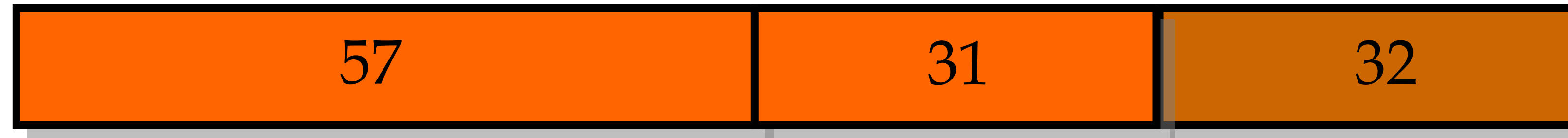
Keine Lösung?!



Keine Lösung?!

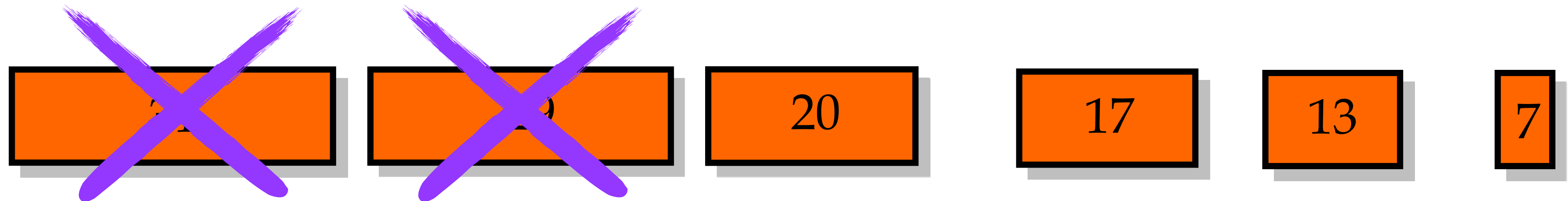


Keine Lösung?!



!

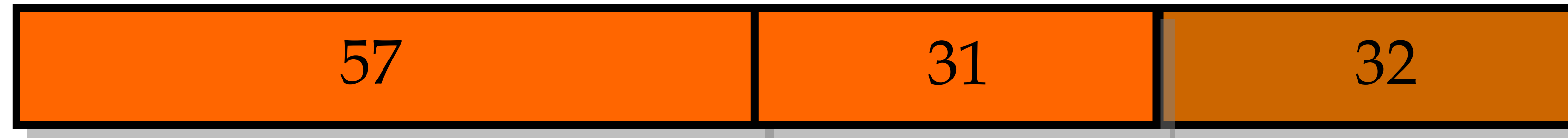
?



!

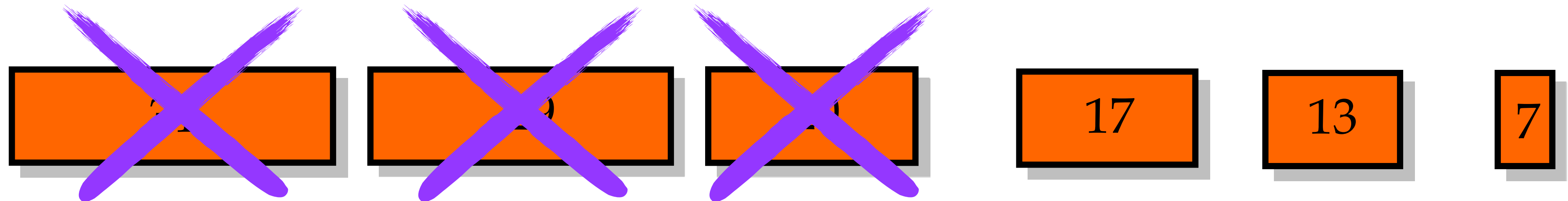


Keine Lösung?!



!

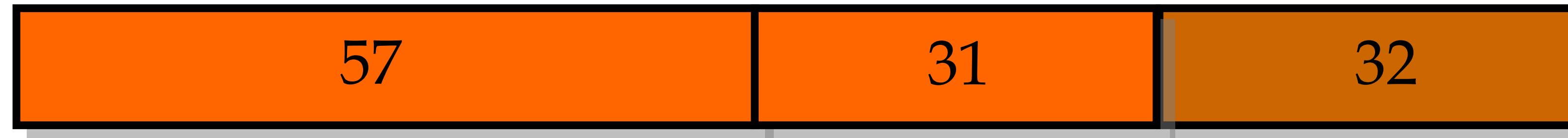
?



!

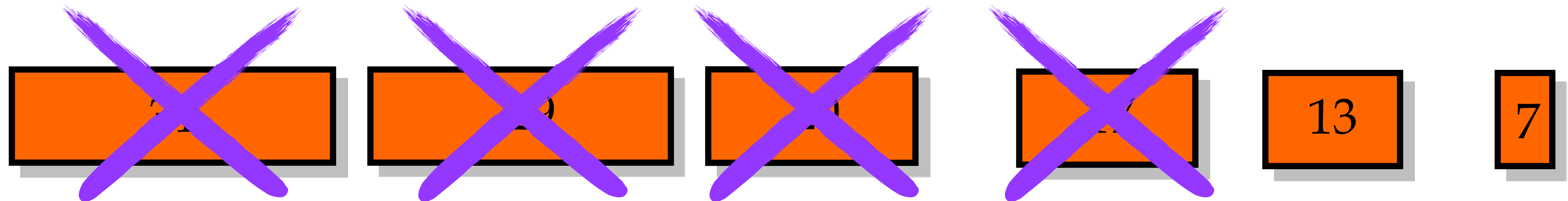


Keine Lösung?!



!

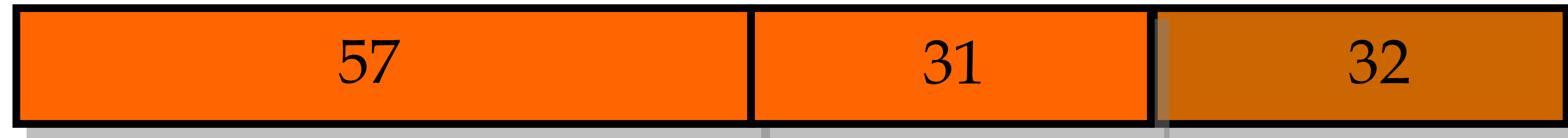
?



!

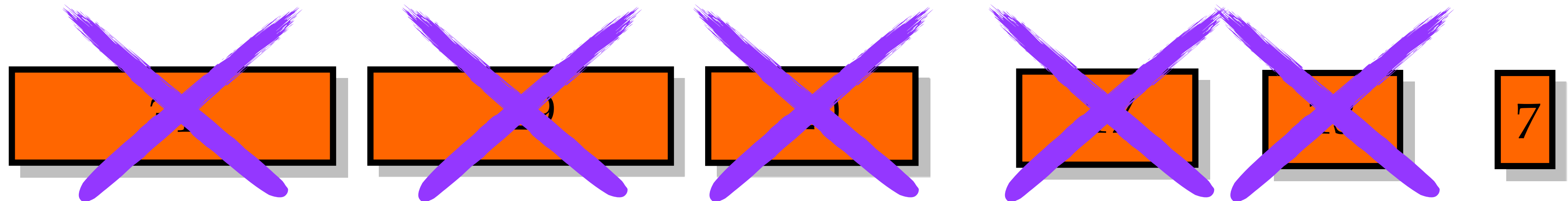


Keine Lösung?!



!

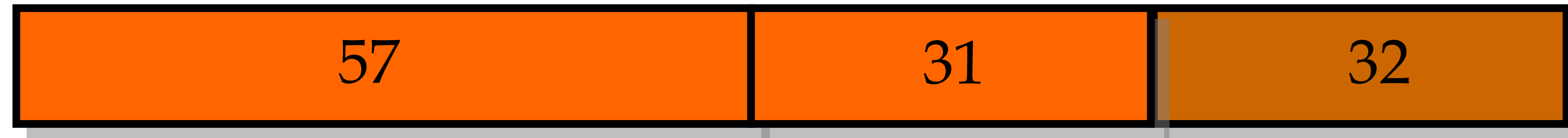
?



!

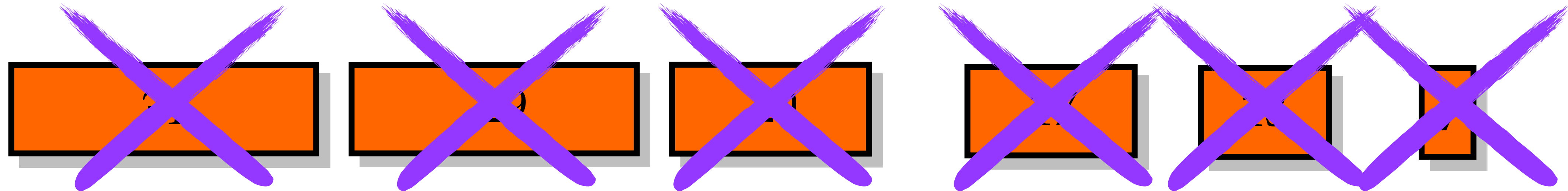


Keine Lösung?!



!

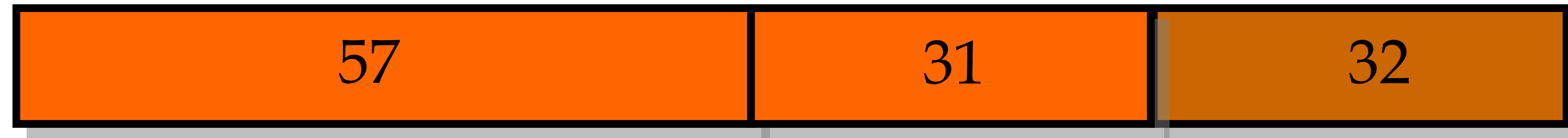
?



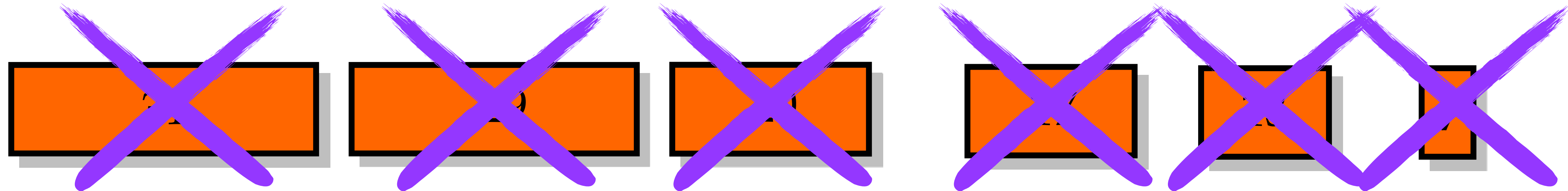
!



Keine Lösung?!



!



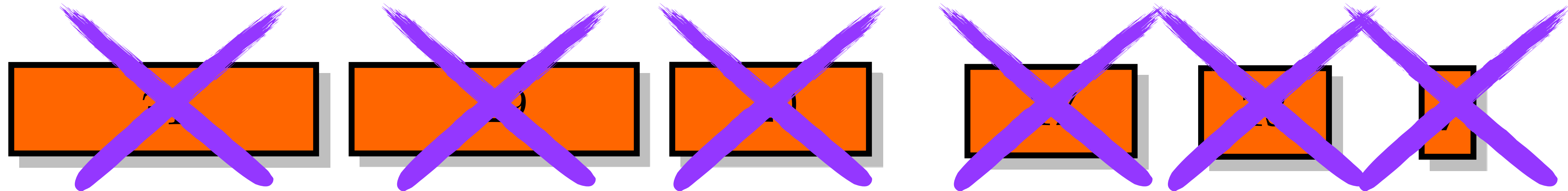
!



Keine Lösung?!

57

32



35 31 85

Keine Lösung?!

57



32

31

29

20

17

13

7



35

31

85

Keine Lösung?!

57



32

31

29

20

17

13

7

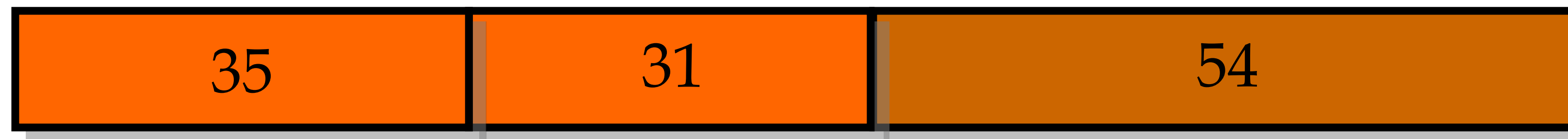
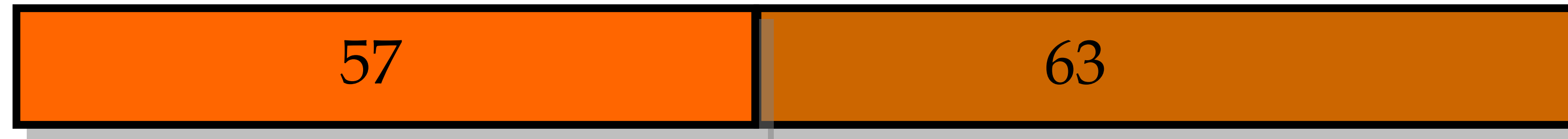


35

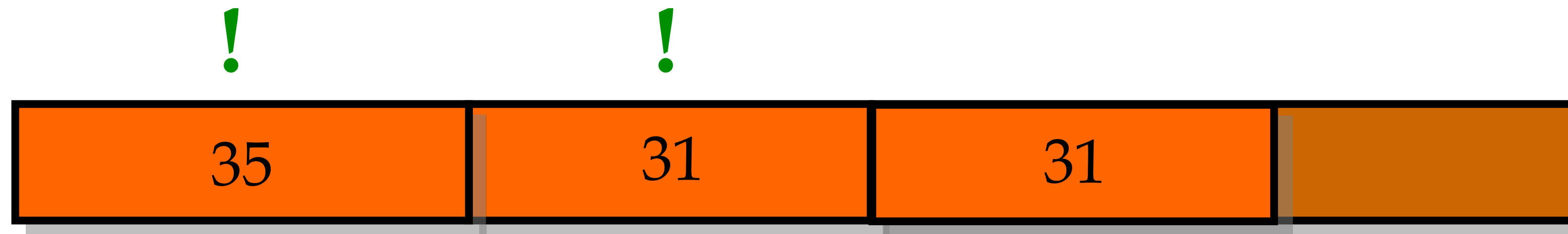
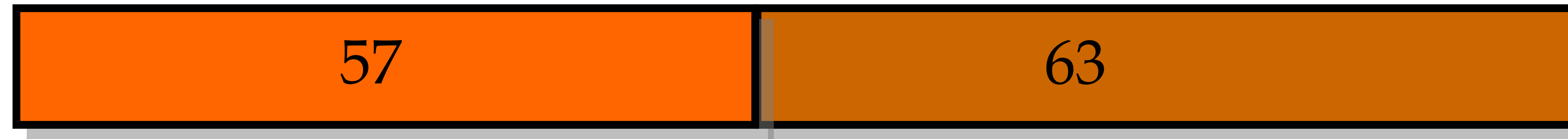
31

85

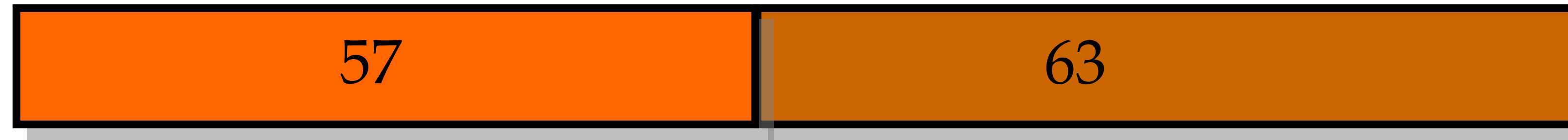
Keine Lösung?!



Keine Lösung?!



Keine Lösung?!



!



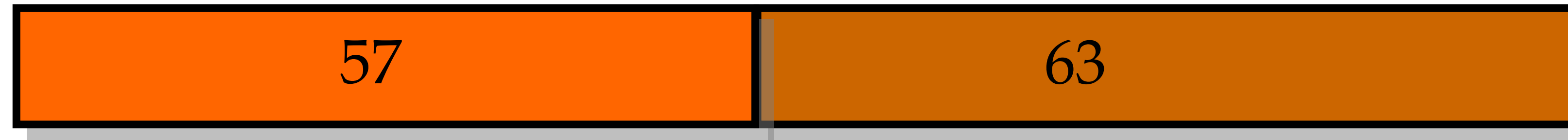
!

!

!



Keine Lösung?!



!



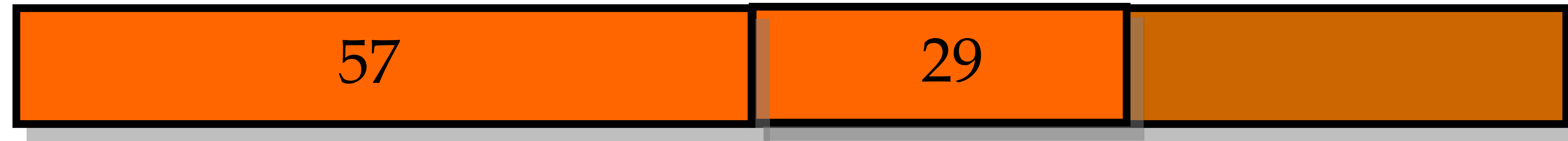
!

!

!



Keine Lösung?!



!

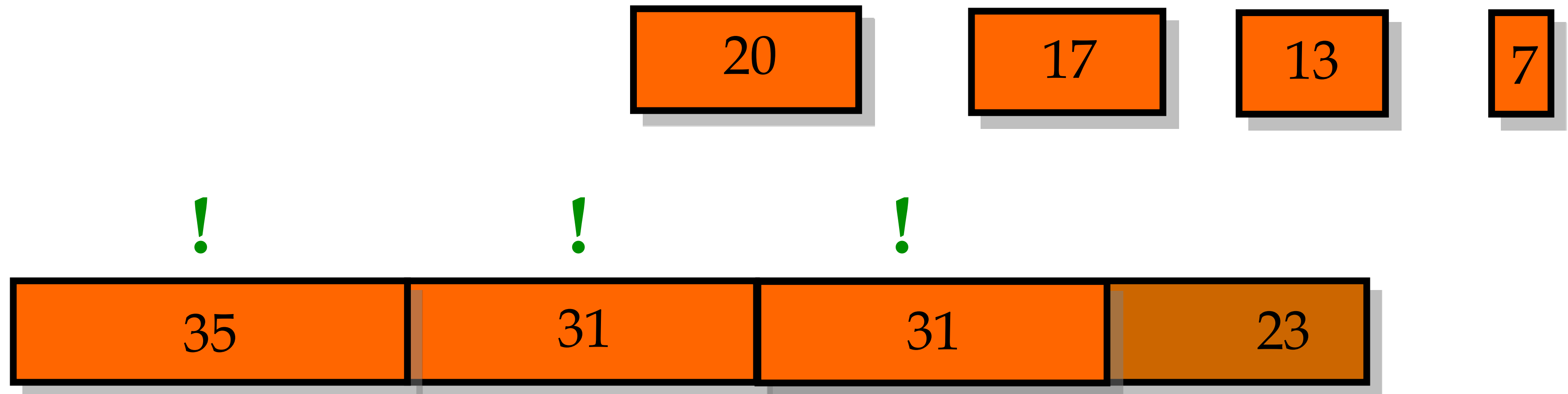
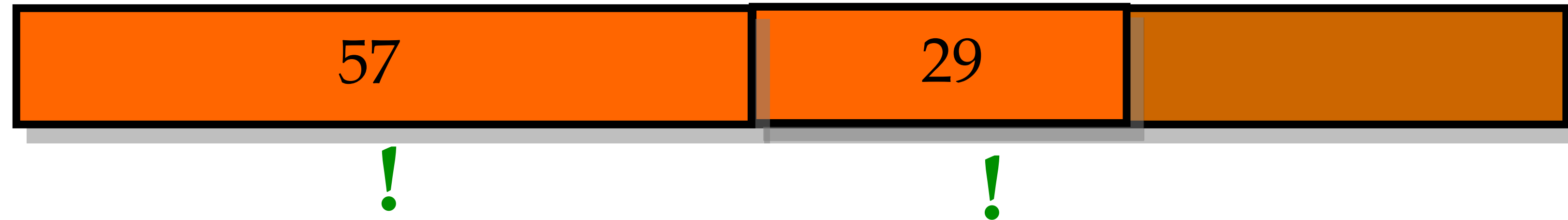


!

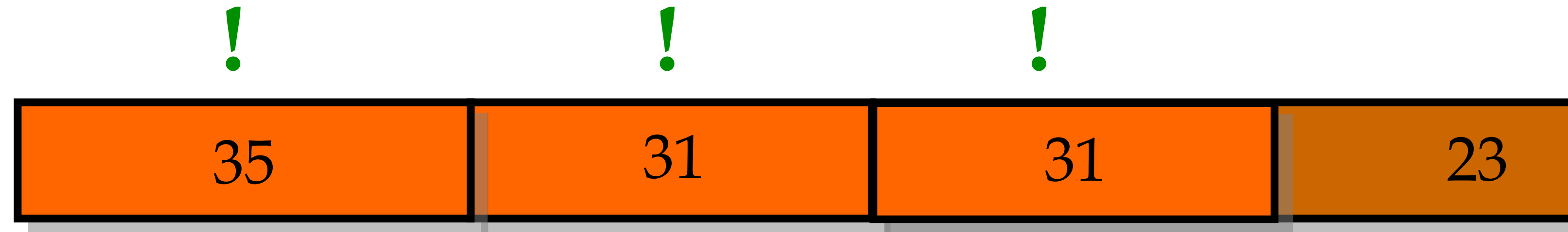
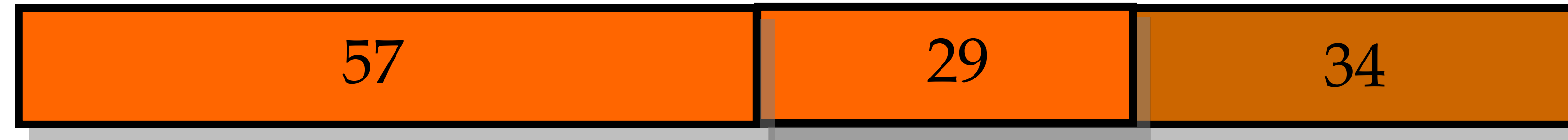
!

!

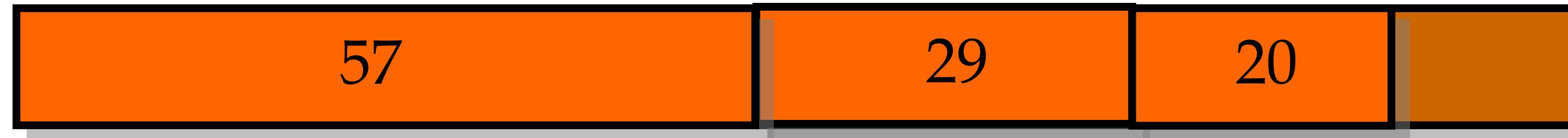
Keine Lösung?!



Keine Lösung?!



Keine Lösung?!



!

!

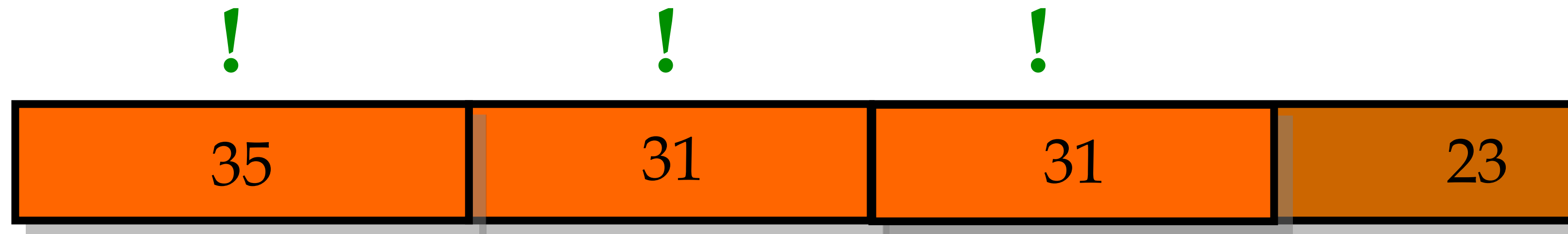
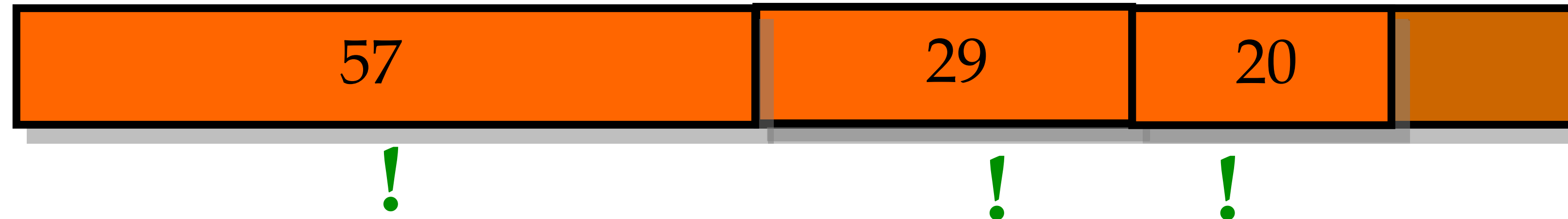


!

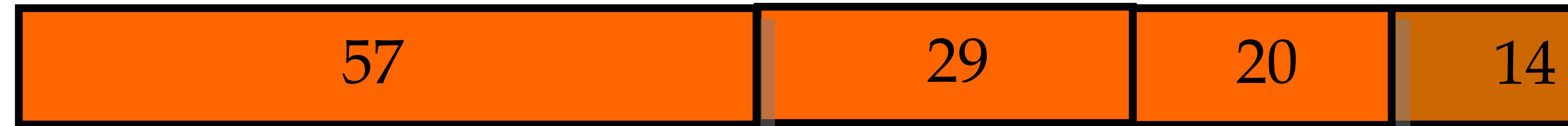
!

!

Keine Lösung?!



Keine Lösung?!



!

!

!



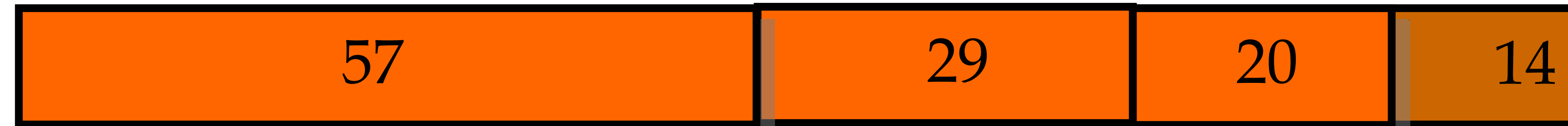
!

!

!



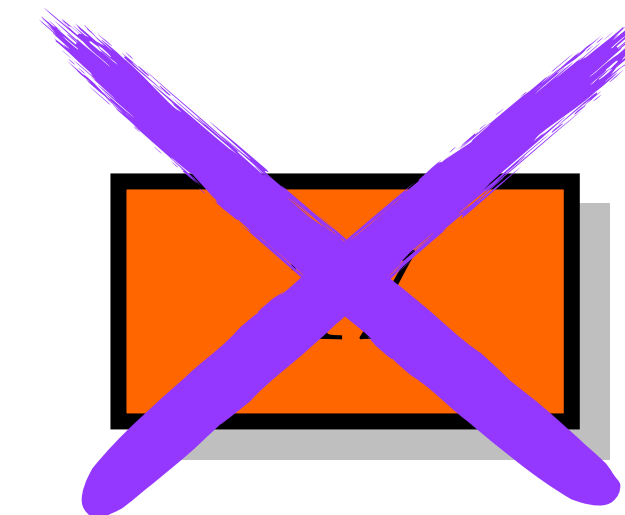
Keine Lösung?!



!

!

!



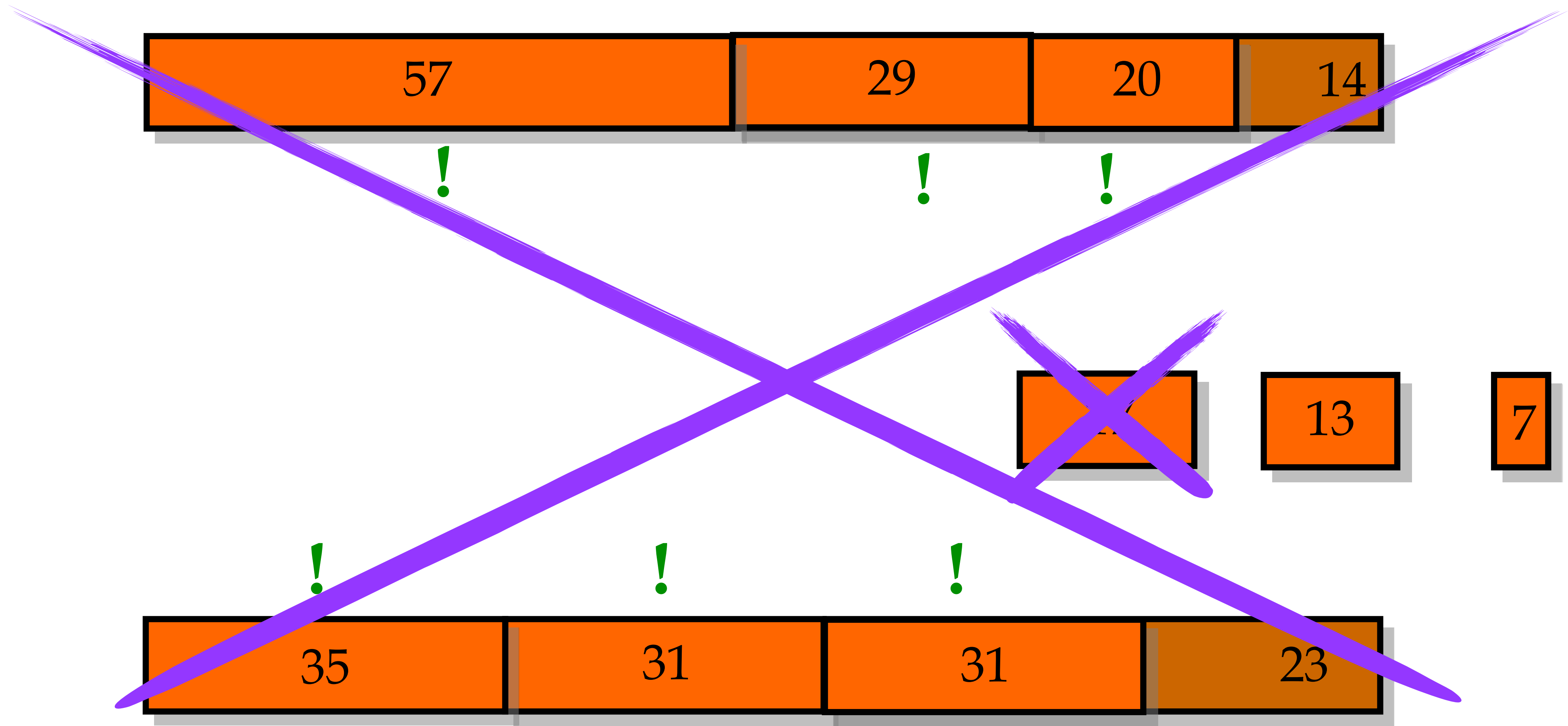
!

!

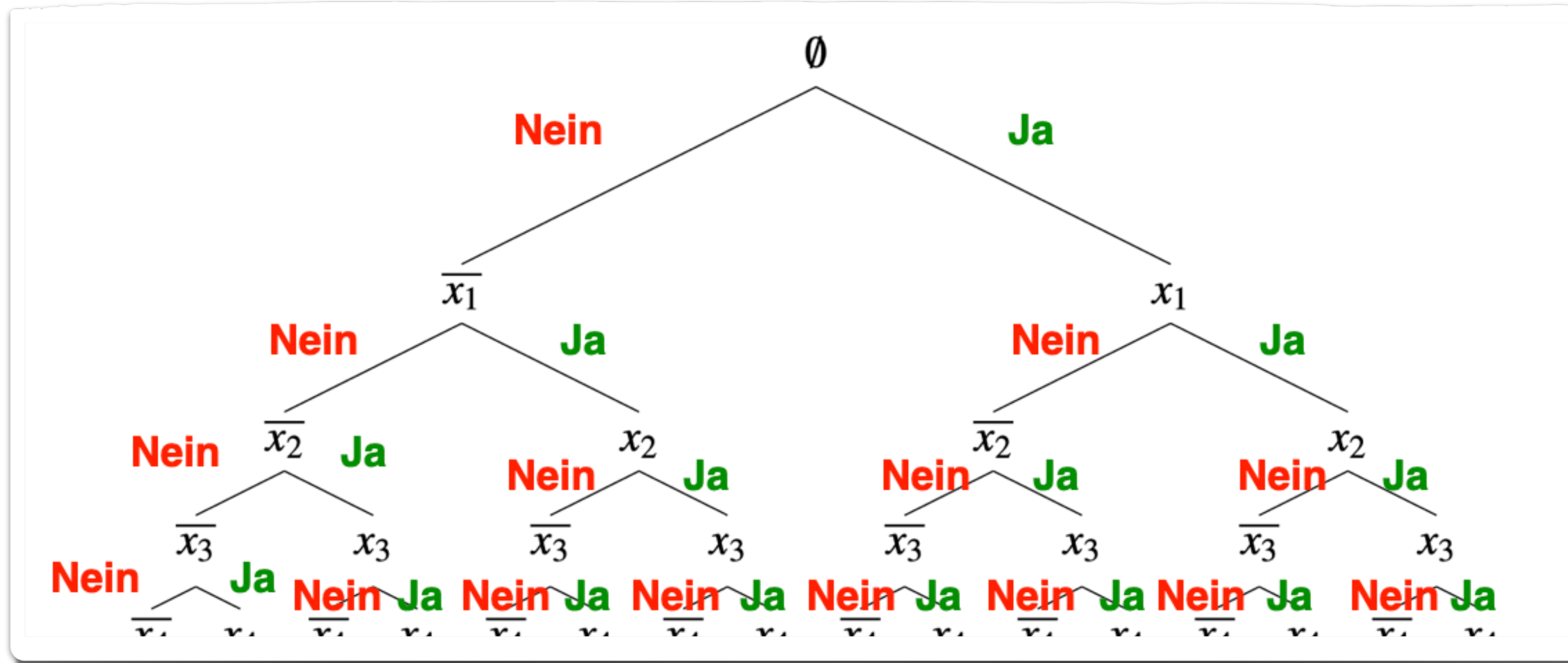
!



Keine Lösung?!

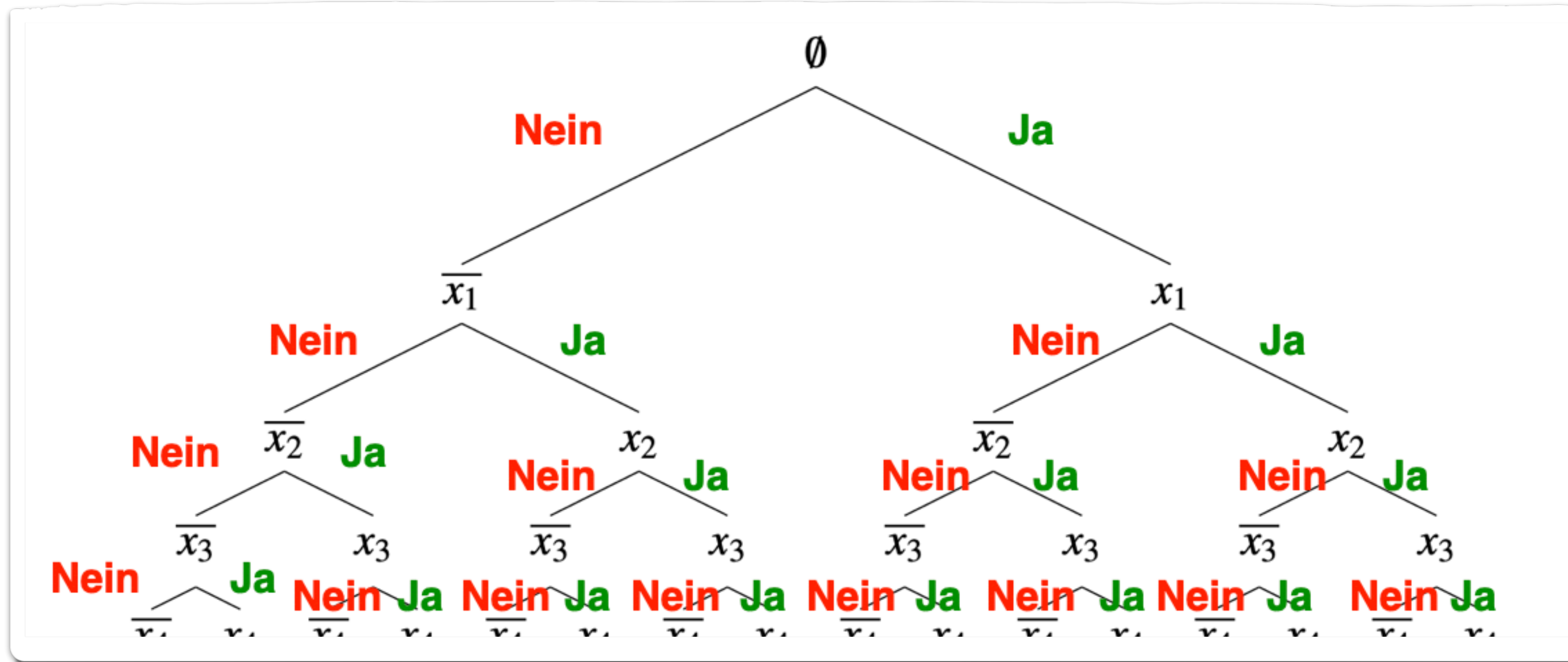


Enumeration



• Exponentiell viele Fälle!

Enumeration



- Exponentiell viele Fälle!
- Kann man Arbeit sparen?

P vs. NP

P vs. NP

The screenshot shows the Clay Mathematics Institute website. At the top, the text reads "Clay Mathematics Institute" followed by "dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge". A navigation menu includes links for "news", "prize problems", "events", "researchers", "students", "awards", "schools", "workshops", and "about cmi". Below the menu is a breadcrumb trail "home / millennium prize problems /" and a search box with a "search" button. The main heading is "Millennium Prize Problems". A list of problems is displayed, with "P versus NP" highlighted in a light blue box. The other problems listed are "The Hodge Conjecture", "The Poincaré Conjecture", "The Riemann Hypothesis", "Yang–Mills Existence and Mass Gap", "Navier–Stokes Existence and Smoothness", and "The Birch and Swinnerton–Dyer Conjecture". At the bottom, it states "Announced 16:00, on Wednesday, May 24, 2000" and "Collège de France".

Clay Mathematics Institute
dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge

news prize problems events researchers students awards schools workshops about cmi

home / millennium prize problems /

search

Millennium Prize Problems

P versus NP

The Hodge Conjecture

The Poincaré Conjecture

The Riemann Hypothesis

Yang–Mills Existence and Mass Gap

Navier–Stokes Existence and Smoothness

The Birch and Swinnerton–Dyer Conjecture

Announced 16:00, on Wednesday, May 24, 2000
Collège de France

P vs. NP

Clay Mathematics Institute
dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge

news prize problems events researchers students awards schools workshops about cmi

home / millennium prize problems /

Millennium Prize Problems

P versus NP

The Hodge Conjecture

The Poincaré Conjecture

The Riemann Hypothesis

Yang–Mills Existence and Mass Gap

Navier–Stokes Existence and Smoothness

The Birch and Swinnerton–Dyer Conjecture

Announced 16:00, on Wednesday, May 24, 2000
Collège de France

P vs. NP

Clay Mathematics Institute
dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge

news prize problems events researchers students awards schools workshops about cmi

home / millennium prize problems /

Millennium Prize Problems

P versus NP

The Hodge Conjecture

The Poincaré Conjecture

The Riemann Hypothesis

Yang–Mills Existence and Mass Gap

Navier–Stokes Existence and Smoothness

The Birch and Swinnerton–Dyer Conjecture

Announced 16:00, on Wednesday, May 24, 2000
Collège de France

P vs. NP

Clay Mathematics Institute
dedicated to increasing and disseminating mathematical knowledge

news prize problems events researchers students awards schools workshops about cmi

home / millennium prize problems /

Millennium Prize Problems

- P versus NP**
- The Hodge Conjecture
- ~~The Poincaré Conjecture~~
- The Riemann Hypothesis
- Yang–Mills Existence and Mass Gap
- Navier–Stokes Existence and Smoothness
- The Birch and Swinnerton–Dyer Conjecture

Announced 16:00, on Wednesday, May 24, 2000
Collège de France

Feinheiten

Feinheiten

- Definition der Klasse NP über schnelle Verifizierbarkeit ist anschaulich.

Feinheiten

- Definition der Klasse NP über schnelle Verifizierbarkeit ist anschaulich.
- Eine formalere Definition (über nichtdeterministische Turingmaschinen) lernt man in Theoretischer Informatik.

Feinheiten

- Definition der Klasse NP über schnelle Verifizierbarkeit ist anschaulich.
- Eine formalere Definition (über nichtdeterministische Turingmaschinen) lernt man in Theoretischer Informatik.
- Genau genommen sind Probleme in der Klasse NP Entscheidungsprobleme:
Gibt es eine Lösung?

Feinheiten

- Definition der Klasse NP über schnelle Verifizierbarkeit ist anschaulich.
- Eine formalere Definition (über nichtdeterministische Turingmaschinen) lernt man in Theoretischer Informatik.
- Genau genommen sind Probleme in der Klasse NP Entscheidungsprobleme:
Gibt es eine Lösung?
- Die zugehörigen Optimierungsprobleme kann man aber durch eine Reihe von Entscheidungsproblemen lösen:
 - ✓ Gibt es eine Lösung mindestens vom Wert OPT?

5.3 Ein Beispiel mit Logik

Beispiel 5.5: Knapsack

Beispiel 5.5: Knapsack

Beispiel 5.5.

Wir betrachten die folgende Knapsack-Instanz mit $n = 12$, $z_i = p_i$, $Z = 111444$ und den folgenden Objekten:

Beispiel 5.5: Knapsack

Beispiel 5.5.

Wir betrachten die folgende Knapsack-Instanz mit $n = 12$, $z_i = p_i$, $Z = 111444$ und den folgenden Objekten:

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Knapsack

Beispiel 5.5.

Wir betrachten die folgende Knapsack-Instanz mit $n = 12$, $z_i = p_i$, $Z = 111444$ und den folgenden Objekten:

Gibt es eine Menge $S \subseteq \{1, \dots, 12\}$ mit $\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in S} p_i = Z$?

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

111444

Beispiel 5.5: Beobachtungen



$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

111444

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen,
aber nicht beide.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen,
aber nicht beide.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen,
aber nicht beide.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen,
aber nicht beide.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen,
aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen,
aber nicht beide.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen,
aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen,
aber nicht beide.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen,
aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen,
aber nicht beide.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen,
aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen,
aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen,
aber nicht beide.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

$$z_1 = p_1 = 100110$$

$$z_2 = p_2 = 100001$$

$$z_3 = p_3 = 10101$$

$$z_4 = p_4 = 10010$$

$$z_5 = p_5 = 1001$$

$$z_6 = p_6 = 1110$$

$$z_7 = p_7 = 200$$

$$z_8 = p_8 = 100$$

$$z_9 = p_9 = 20$$

$$z_{10} = p_{10} = 10$$

$$z_{11} = p_{11} = 2$$

$$z_{12} = p_{12} = 1$$

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

111444

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

111444

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

5. Ziffer: Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

111444

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

5. Ziffer: Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.

$$z_1 = p_1 = 100110$$

$$z_2 = p_2 = 100001$$

$$z_3 = p_3 = 10101$$

$$z_4 = p_4 = 10010$$

$$z_5 = p_5 = 1001$$

$$z_6 = p_6 = 1110$$

$$z_7 = p_7 = 200$$

$$z_8 = p_8 = 100$$

$$z_9 = p_9 = 20$$

$$z_{10} = p_{10} = 10$$

$$z_{11} = p_{11} = 2$$

$$z_{12} = p_{12} = 1$$

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

5. Ziffer: Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

5. Ziffer: Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

5. Ziffer: Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.

6. Ziffer: Man muss 2, 3 oder 5 auswählen, dann kann man mit 11 und 12 den Wert 4 erzeugen.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Beobachtungen

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

5. Ziffer: Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.

6. Ziffer: Man muss 2, 3 oder 5 auswählen, dann kann man mit 11 und 12 den Wert 4 erzeugen.

$$z_1 = p_1 = 100110$$

$$z_2 = p_2 = 100001$$

$$z_3 = p_3 = 10101$$

$$z_4 = p_4 = 10010$$

$$z_5 = p_5 = 1001$$

$$z_6 = p_6 = 1110$$

$$z_7 = p_7 = 200$$

$$z_8 = p_8 = 100$$

$$z_9 = p_9 = 20$$

$$z_{10} = p_{10} = 10$$

$$z_{11} = p_{11} = 2$$

$$z_{12} = p_{12} = 1$$

Beispiel 5.5: Beobachtungen

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

5. Ziffer: Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.

6. Ziffer: Man muss 2, 3 oder 5 auswählen, dann kann man mit 11 und 12 den Wert 4 erzeugen.

$$z_1 = p_1 = 100110$$

$$z_2 = p_2 = 100001$$

$$z_3 = p_3 = 10101$$

$$z_4 = p_4 = 10010$$

$$z_5 = p_5 = 1001$$

$$z_6 = p_6 = 1110$$

$$z_7 = p_7 = 200$$

$$z_8 = p_8 = 100$$

$$z_9 = p_9 = 20$$

$$z_{10} = p_{10} = 10$$

$$z_{11} = p_{11} = 2$$

$$z_{12} = p_{12} = 1$$

Beispiel 5.5: Beobachtungen

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

5. Ziffer: Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.

6. Ziffer: Man muss 2, 3 oder 5 auswählen, dann kann man mit 11 und 12 den Wert 4 erzeugen.

$$z_1 = p_1 = 100110$$

$$z_2 = p_2 = 100001$$

$$z_3 = p_3 = 10101$$

$$z_4 = p_4 = 10010$$

$$z_5 = p_5 = 1001$$

$$z_6 = p_6 = 1110$$

$$z_7 = p_7 = 200$$

$$z_8 = p_8 = 100$$

$$z_9 = p_9 = 20$$

$$z_{10} = p_{10} = 10$$

$$z_{11} = p_{11} = 2$$

$$z_{12} = p_{12} = 1$$

Beispiel 5.5: Beobachtungen

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

5. Ziffer: Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.

6. Ziffer: Man muss 2, 3 oder 5 auswählen, dann kann man mit 11 und 12 den Wert 4 erzeugen.

$$z_1 = p_1 = 100110$$

$$z_2 = p_2 = 100001$$

$$z_3 = p_3 = 10101$$

$$z_4 = p_4 = 10010$$

$$z_5 = p_5 = 1001$$

$$z_6 = p_6 = 1110$$

$$z_7 = p_7 = 200$$

$$z_8 = p_8 = 100$$

$$z_9 = p_9 = 20$$

$$z_{10} = p_{10} = 10$$

$$z_{11} = p_{11} = 2$$

$$z_{12} = p_{12} = 1$$

Beispiel 5.5: Beobachtungen

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

5. Ziffer: Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.

6. Ziffer: Man muss 2, 3 oder 5 auswählen, dann kann man mit 11 und 12 den Wert 4 erzeugen.

$$z_1 = p_1 = 100110$$

$$z_2 = p_2 = 100001$$

$$z_3 = p_3 = 10101$$

$$z_4 = p_4 = 10010$$

$$z_5 = p_5 = 1001$$

$$z_6 = p_6 = 1110$$

$$z_7 = p_7 = 200$$

$$z_8 = p_8 = 100$$

$$z_9 = p_9 = 20$$

$$z_{10} = p_{10} = 10$$

$$z_{11} = p_{11} = 2$$

$$z_{12} = p_{12} = 1$$

Beispiel 5.5: Beobachtungen

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

5. Ziffer: Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.

6. Ziffer: Man muss 2, 3 oder 5 auswählen, dann kann man mit 11 und 12 den Wert 4 erzeugen.

$$z_1 = p_1 = 100110$$

$$z_2 = p_2 = 100001$$

$$z_3 = p_3 = 10101$$

$$z_4 = p_4 = 10010$$

$$z_5 = p_5 = 1001$$

$$z_6 = p_6 = 1110$$

$$z_7 = p_7 = 200$$

$$z_8 = p_8 = 100$$

$$z_9 = p_9 = 20$$

$$z_{10} = p_{10} = 10$$

$$z_{11} = p_{11} = 2$$

$$z_{12} = p_{12} = 1$$

Beispiel 5.5: Beobachtungen

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$

1. Ziffer: Man muss 1 oder 2 auswählen, aber nicht beide.

2. Ziffer: Man muss 3 oder 4 auswählen, aber nicht beide.

3. Ziffer: Man muss 5 oder 6 auswählen, aber nicht beide.

4. Ziffer: Man muss 1, 3 oder 6 auswählen, dann kann man mit 7 und 8 den Wert 4 erzeugen.

5. Ziffer: Man muss 1, 4 oder 6 auswählen, dann kann man mit 9 und 10 den Wert 4 erzeugen.

6. Ziffer: Man muss 2, 3 oder 5 auswählen, dann kann man mit 11 und 12 den Wert 4 erzeugen.

$$z_1 = p_1 = 100110$$

$$z_2 = p_2 = 100001$$

$$z_3 = p_3 = 10101$$

$$z_4 = p_4 = 10010$$

$$z_5 = p_5 = 1001$$

$$z_6 = p_6 = 1110$$

$$z_7 = p_7 = 200$$

$$z_8 = p_8 = 100$$

$$z_9 = p_9 = 20$$

$$z_{10} = p_{10} = 10$$

$$z_{11} = p_{11} = 2$$

$$z_{12} = p_{12} = 1$$

Beispiel 5.5: Beobachtungen

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Äquivalenz

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Äquivalenz

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Äquivalenz

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Äquivalenz

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

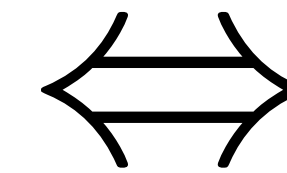
Beispiel 5.5: Äquivalenz

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$



$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

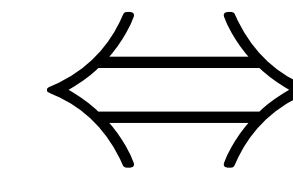
Beispiel 5.5: Äquivalenz

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$



Konkret: Jede Lösung der logischen Formel entspricht einer Lösung der Instanz SUBSET SUM – und umgekehrt.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

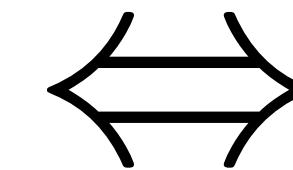
Beispiel 5.5: Äquivalenz

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$



Konkret: Jede Lösung der logischen Formel entspricht einer Lösung der Instanz SUBSET SUM – und umgekehrt.

Allgemein: Für jede logische Formel dieser Art lässt sich schnell eine äquivalente Instanz von SUBSET SUM konstruieren.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

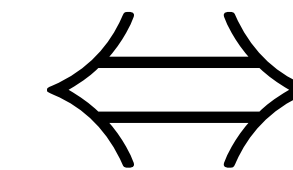
Beispiel 5.5: Äquivalenz

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$



Konkret: Jede Lösung der logischen Formel entspricht einer Lösung der Instanz SUBSET SUM – und umgekehrt.

Allgemein: Für jede logische Formel dieser Art lässt sich schnell eine äquivalente Instanz von SUBSET SUM konstruieren.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

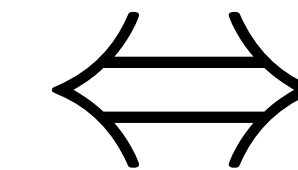
Beispiel 5.5: Äquivalenz

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$



Konkret: Jede Lösung der logischen Formel entspricht einer Lösung der Instanz SUBSET SUM – und umgekehrt.

Allgemein: Für jede logische Formel dieser Art lässt sich schnell eine äquivalente Instanz von SUBSET SUM konstruieren.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

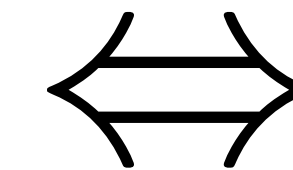
Beispiel 5.5: Äquivalenz

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$



Konkret: Jede Lösung der logischen Formel entspricht einer Lösung der Instanz SUBSET SUM – und umgekehrt.

Allgemein: Für jede logische Formel dieser Art lässt sich schnell eine äquivalente Instanz von SUBSET SUM konstruieren.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

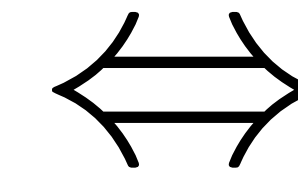
Beispiel 5.5: Äquivalenz

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$



Konkret: Jede Lösung der logischen Formel entspricht einer Lösung der Instanz SUBSET SUM – und umgekehrt.

Allgemein: Für jede logische Formel dieser Art lässt sich schnell eine äquivalente Instanz von SUBSET SUM konstruieren.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Äquivalenz

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \iff$$

Konkret: Jede Lösung der logischen Formel entspricht einer Lösung der Instanz SUBSET SUM – und umgekehrt.

Allgemein: Für jede logische Formel dieser Art lässt sich schnell eine äquivalente Instanz von SUBSET SUM konstruieren.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

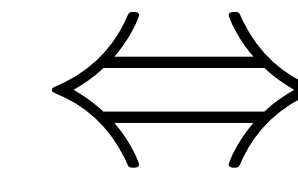
Beispiel 5.5: Äquivalenz

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$



Konkret: Jede Lösung der logischen Formel entspricht einer Lösung der Instanz SUBSET SUM – und umgekehrt.

Allgemein: Für jede logische Formel dieser Art lässt sich schnell eine äquivalente Instanz von SUBSET SUM konstruieren.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Beispiel 5.5: Äquivalenz

$$x_1 \vee \overline{x_1}$$

$$x_2 \vee \overline{x_2}$$

$$x_3 \vee \overline{x_3}$$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \iff$$

Konkret: Jede Lösung der logischen Formel entspricht einer Lösung der Instanz SUBSET SUM – und umgekehrt.

Allgemein: Für jede logische Formel dieser Art lässt sich schnell eine äquivalente Instanz von SUBSET SUM konstruieren.

Also: Wenn wir einen „perfekten“ Algorithmus für SUBSET SUM haben, dann können wir auch schnell entscheiden, ob eine logische Formel lösbar ist.

$z_1 = p_1 =$	100110
$z_2 = p_2 =$	100001
$z_3 = p_3 =$	10101
$z_4 = p_4 =$	10010
$z_5 = p_5 =$	1001
$z_6 = p_6 =$	1110
$z_7 = p_7 =$	200
$z_8 = p_8 =$	100
$z_9 = p_9 =$	20
$z_{10} = p_{10} =$	10
$z_{11} = p_{11} =$	2
$z_{12} = p_{12} =$	1

Vielen Dank!

s.fekete@tu-bs.de