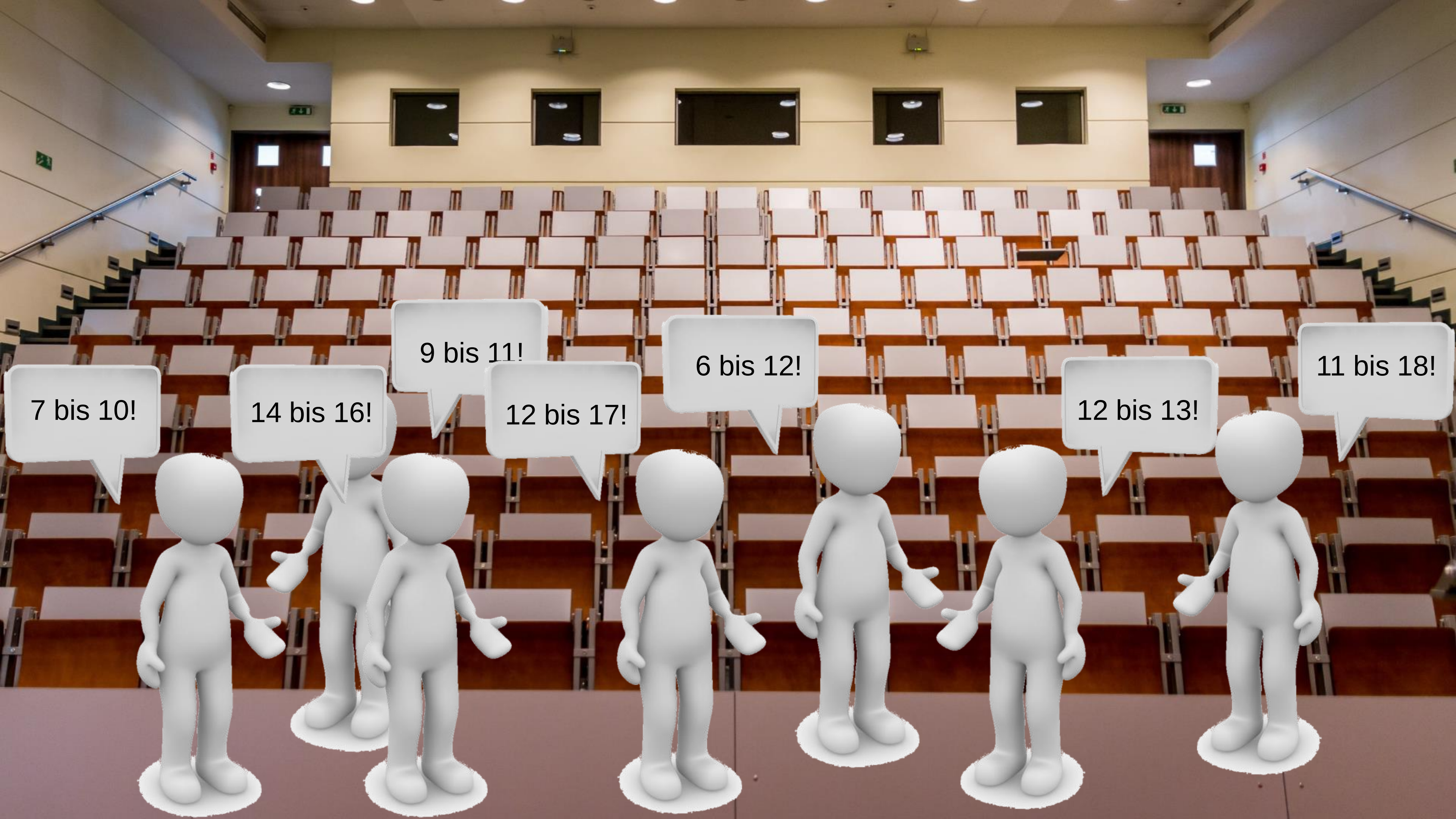
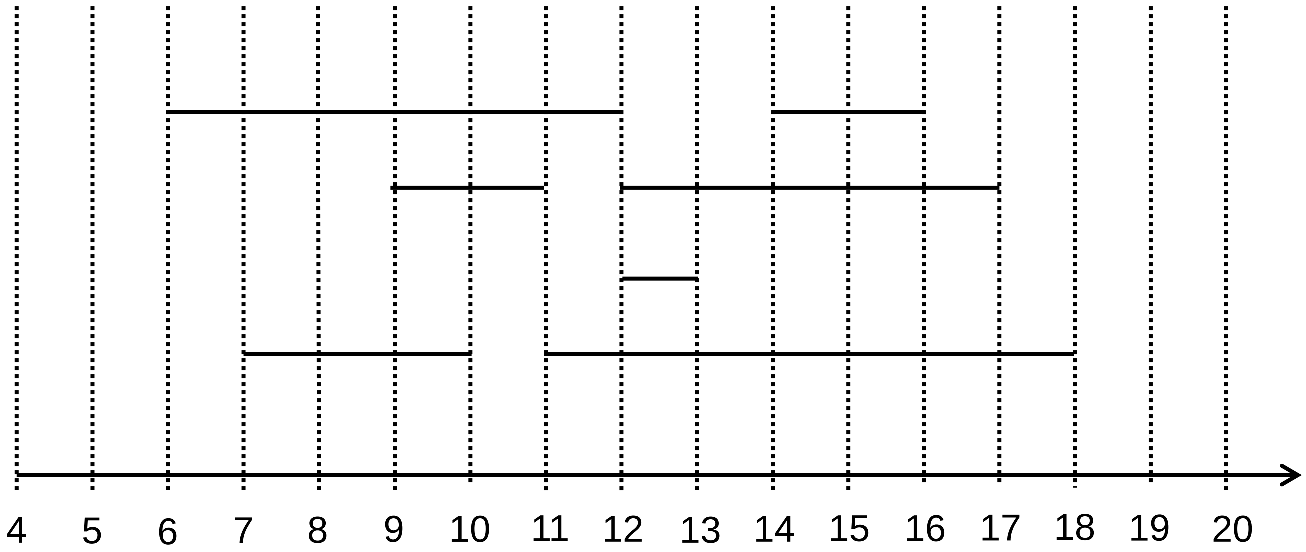
Technische Universität Braunschweig

Algorithmen und Datenstrukturen 2 – Übung #1

Matthias Konitzny
11.05.2022


7 bis 10!
14 bis 16!
9 bis 11!
12 bis 17!
6 bis 12!
12 bis 13!
11 bis 18!

Hörsaal-Belegung



Hörsaal-Belegung – Das Problem

Gegeben

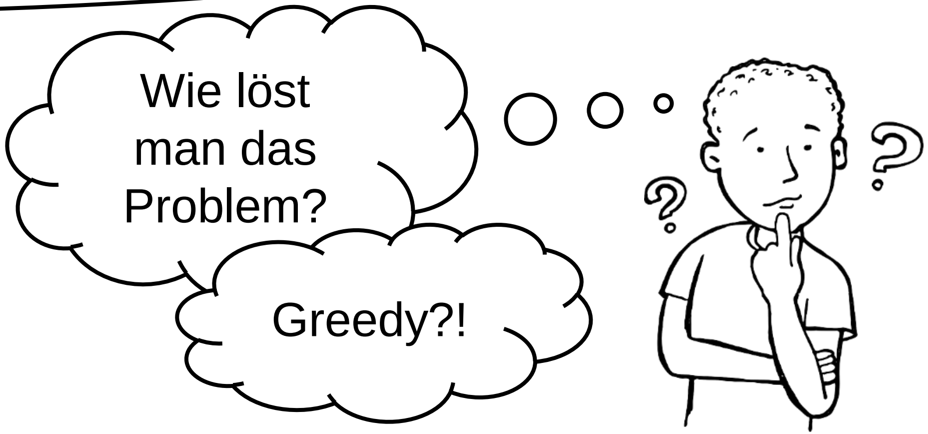
Menge von Intervallen $\mathcal{I} = \{I_1 = [s_1, e_1), \dots, I_n = [s_n, e_n)\}$

Gesucht

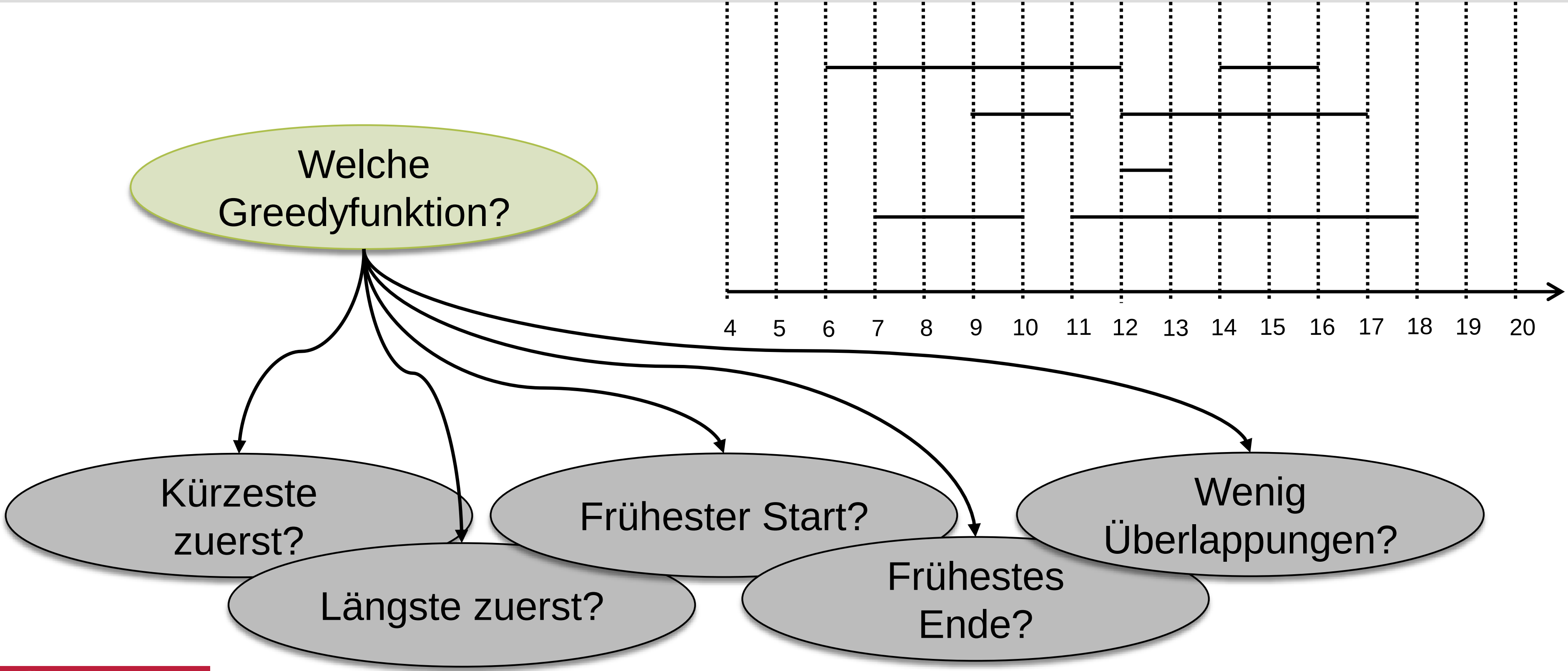
Teilmenge $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ mit den folgenden Eigenschaften

1. $\forall I_i, I_j \in \mathcal{I}' : I_i \cap I_j = \emptyset$
2. $\mathcal{I}'$ ist größtmöglich

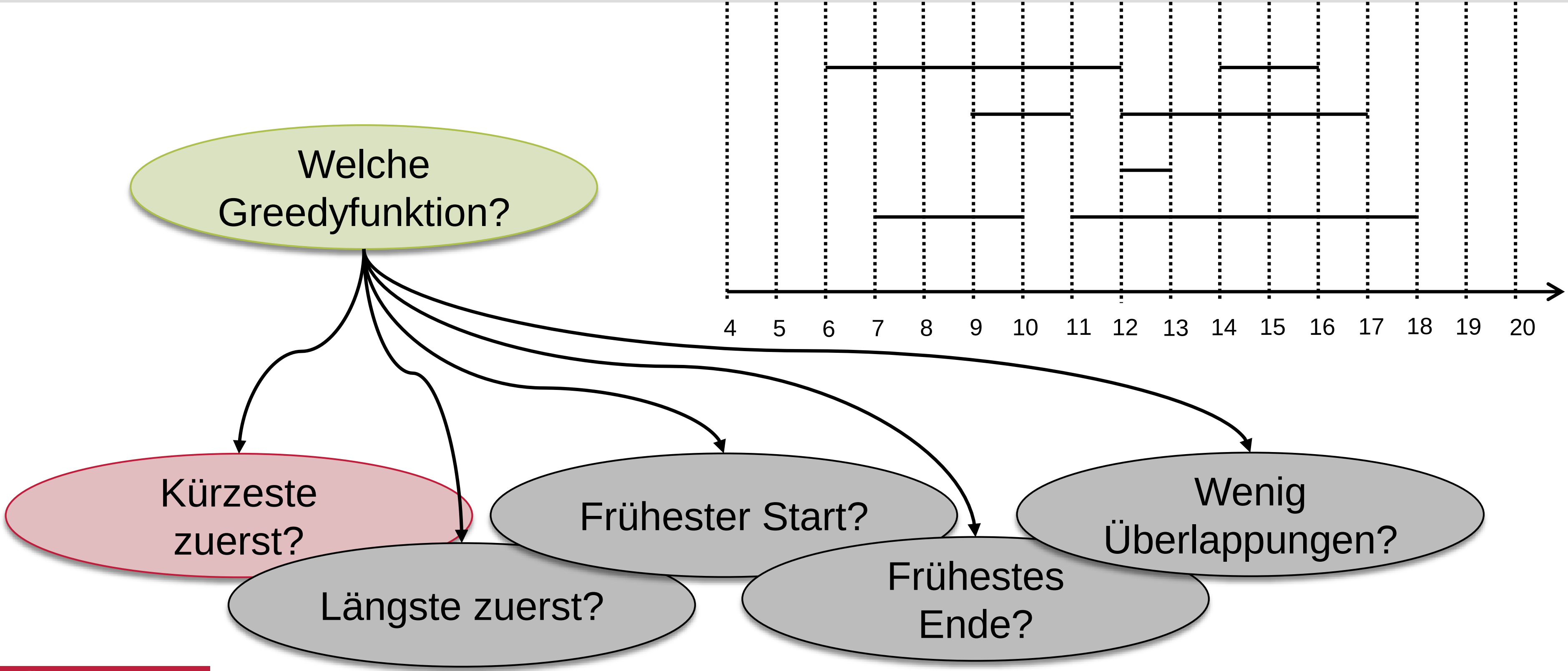
Die ausgewählten Intervalle müssen disjunkt sein.



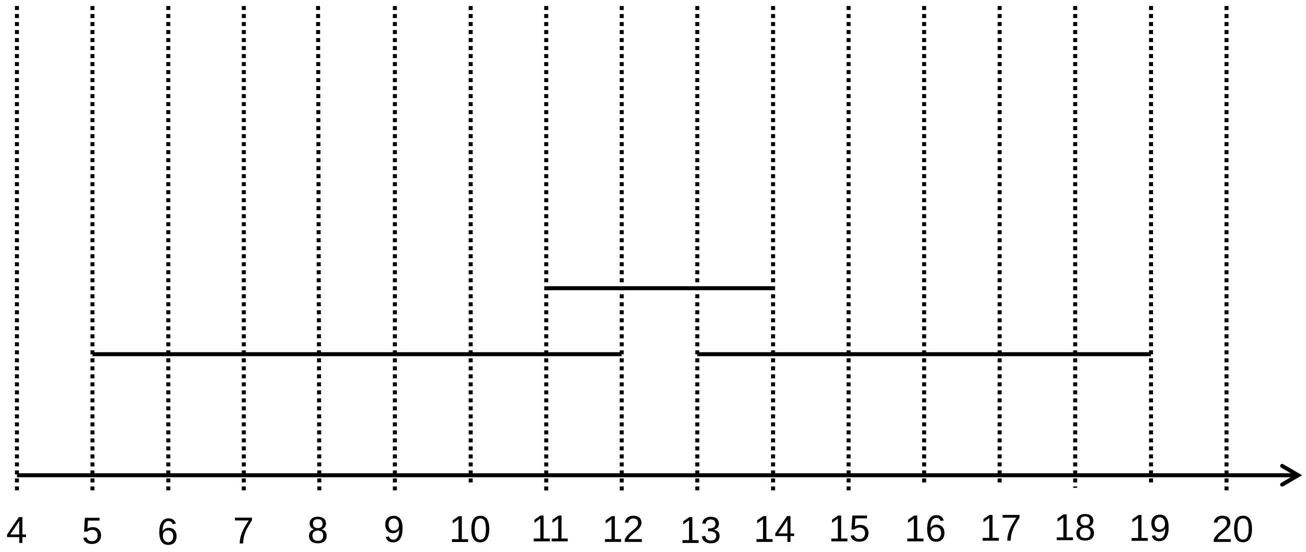
Hörsaal-Belegung – Strategien



Hörsaal-Belegung – Strategien



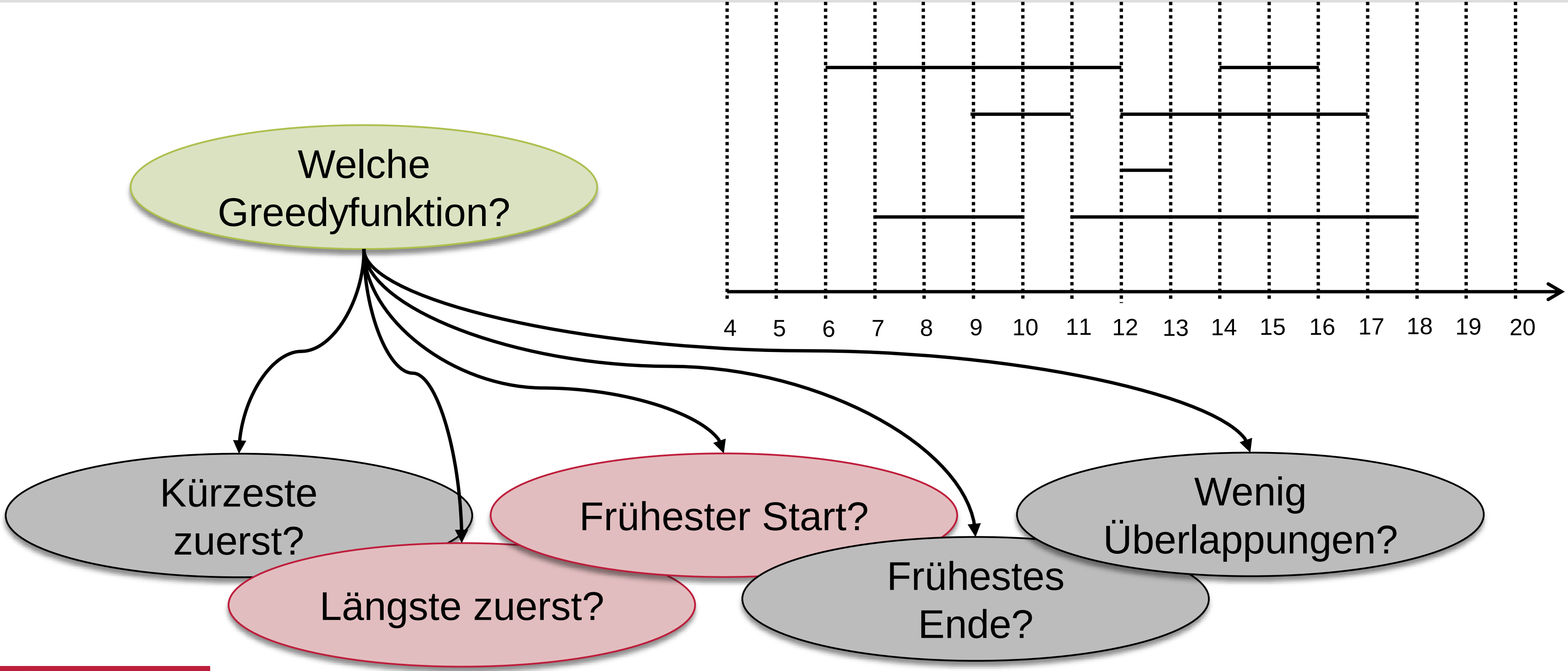
Hörsaal-Belegung – Kürzeste zuerst



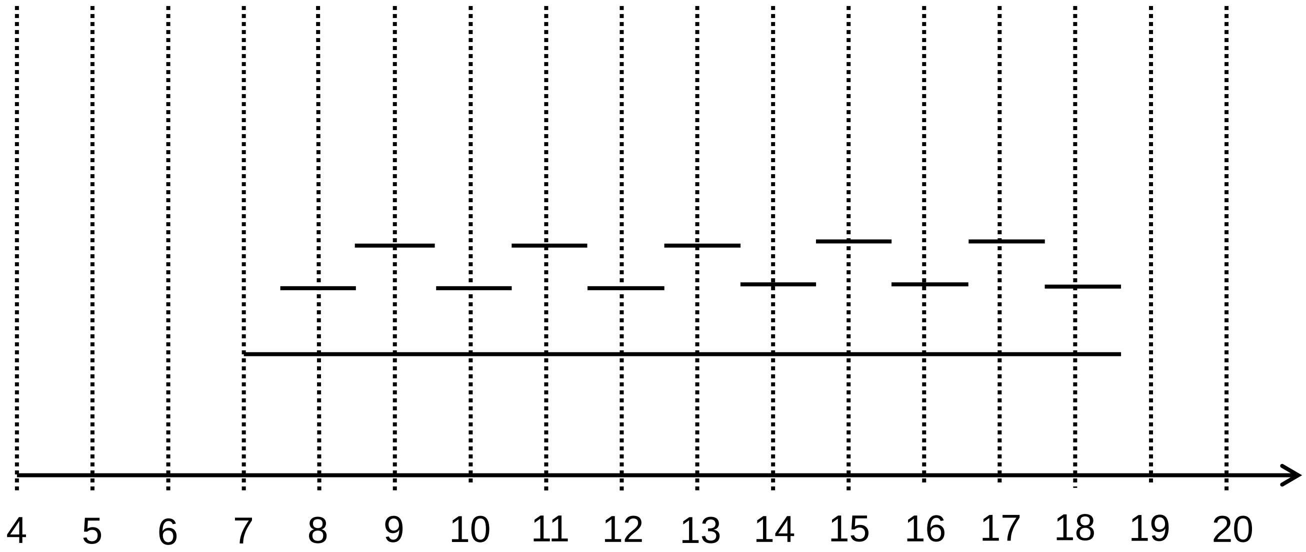
ALG = 1

OPT = 2

Hörsaal-Belegung – Strategien



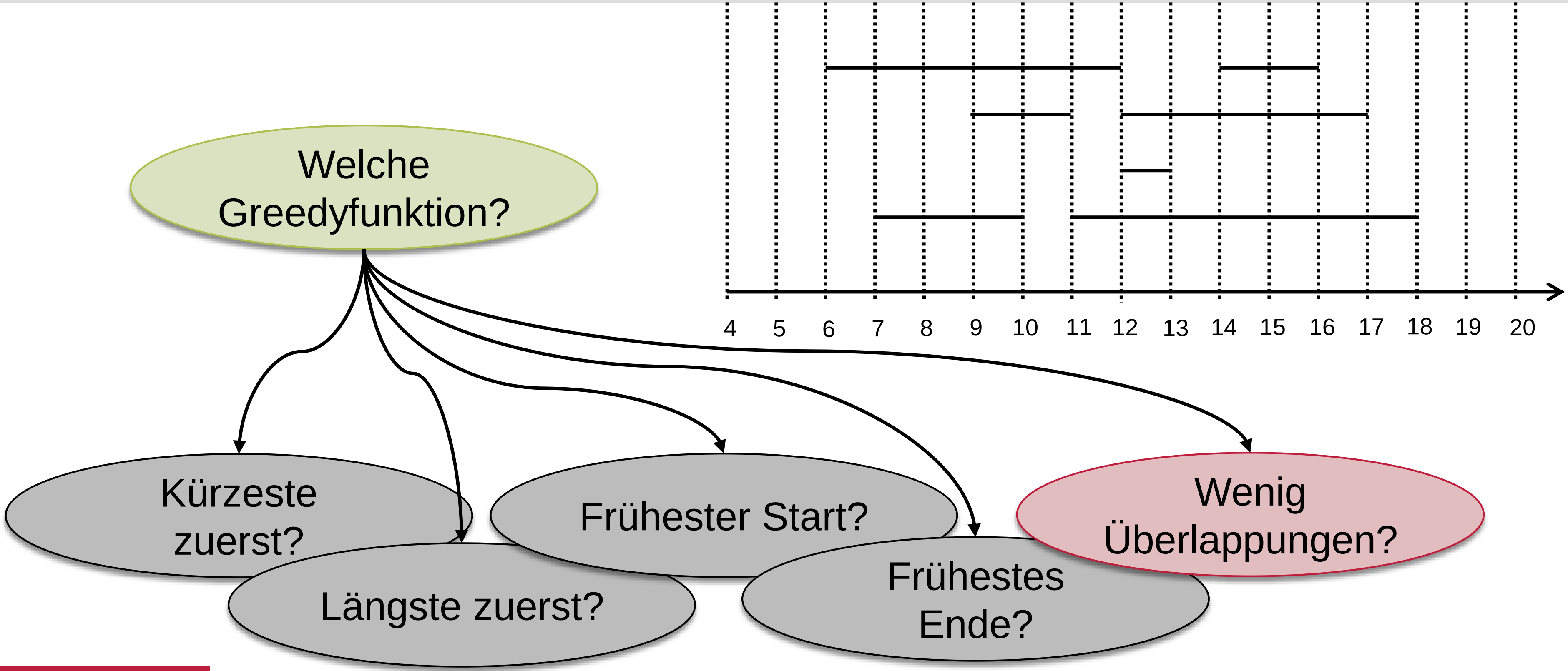
Hörsaal-Belegung – Frühester Start/Längstes Intervall



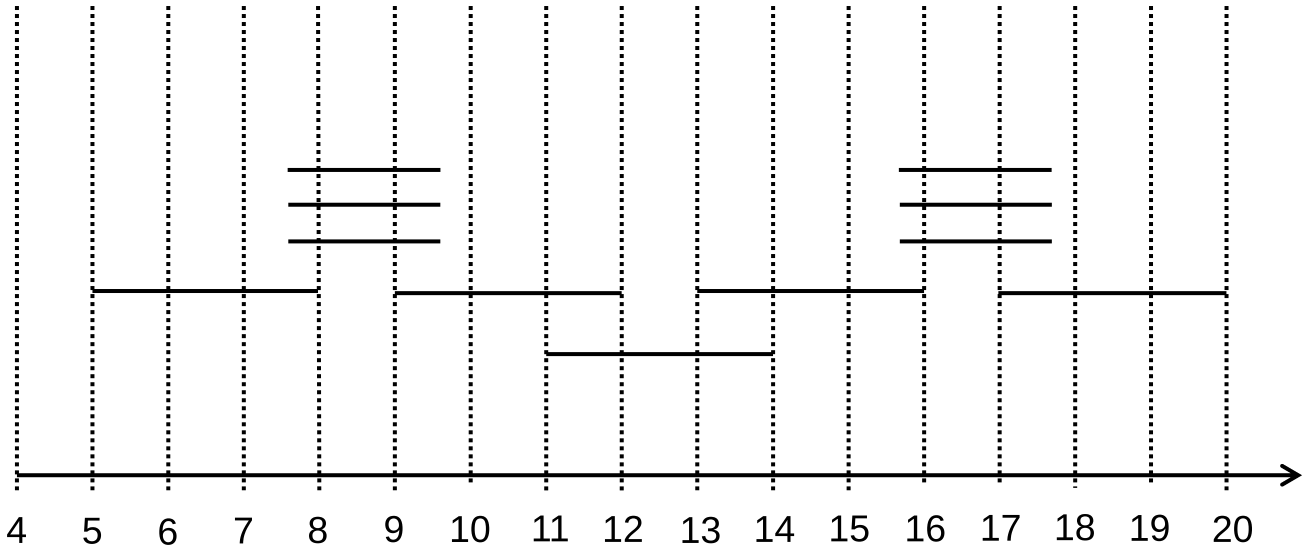
ALG = 1

OPT = 11

Hörsaal-Belegung – Strategien

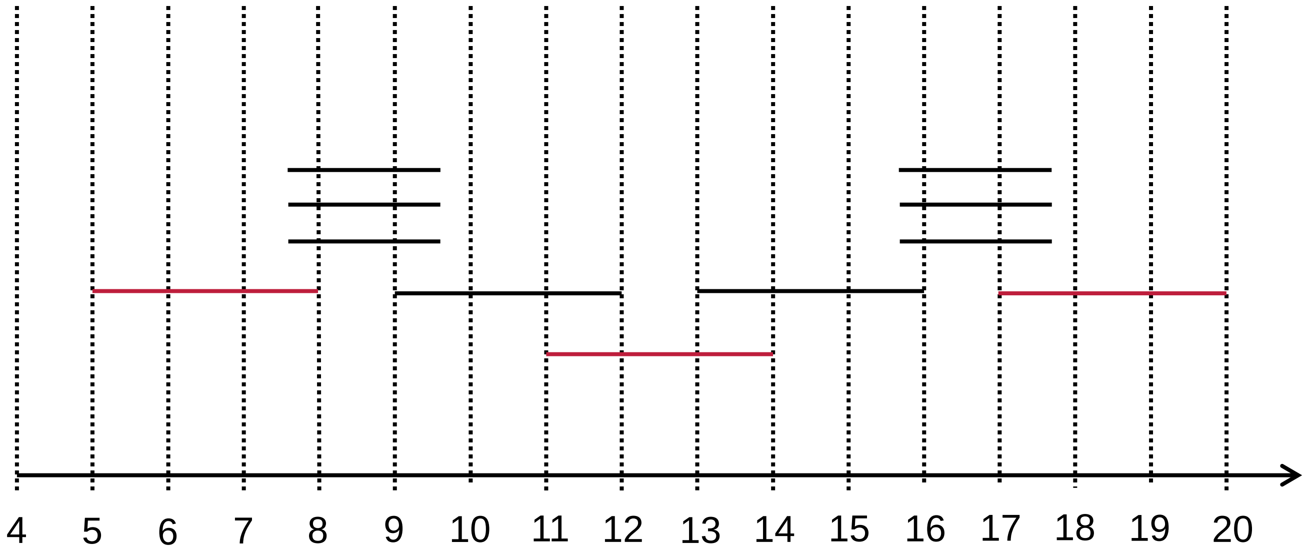


Hörsaal-Belegung – Wenig Überlappungen



ALG = 3

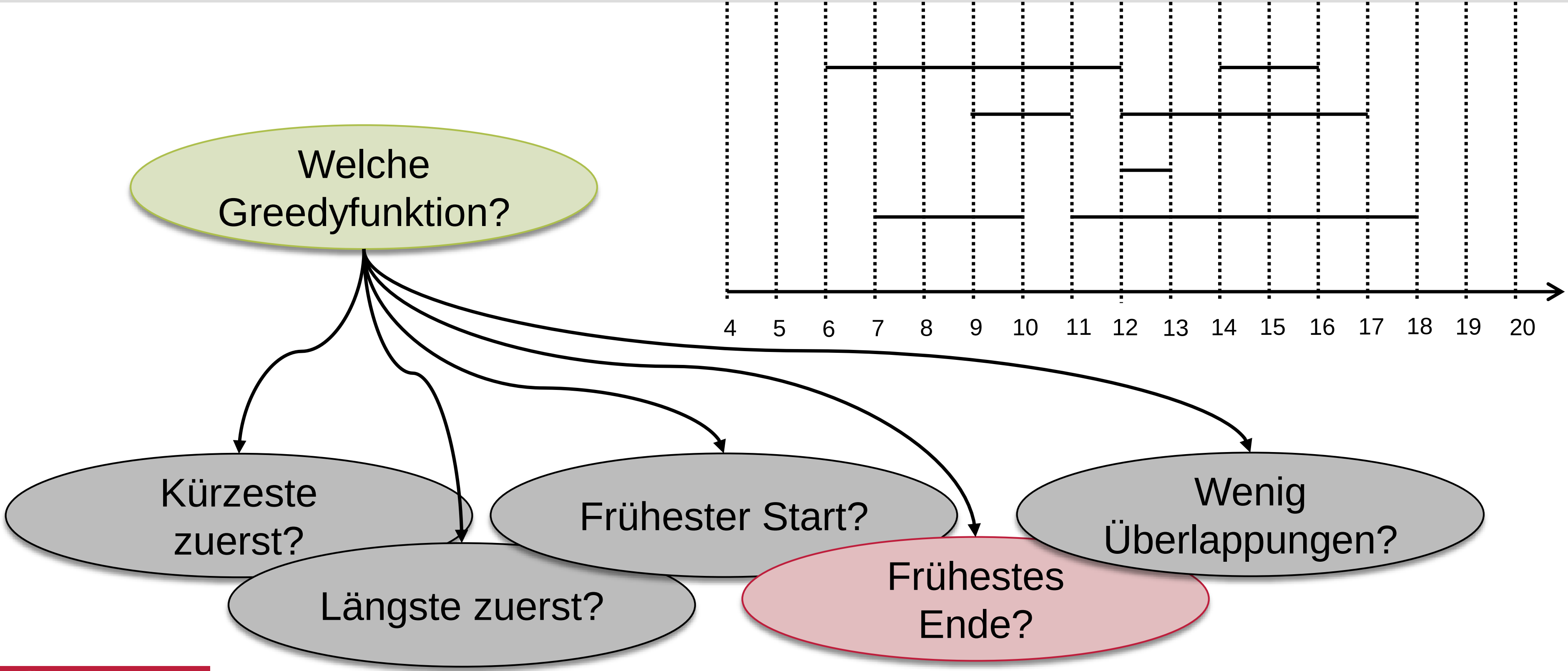
Hörsaal-Belegung – Wenig Überlappungen



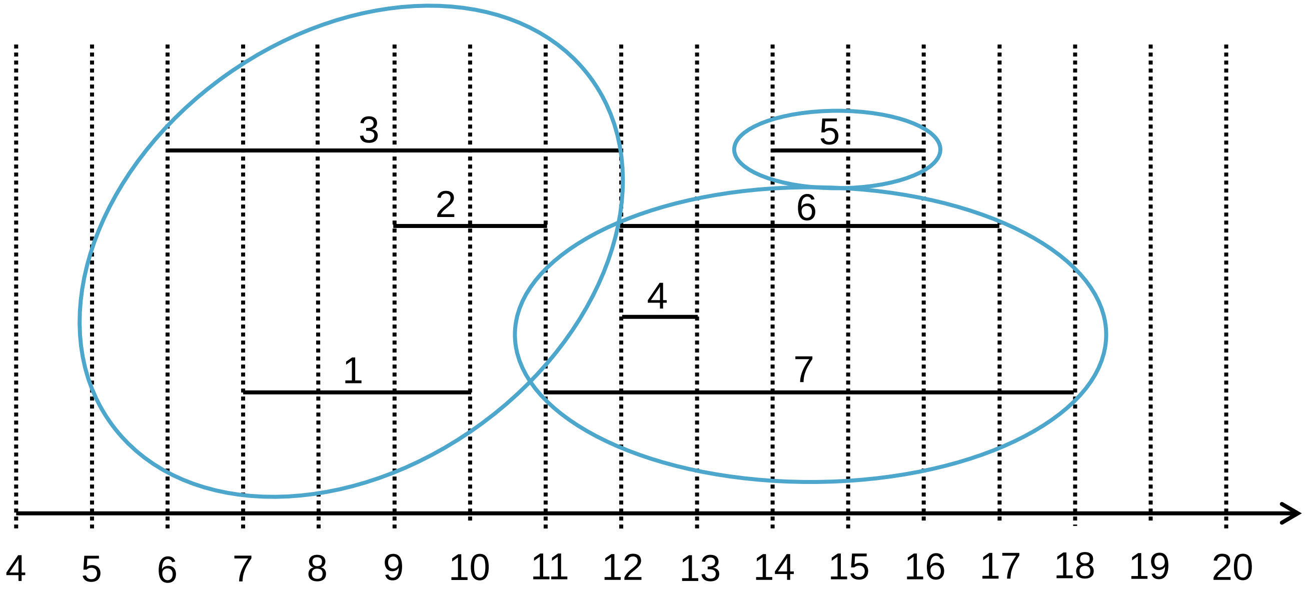
ALG = 3

OPT = 4

Hörsaal-Belegung – Strategien



Hörsaal-Belegung – Frühestes Ende



ALG = 3

OPT = 3?

Hörsaal-Belegung – Frühestes Ende

Greedy-Algorithmus: Frühestes Ende

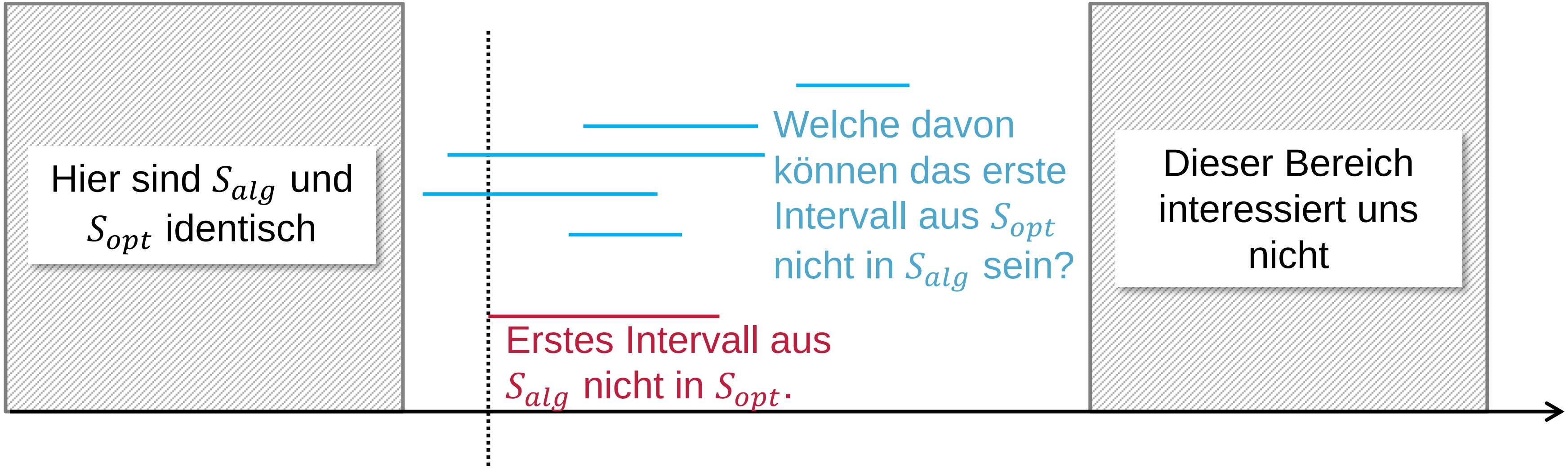
1. Sortiere $\{1, \dots, n\}$ nach e_i aufsteigend; erhalte Permutation $\pi(1), \dots, \pi(n)$
2. $S := \{\pi(1)\}$
3. $e := e_{\pi(1)}$
4. **for** $k = 2$ **to** n **do**
5. **if** $(s_{\pi(k)} \geq e)$ **then**
6. $S := S \cup \{\pi(k)\}$
7. $e := e_{\pi(k)}$
8. **return** S

Theorem
Der Algorithmus löst das Hörsaal-Problem optimal in Zeit $O(n \log n)$

Beweis

Annahme: Algorithmus 1 sei nicht optimal.

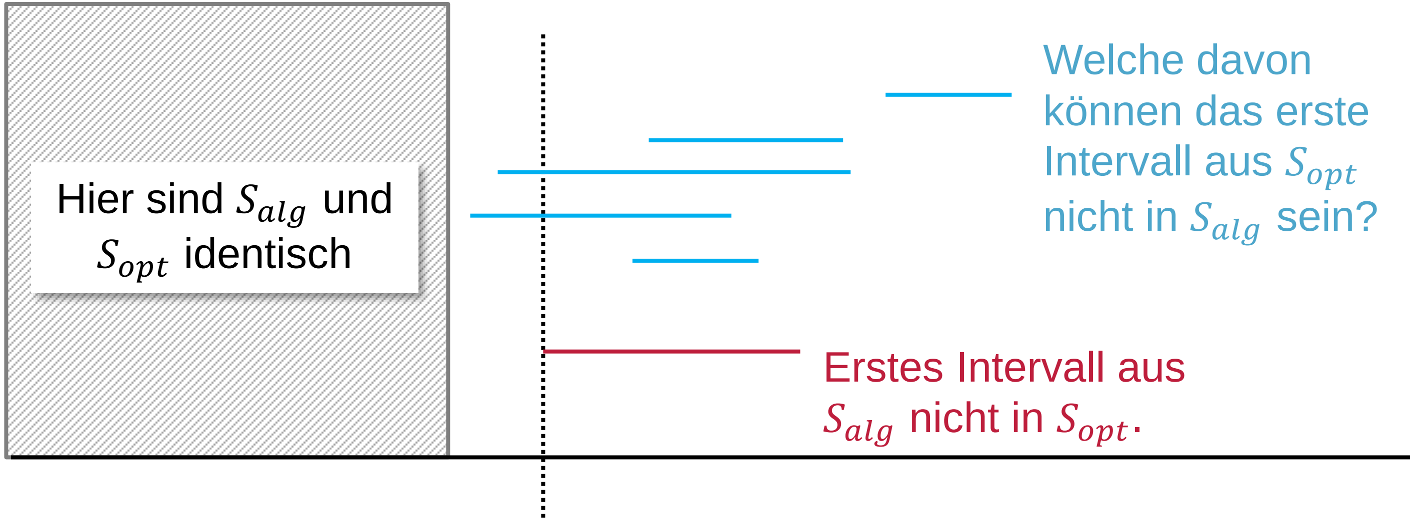
Sei S_{alg} die Lösung von Algorithmus 1 und S_{opt} eine optimale Lösung.



Beweis

Annahme: Algorithmus 1 sei nicht optimal.

Sei S_{alg} die Lösung von Algorithmus 1 und S_{opt} eine optimale Lösung.

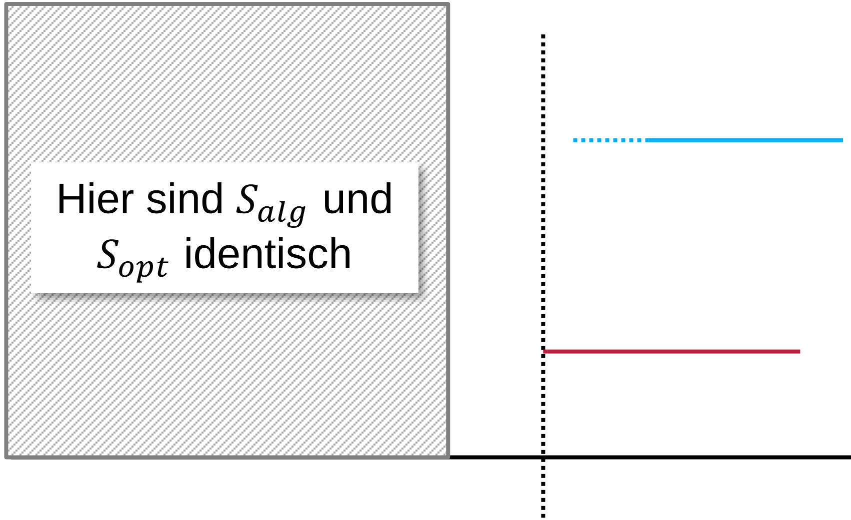


- Blau muss rot überlappen!
- Ende von blau kommt nach Ende von rot!

Beweis

Annahme: Algorithmus 1 sei nicht optimal.

Sei S_{alg} die Lösung von Algorithmus 1 und S_{opt} eine optimale Lösung.



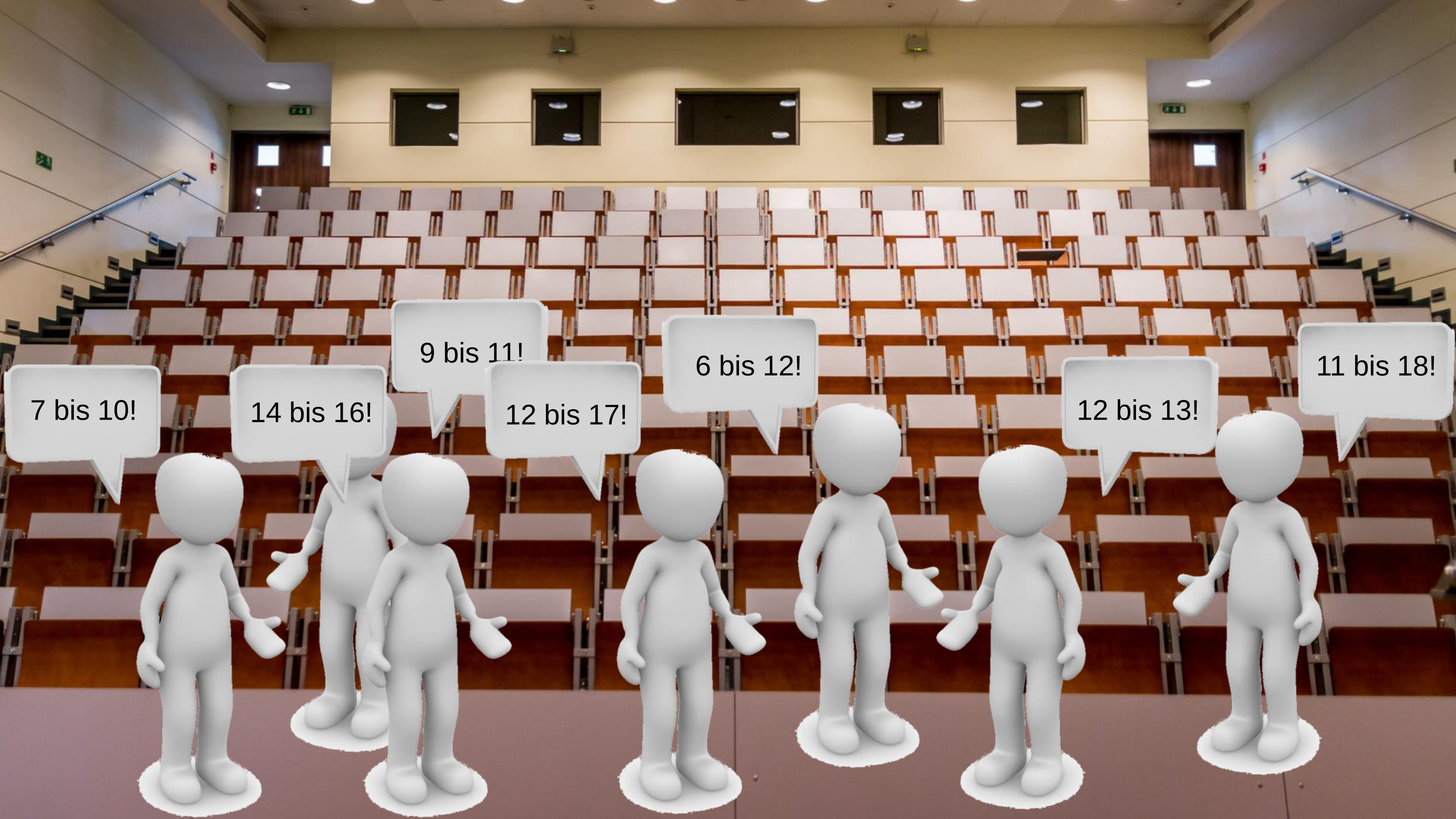
Entferne blau aus S_{opt} und füge rot hinzu.

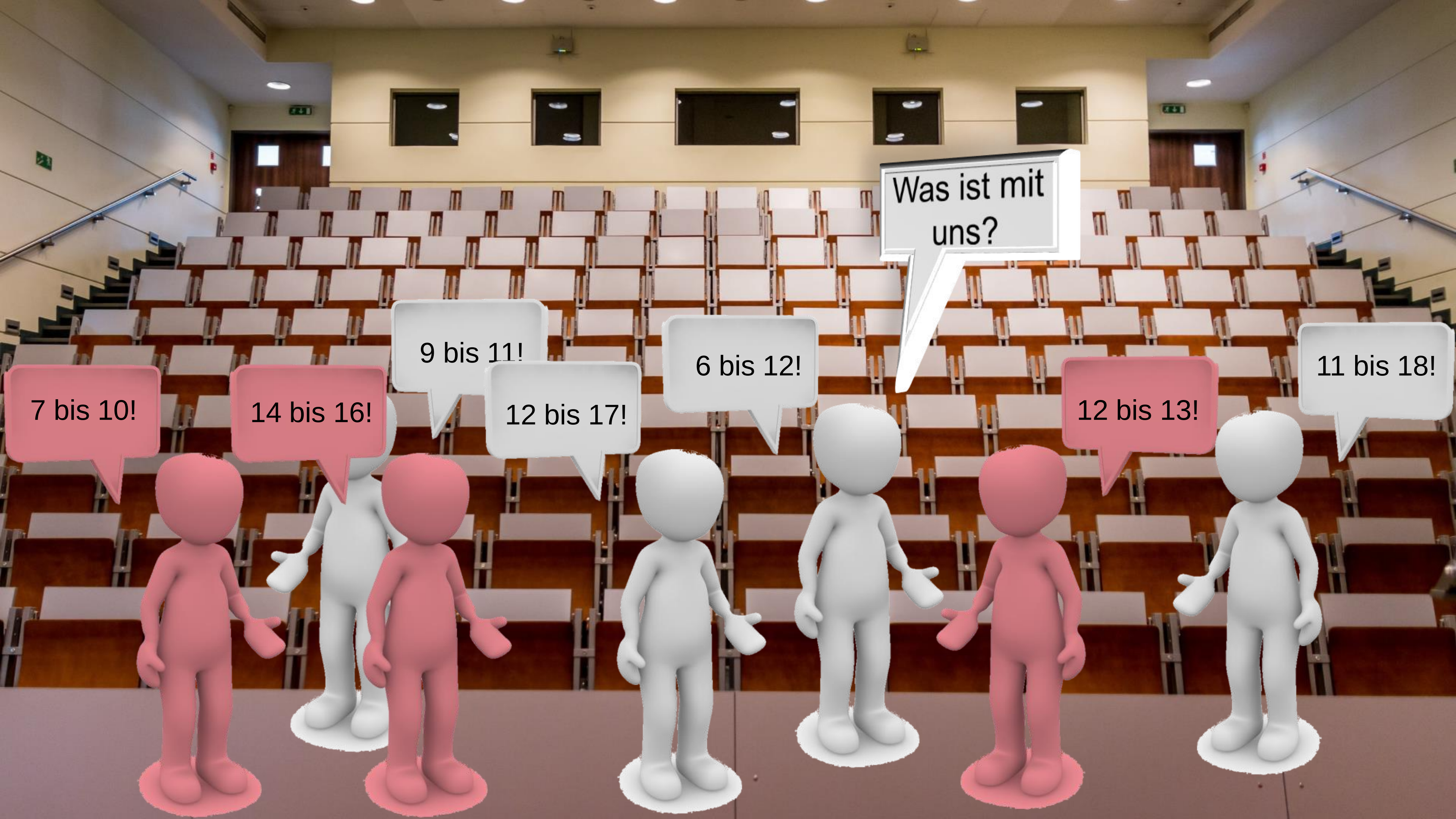
S_{opt} ist immer noch zulässig!

$$\Rightarrow S_{alg} \subseteq S_{opt}$$

Enthält S_{opt} nun noch mehr Intervalle, dann hätte Algorithmus 1 diese aufgenommen!

$$\Rightarrow S_{alg} = S_{opt}$$


7 bis 10!
14 bis 16!
9 bis 11!
12 bis 17!
6 bis 12!
12 bis 13!
11 bis 18!


7 bis 10!
14 bis 16!
9 bis 11!
12 bis 17!
6 bis 12!
Was ist mit uns?
12 bis 13!
11 bis 18!

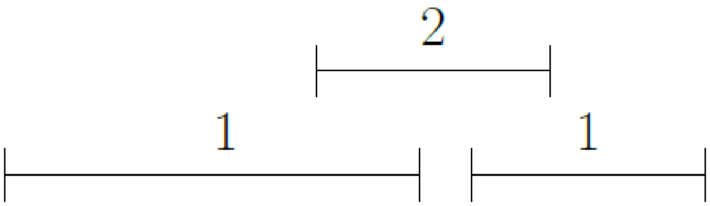
Hörsaal-Belegung – Eine Variante

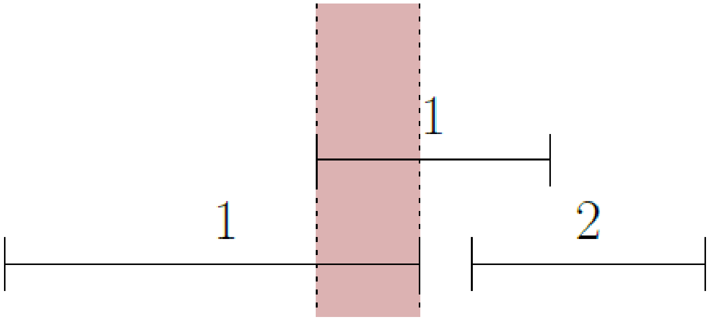
Gegeben

Menge von Intervallen $\mathcal{I} = \{I_1 = [s_1, e_1), \dots, I_n = [s_n, e_n)\}$

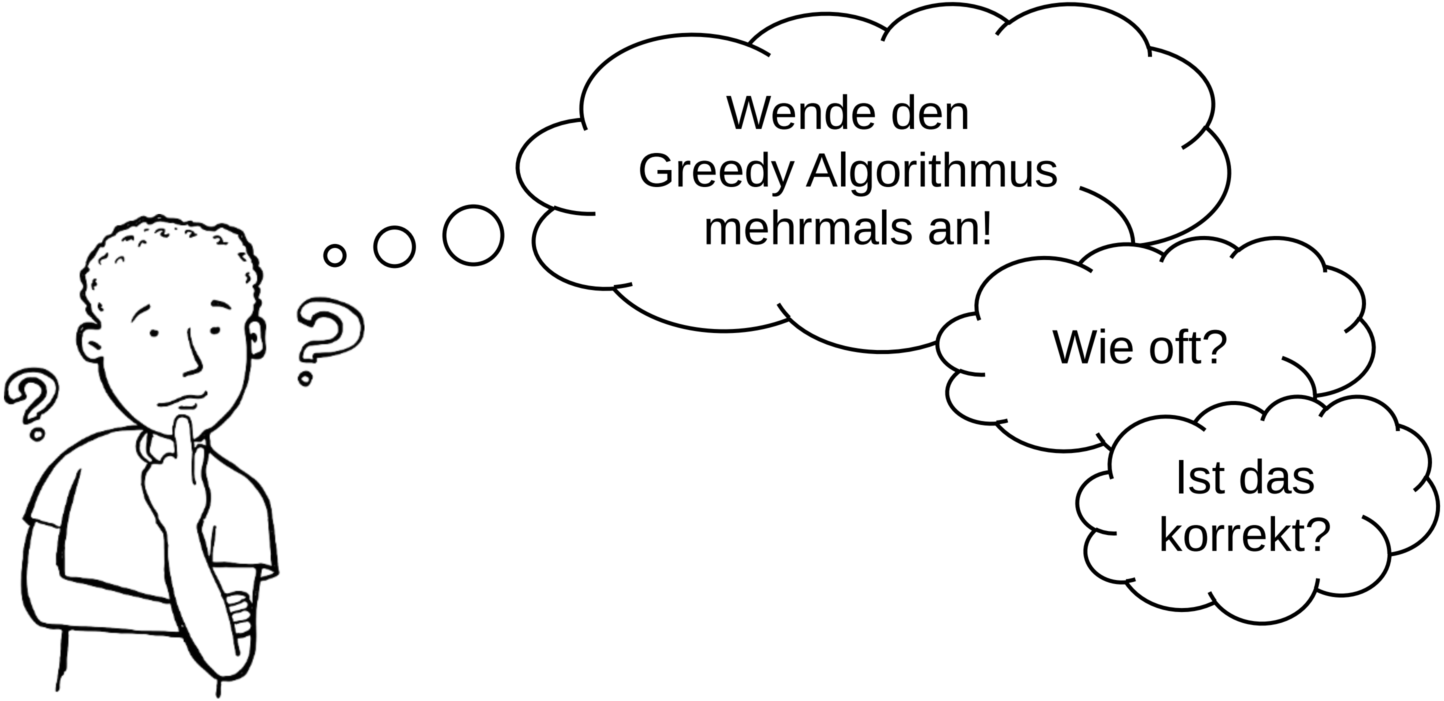
Gesucht

Die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$, sodass eine Funktion $f: I \to \{1, \dots, k\}$ existiert und für je zwei Intervalle I und I' gilt $I \cap I' \neq \emptyset \Rightarrow f(I) \neq f(I')$

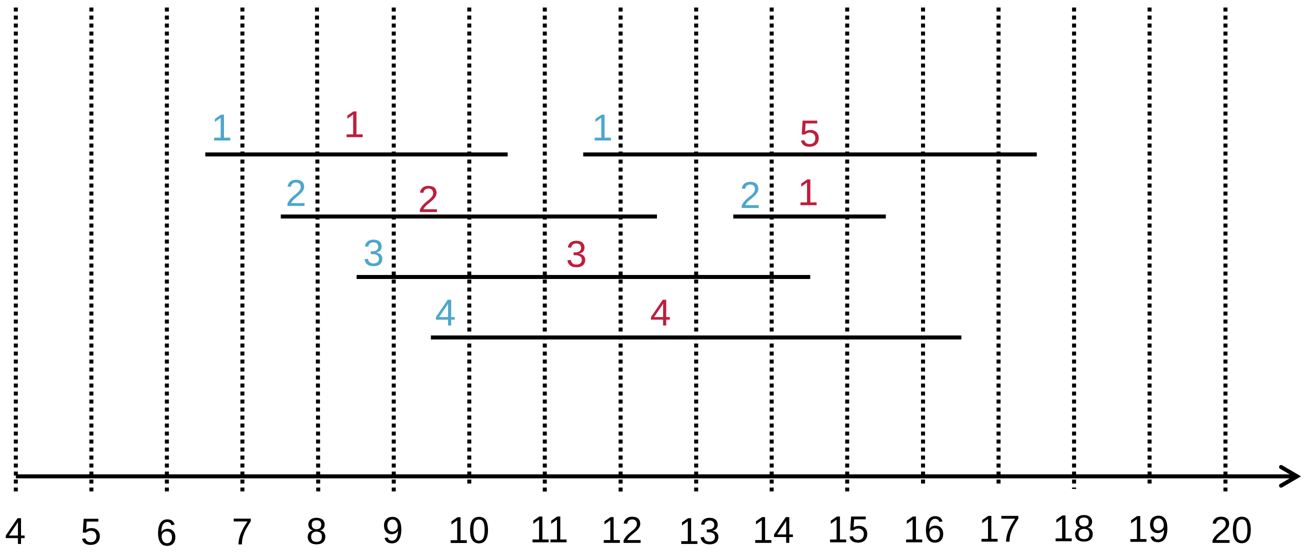




Hörsaal-Belegung – Eine Variante



Hörsaal-Belegung – Eine Variante

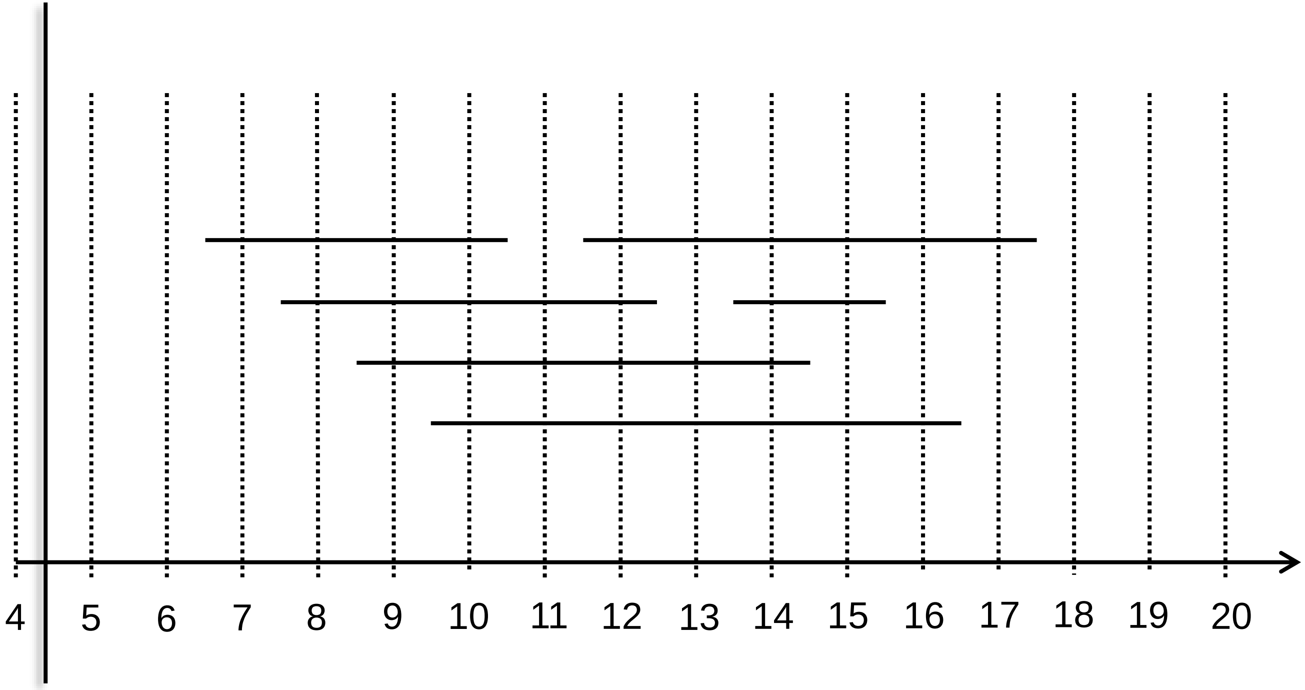


ALG = 5

OPT = 4

Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

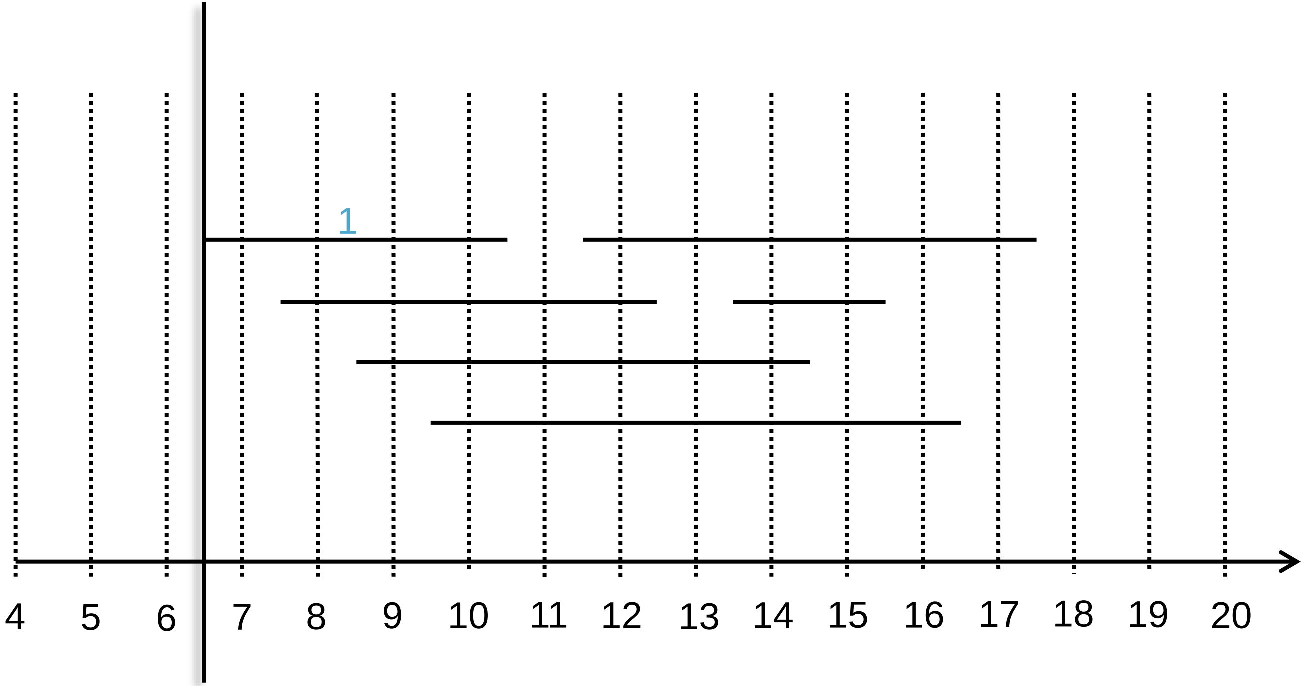
Hörsaal-Belegung – Eine Variante



Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

Bewege eine Linie von links nach rechts

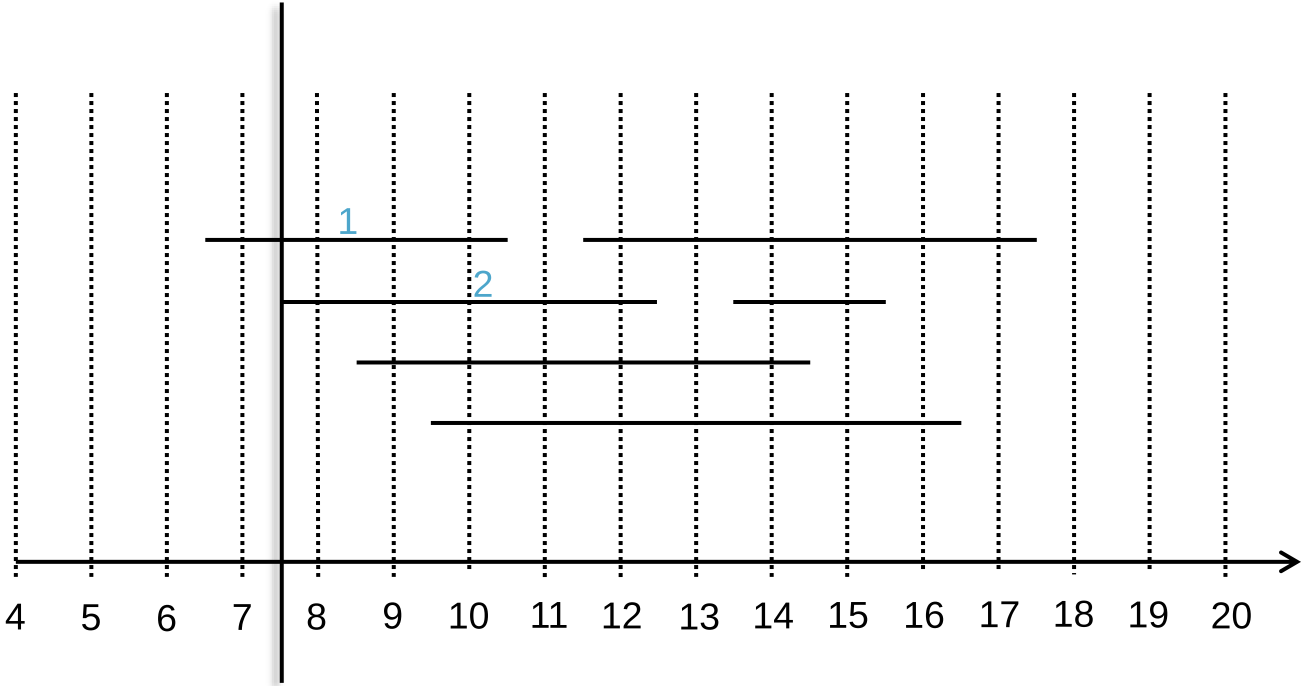
Hörsaal-Belegung – Eine Variante



Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

Bei Erreichen eines
- **Startpunktes:**
  Weise kleinste Raumnummer zu
- **Endpunktes:**
  Gib Raum frei

Hörsaal-Belegung – Eine Variante

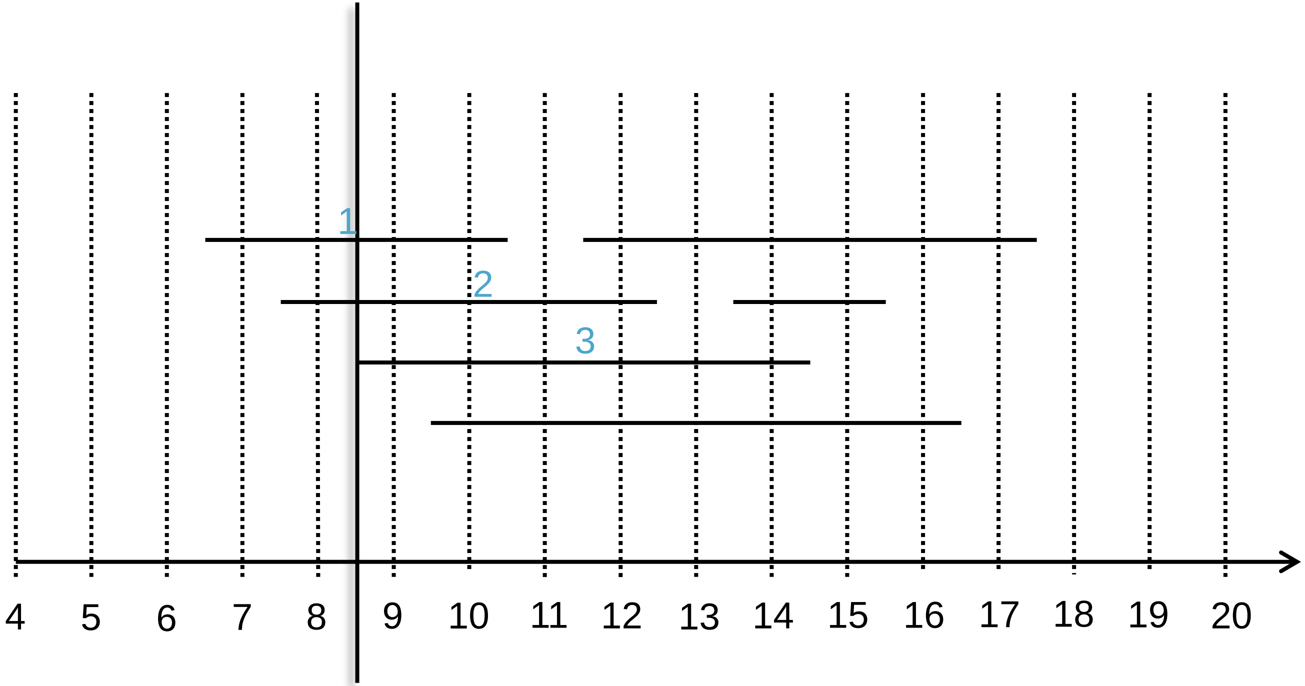


Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

Bei Erreichen eines

- **Startpunktes:** Weise kleinste Raumnummer zu
- **Endpunktes:** Gib Raum frei

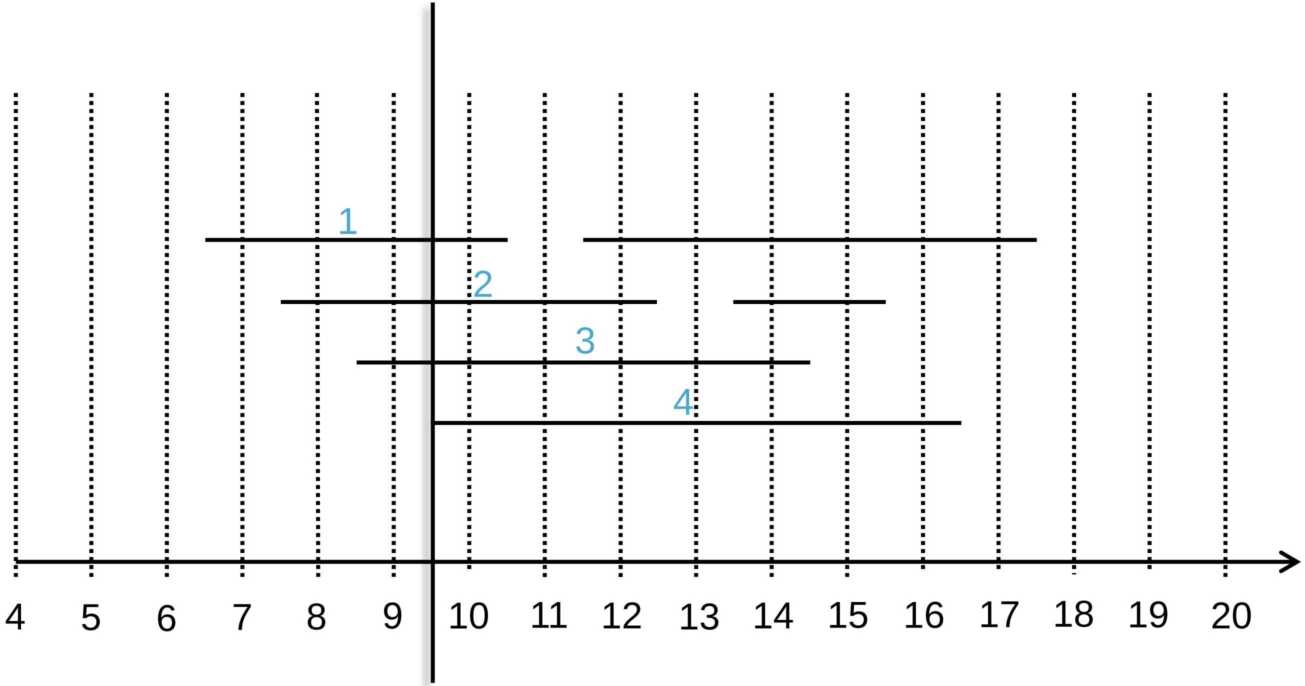
Hörsaal-Belegung – Eine Variante



Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

Bei Erreichen eines
- **Startpunktes:** Weise kleinste Raumnummer zu
- **Endpunktes:** Gib Raum frei

Hörsaal-Belegung – Eine Variante

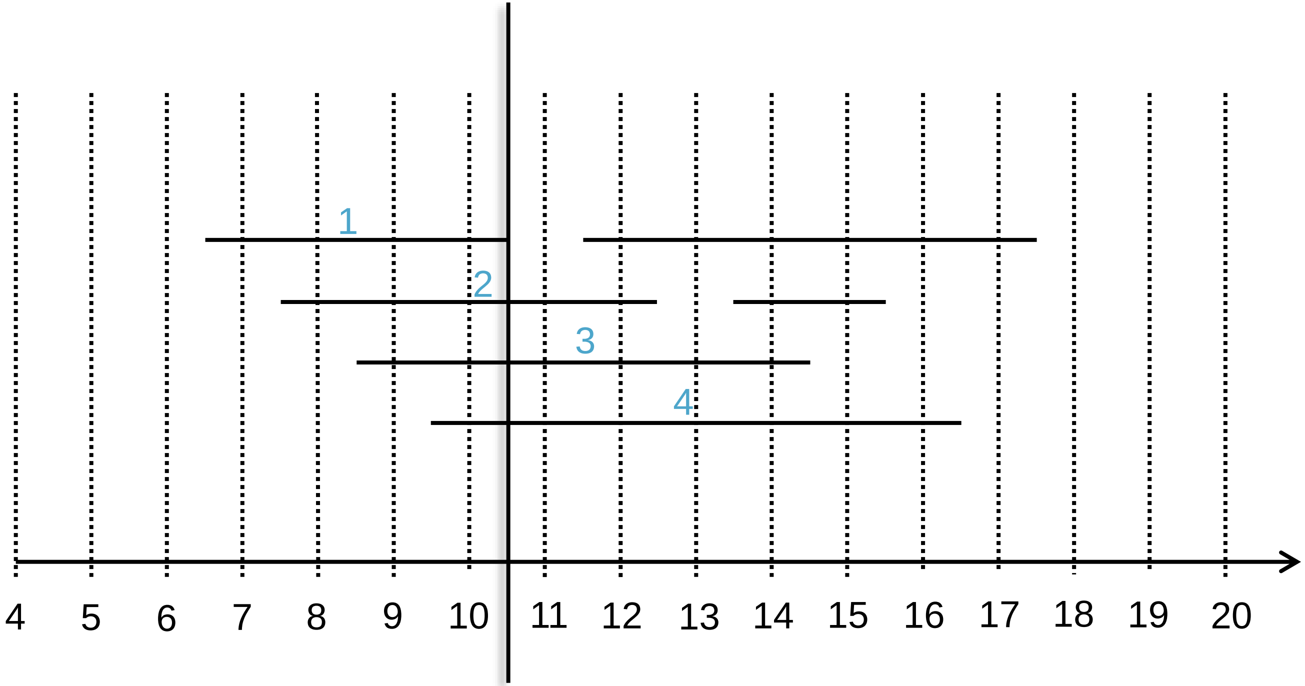


Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

Bei Erreichen eines

- **Startpunktes:**
  Weise kleinste Raumnummer zu
- **Endpunktes:**
  Gib Raum frei

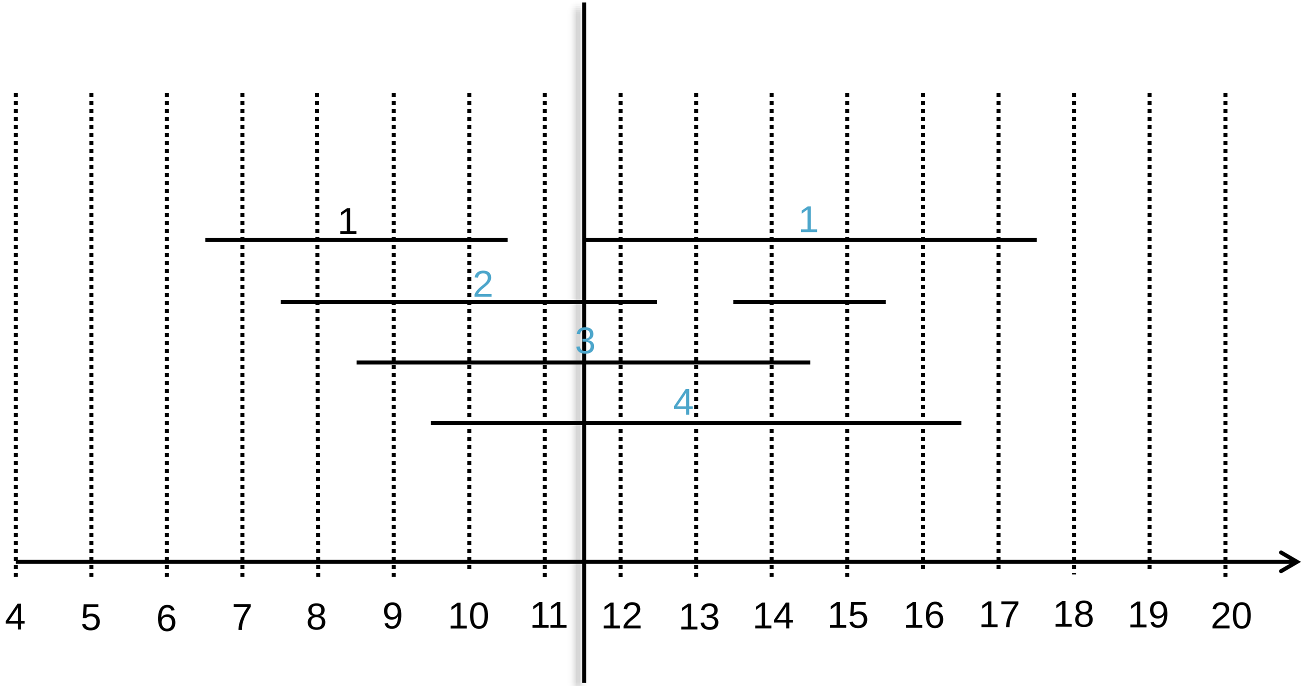
Hörsaal-Belegung – Eine Variante



Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

Bei Erreichen eines
- **Startpunktes:** Weise kleinste Raumnummer zu
- **Endpunktes:** Gib Raum frei

Hörsaal-Belegung – Eine Variante

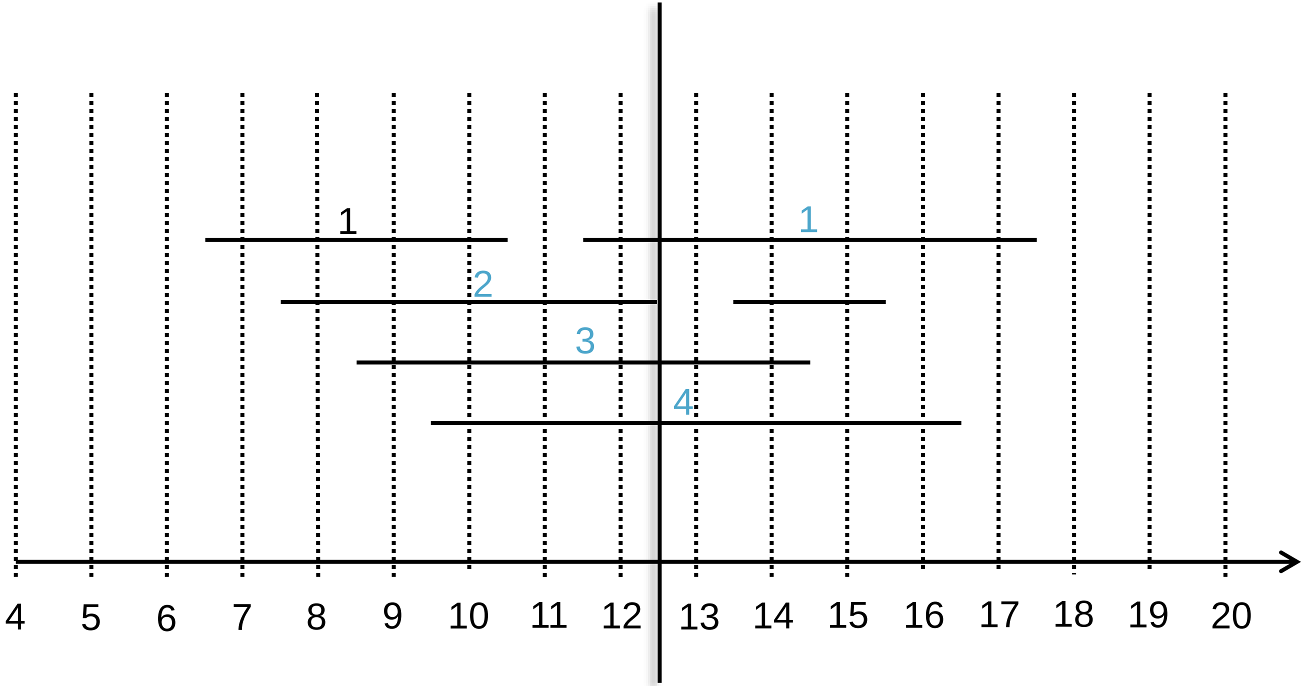


Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

Bei Erreichen eines

- **Startpunktes:** Weise kleinste Raumnummer zu
- **Endpunktes:** Gib Raum frei

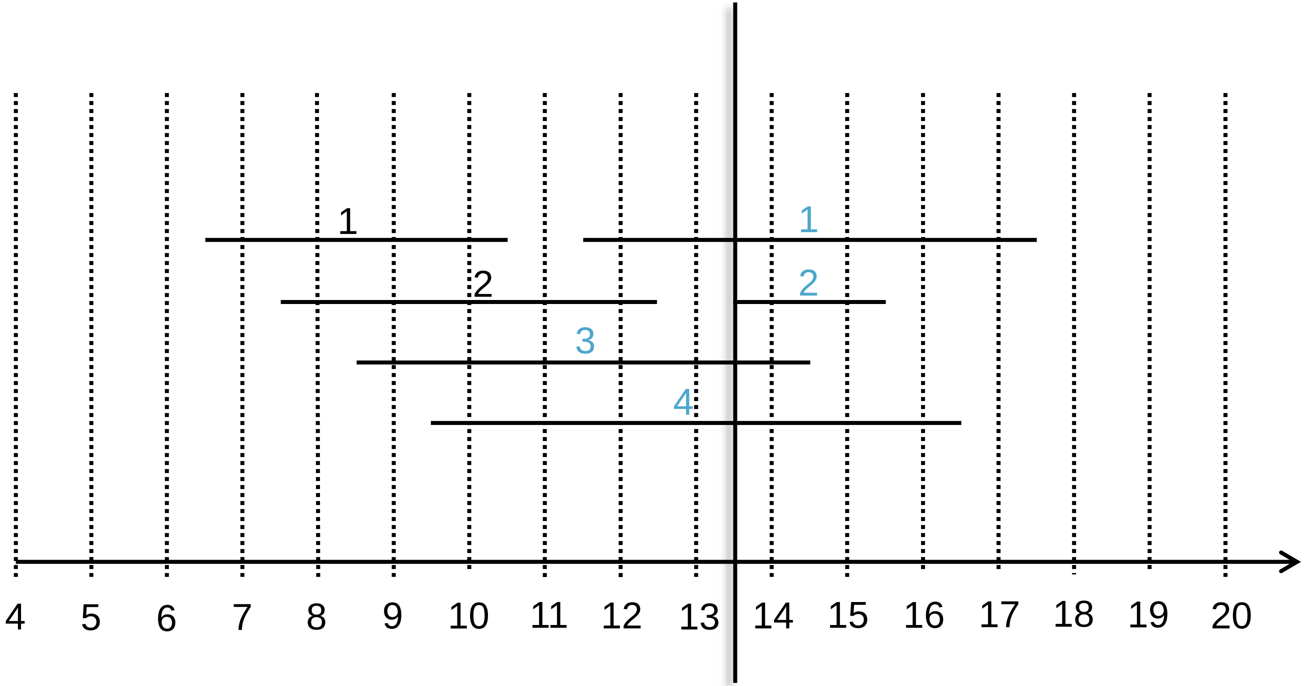
Hörsaal-Belegung – Eine Variante



Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

Bei Erreichen eines
- **Startpunktes:**
  Weise kleinste Raumnummer zu
- **Endpunktes:**
  Gib Raum frei

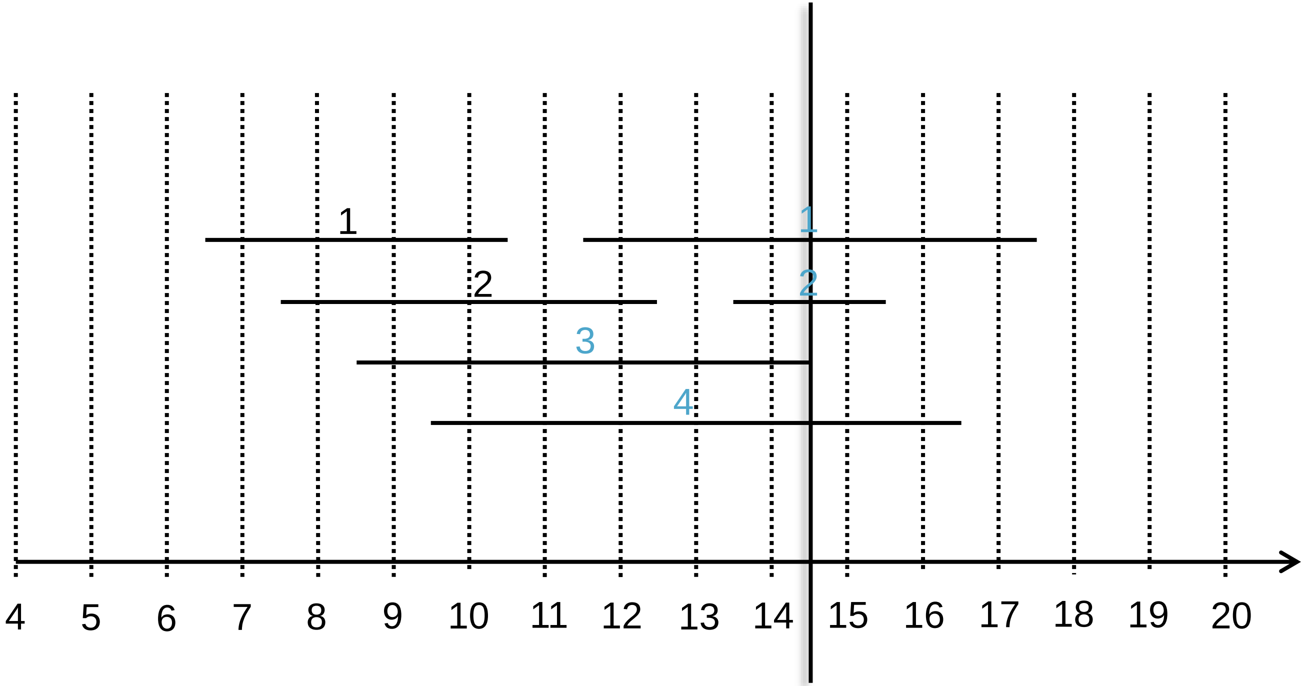
Hörsaal-Belegung – Eine Variante



Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

Bei Erreichen eines
- **Startpunktes:**
  Weise kleinste Raumnummer zu
- **Endpunktes:**
  Gib Raum frei

Hörsaal-Belegung – Eine Variante

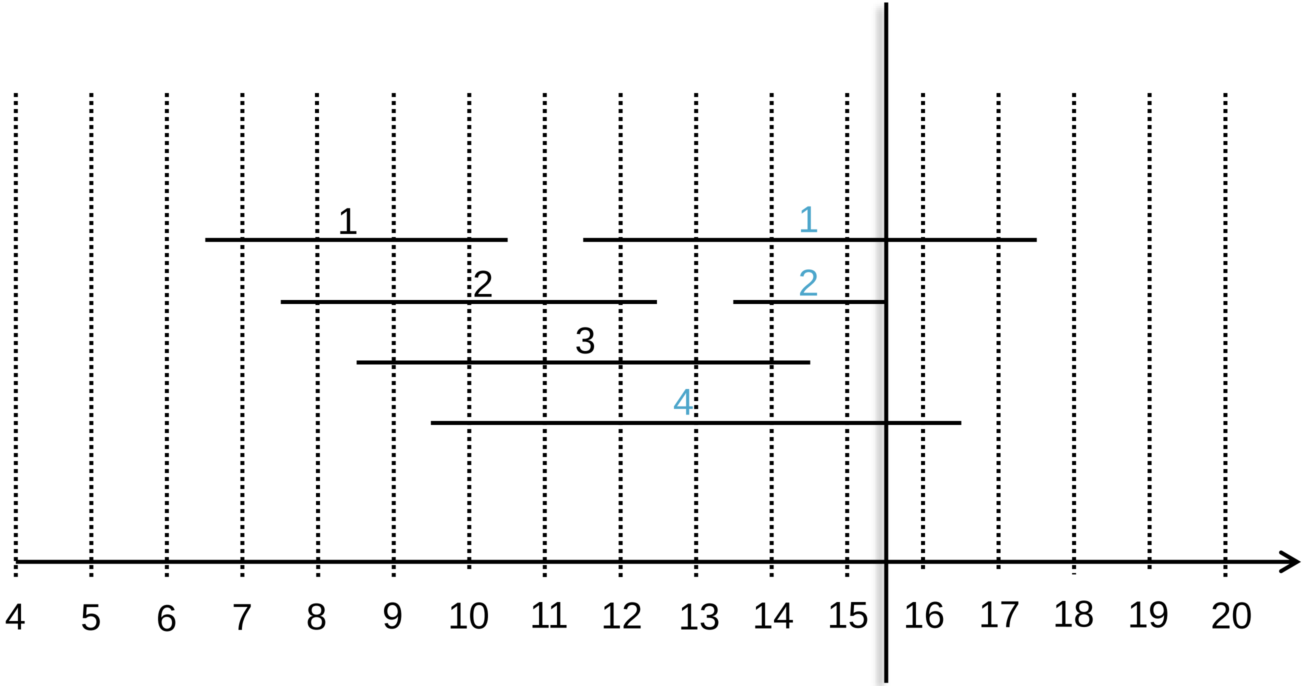


Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

Bei Erreichen eines

- **Startpunktes:** Weise kleinste Raumnummer zu
- **Endpunktes:** Gib Raum frei

Hörsaal-Belegung – Eine Variante

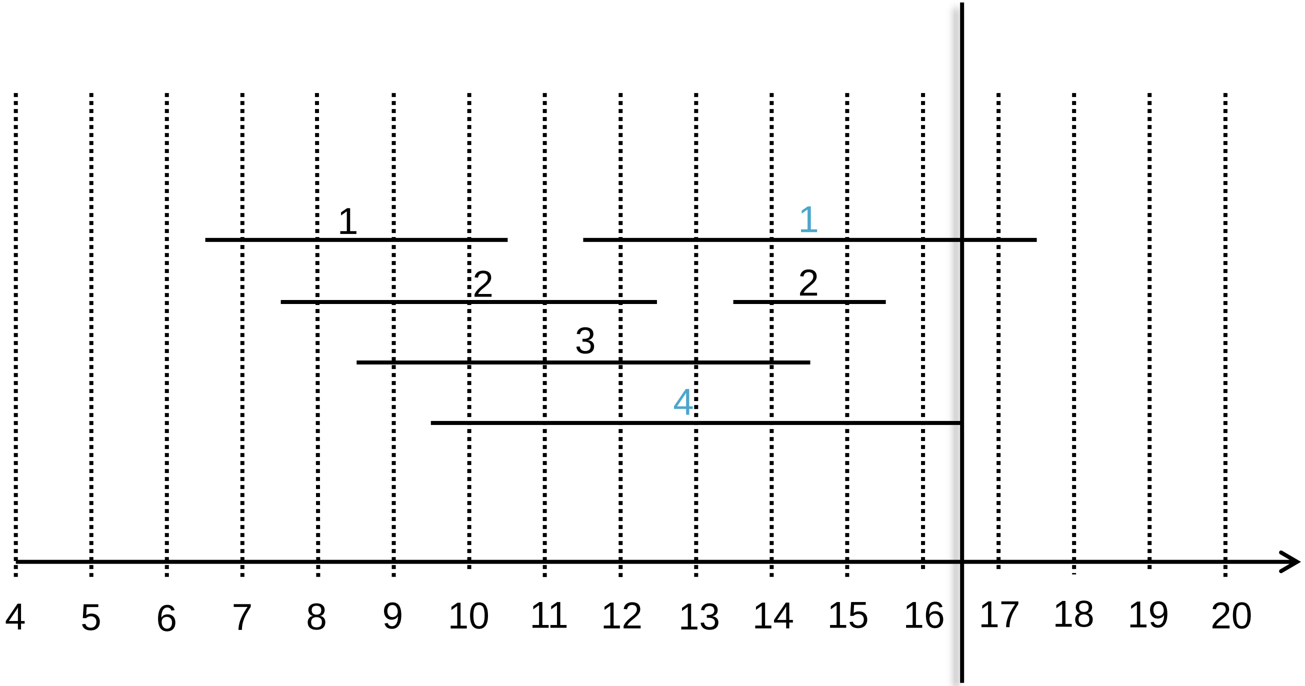


Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

Bei Erreichen eines

- **Startpunktes:**
  Weise kleinste Raumnummer zu
- **Endpunktes:**
  Gib Raum frei

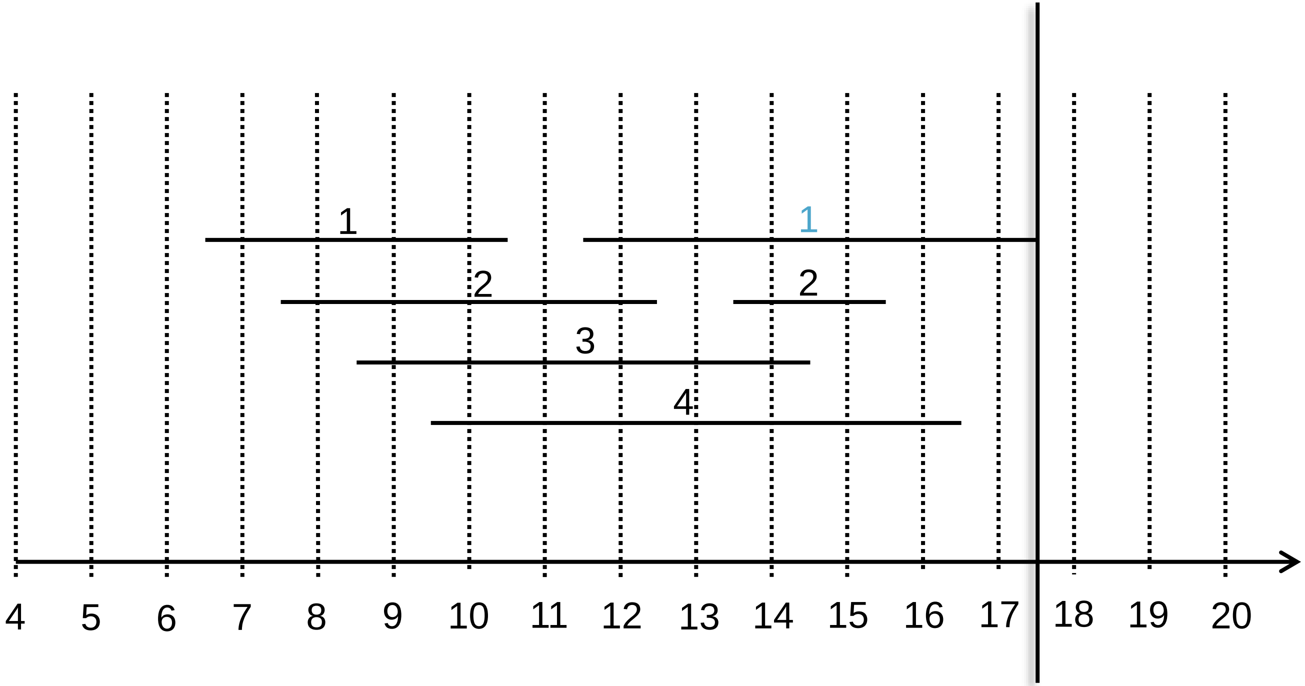
Hörsaal-Belegung – Eine Variante



Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

Bei Erreichen eines
- **Startpunktes:** Weise kleinste Raumnummer zu
- **Endpunktes:** Gib Raum frei

Hörsaal-Belegung – Eine Variante



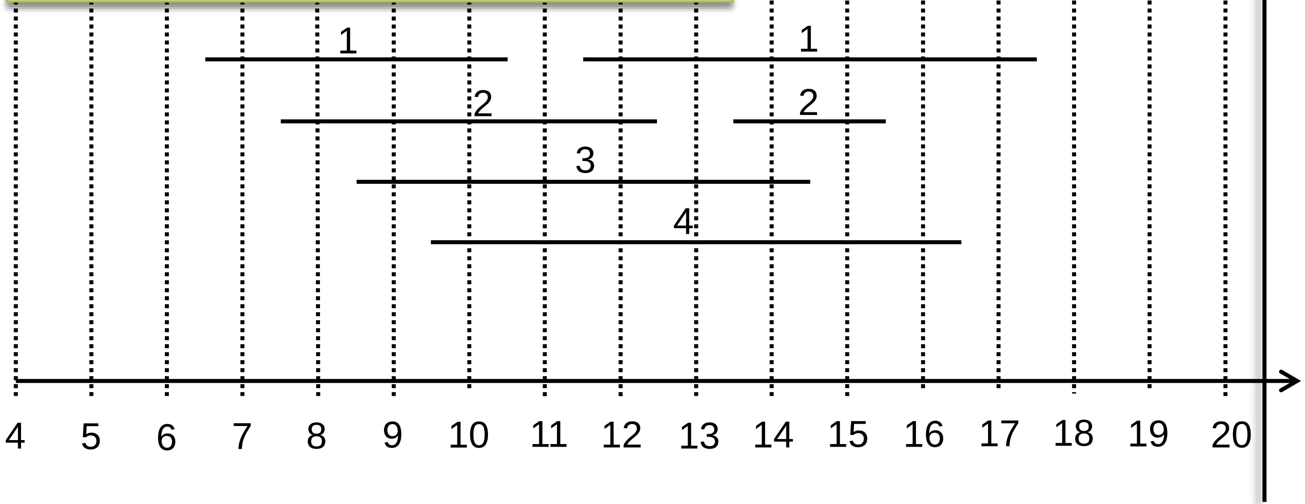
Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

Bei Erreichen eines

- **Startpunktes:** Weise kleinste Raumnummer zu
- **Endpunktes:** Gib Raum frei

Hörsaal-Belegung – Eine Variante

Theorem
Diese Strategie löst das Problem für n Intervalle und m Überlappungen optimal in Zeit $O(n \log n + m)$.



Wichtig ist nicht nur das Ende, sondern auch der Start eines Intervalls!

Bei Erreichen eines
- **Startpunktes:** Weise kleinste Raumnummer zu
- **Endpunktes:** Gib Raum frei

Beweis

Wie viele Räume braucht man mindestens?

Sei

- $\chi := \max_i(|\{I \in \mathcal{I} : i \in I\}|)$,
- opt der Wert einer optimalen Lösung,
- alg der Wert der Lösung unserer Strategie

Maximale Anzahl an Intervallen, die sich gleichzeitig überlappen.

Beobachtung: $opt \geq \chi$

Wir zeigen: $alg \leq \chi$

Beweis

Für das erste Intervall wird ein Raum benötigt, und $\chi \geq 1$. Das passt!

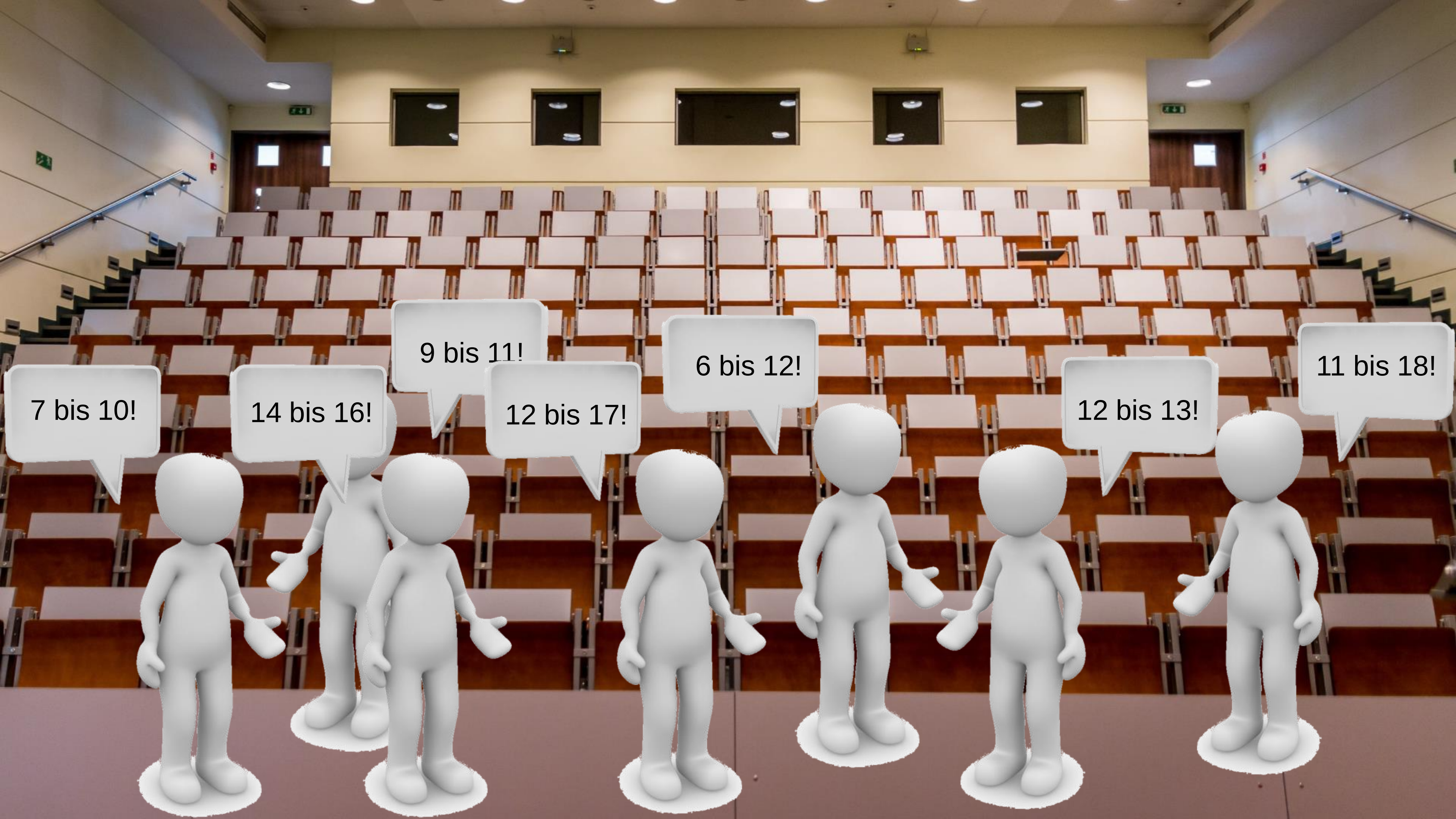
Annahme: $alg \leq \chi$ für die ersten i Intervalle.

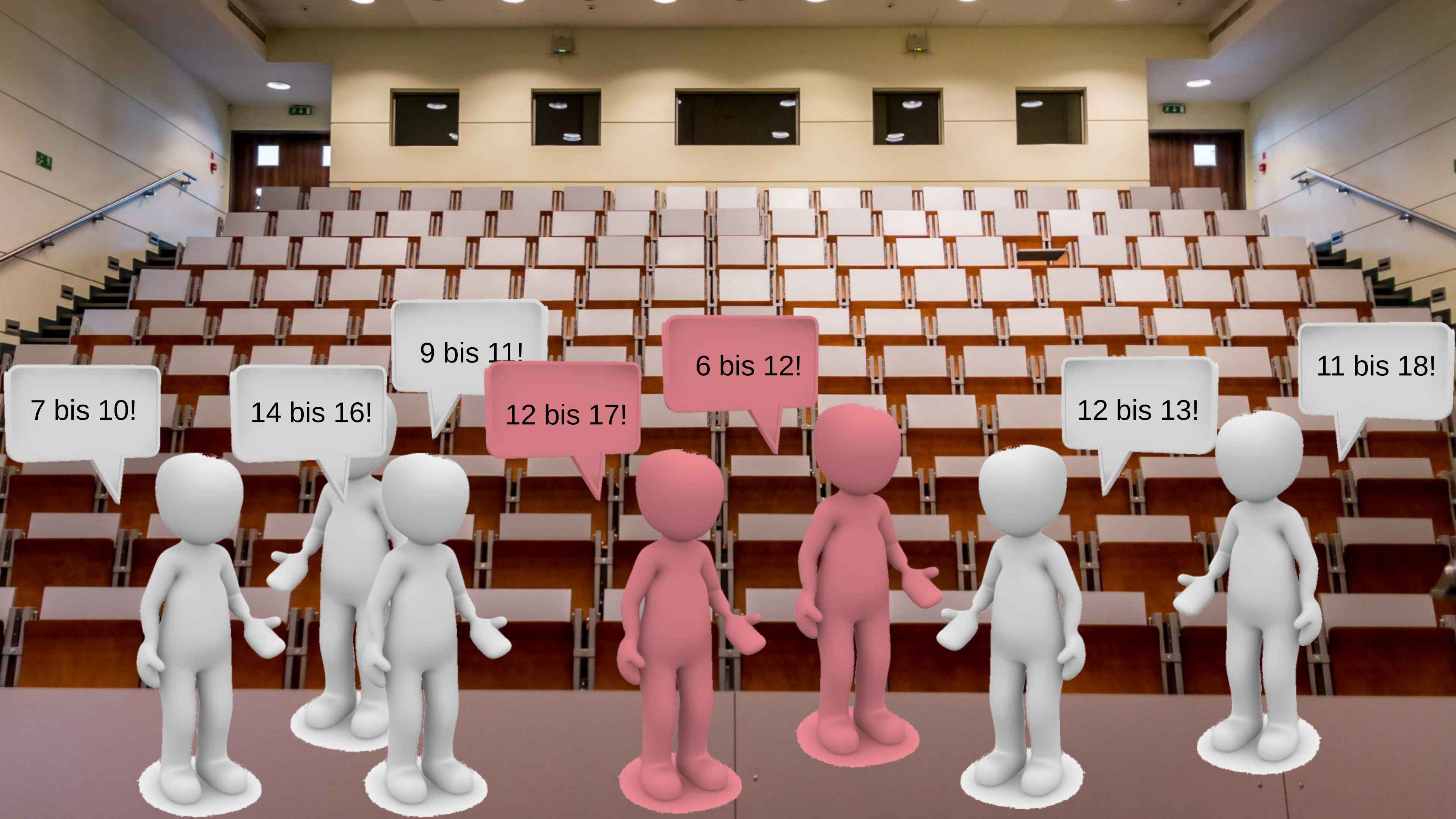
Betrachte das $i + 1$-ste Intervall I_{i+1}, welches den Raum k bekommt.

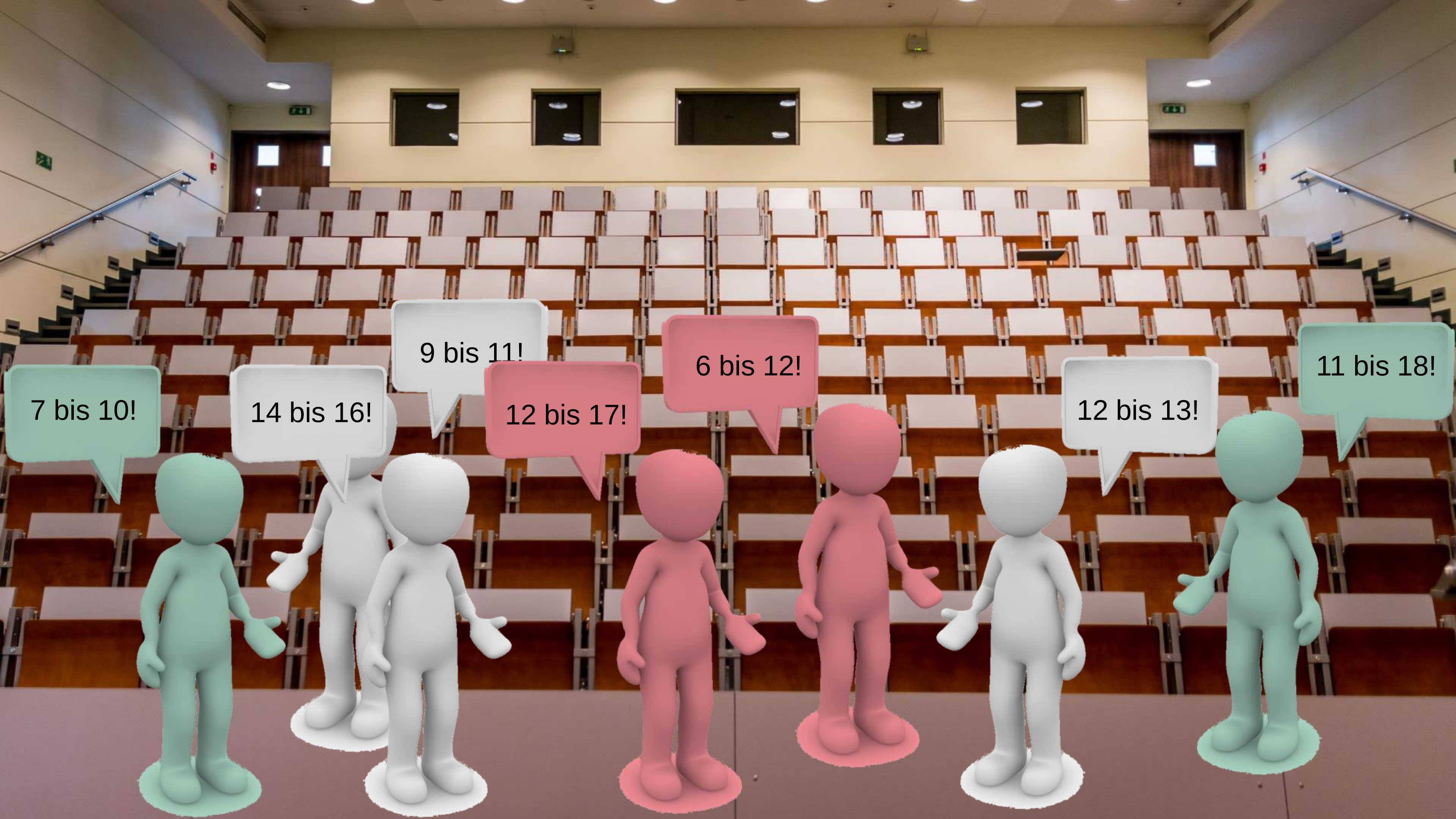
Fall 1: k wurde noch nicht vergeben.
- Zum Zeitpunkt $\mathrm{s}_{\mathrm{i}+1}$ überlappen sich k Intervalle.
- $\chi \geq k$

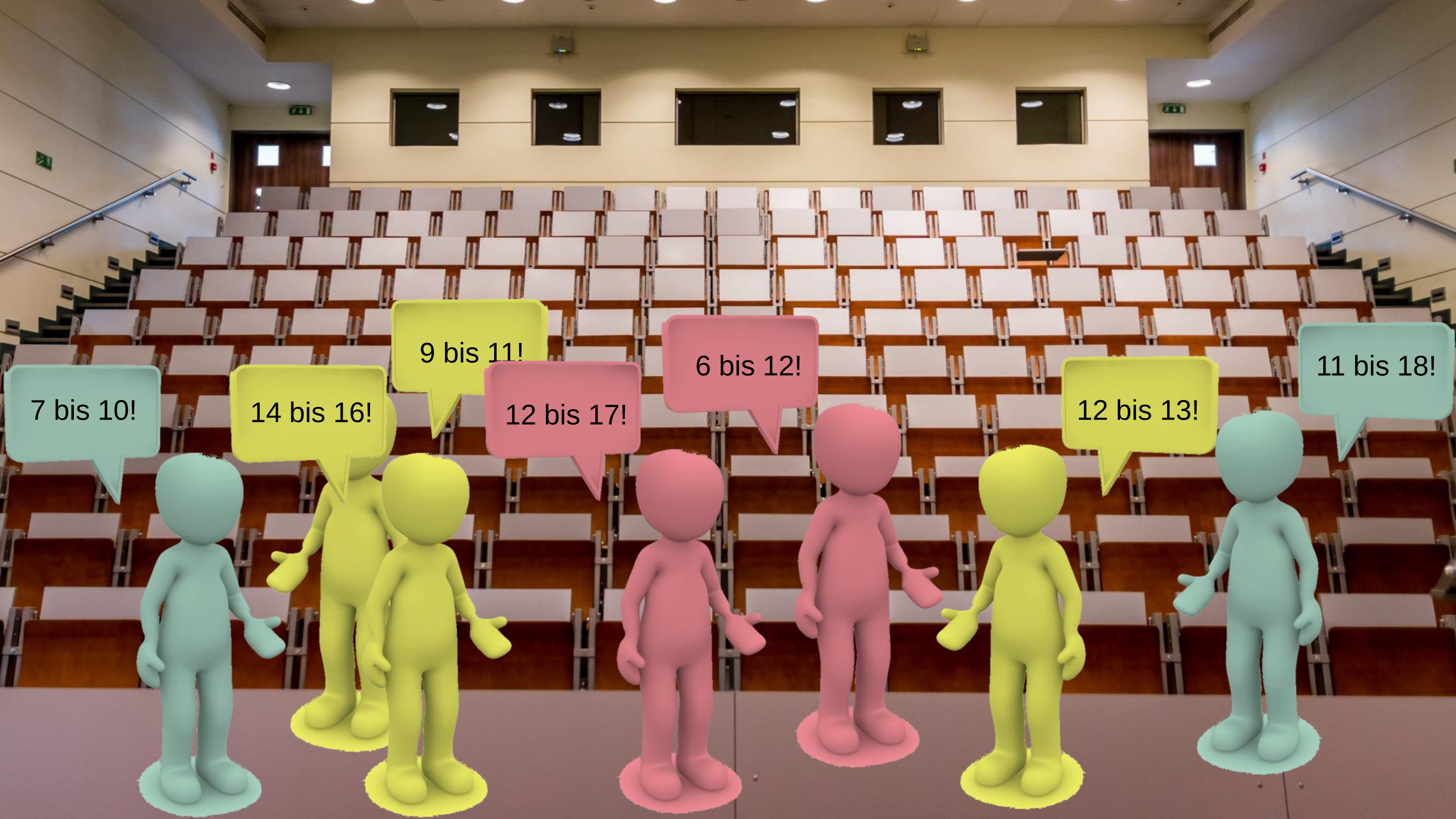
Fall 2: k wurde schon mal vergeben.
- Nach Annahme gilt weiterhin $alg \leq \chi$

In beiden Fällen haben wir auch für das $i + 1$-ste Intervall $\leq \chi$ Räume benutzt.


7 bis 10!
14 bis 16!
9 bis 11!
12 bis 17!
6 bis 12!
12 bis 13!
11 bis 18!


7 bis 10!
14 bis 16!
9 bis 11!
12 bis 17!
6 bis 12!
12 bis 13!
11 bis 18!


7 bis 10!
14 bis 16!
9 bis 11!
12 bis 17!
6 bis 12!
12 bis 13!
11 bis 18!


7 bis 10!
14 bis 16!
9 bis 11!
12 bis 17!
6 bis 12!
12 bis 13!
11 bis 18!