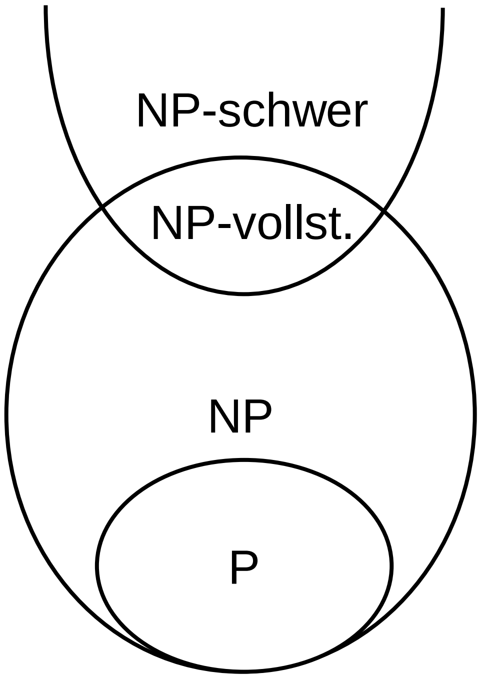
Algorithmen und Datenstrukturen 2 – Übung #5

Reduktionen

Matthias Konitzny

29.06.2022

Komplexitätsklassen



P:	Probleme lassen sich effizient lösen.
NP:	Lösungen können effizient verifiziert werden.
NP-schwer:	Wenn das Problem in P liegt, gilt P=NP.
NP-vollständig:	Problem liegt in NP und ist NP-schwer.

NP-Schwere

Etwas genauer:

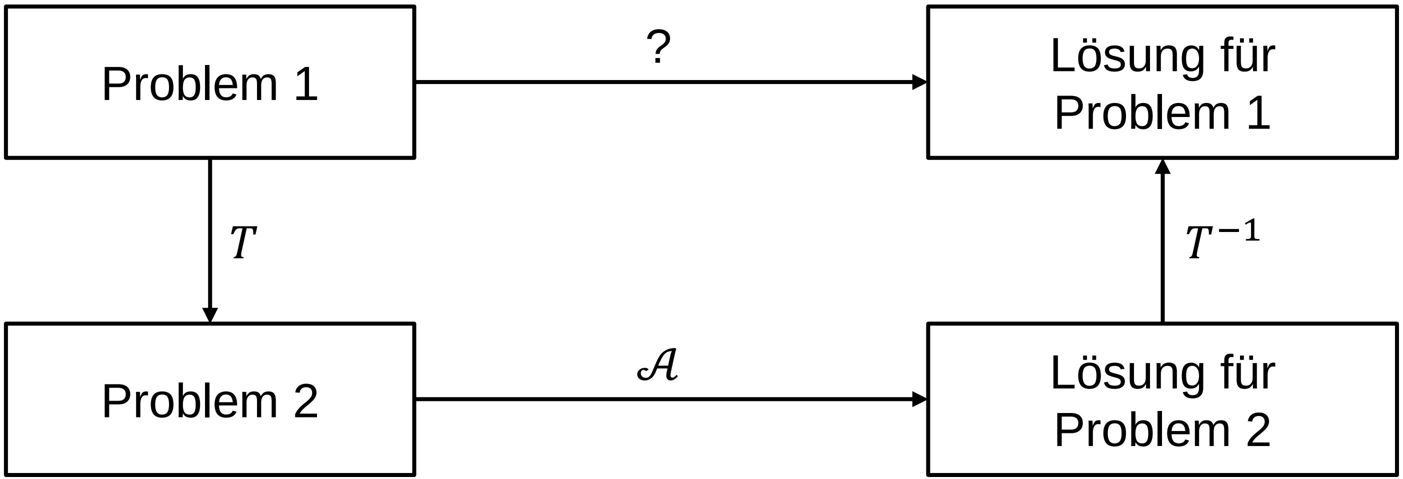
Ein Problem Π heißt *NP-schwer*, falls es für jedes Problem $\Pi' \in \mathrm{NP}$ eine Polynomialzeit-Reduktion von Π' auf Π existiert.

Um zu zeigen, dass ein Problem NP-schwer ist, reicht es eine Reduktion **von** einem bekannten NP-schweren Problem durchzuführen.

In der Literatur wird öfters auch $\Pi' \leq_p \Pi$ geschrieben.

„Π' ist höchstens so schwer wie Π“

Reduktionen



Besitzen T, T^{-1} und $\mathcal{A}$ polynomielle Laufzeit,
kann Problem 1 in polynomieller Zeit gelöst werden.

Reduktionen

$$
\begin{tikzcd}
\text{Problem 1} \arrow[r, "?"] \arrow[d, "T"] & \text{Lösung für Problem 1} \\
\text{Problem 2} \arrow[r, "\mathcal{A}"] & \text{Lösung für Problem 2} \arrow[u, "T^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

Ist Problem 1 NP-schwer und besitzen T und T^{-1} polynomielle Laufzeit, dann muss Problem 2 auch NP-schwer sein.

Ein paar Probleme

Ein paar Probleme

3-SAT

$$\varphi = (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$

Gegeben

Logische Formel φ in konjunktiver Normalform mit

- m Klauseln
- n Variablen
- maximal drei Literalen pro Klausel

Frage

Gibt es eine φ erfüllende Belegung der Variablen?

Ein paar Probleme

3-SAT

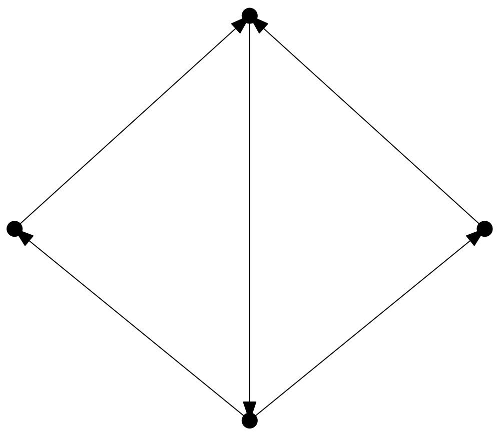
Directected Hamiltonian Cycle DHC

Gegeben

Gerichteter Graph $\mathrm{D} = (V, E)$

Frage

Gibt es einen gerichteten Hamiltonkreis in D?



Ein paar Probleme

3-SAT **DHC**

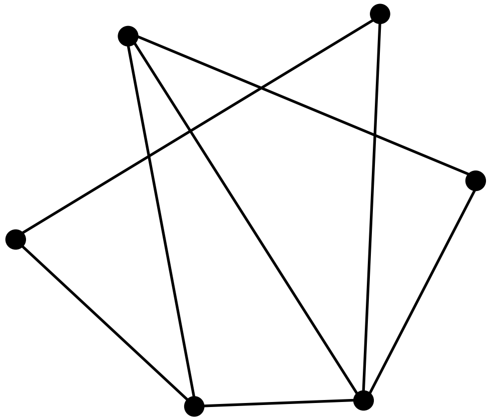
Undirected Hamiltonian Cycle HC

Gegeben

Ungerichteter Graph $G = (V, E)$

Frage

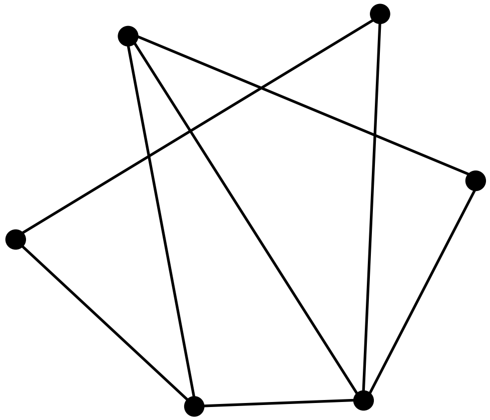
Gibt es einen Hamiltonkreis in G?



Ein paar Probleme

3-SAT **DHC**

Undirected Hamiltonian Cycle HC



Gegeben

Ungerichteter Graph $\mathrm{G} = (V, E)$

Frage

Gibt es einen Hamiltonkreis in G?

Ein paar Probleme

3-SAT **DHC** **HC**

Traveling Salesman Problem TSP

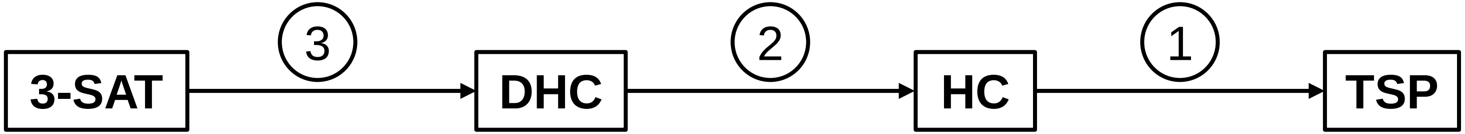
Gegeben

Vollsändiger Graph $\mathrm{G} = (V, E)$ mit Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}^{+}$
und eine Zahl $k \in \mathbb{R}^{+}$

Frage

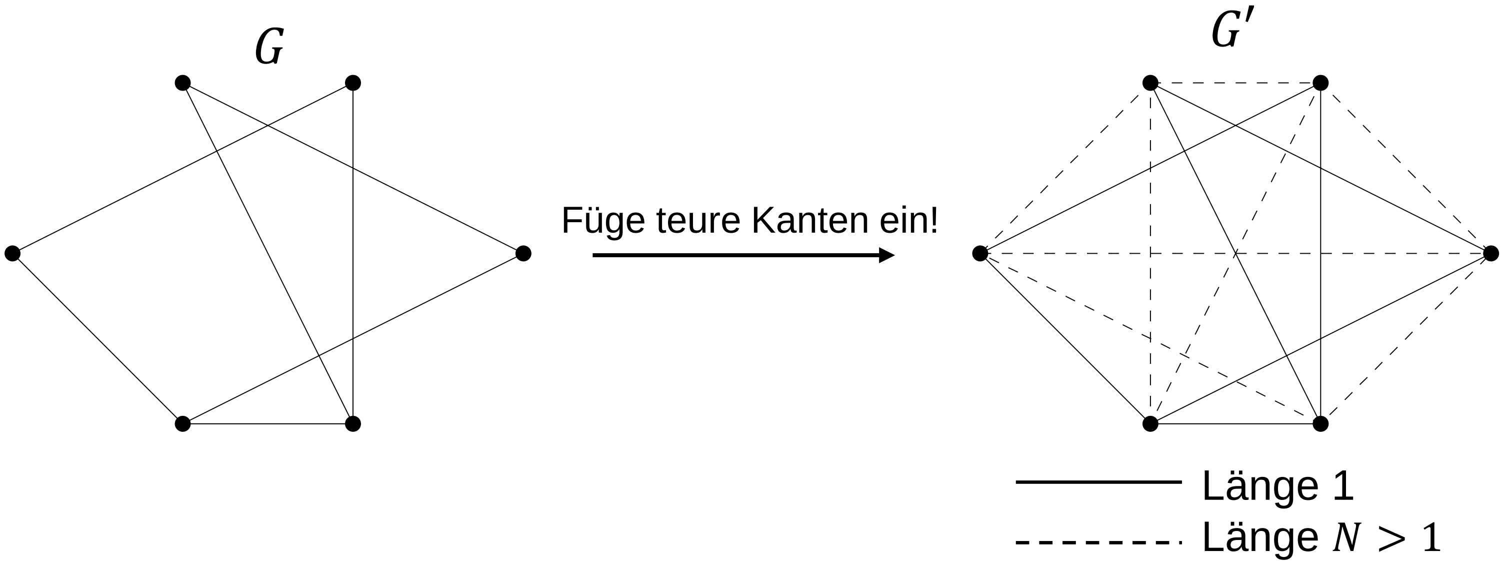
Gibt es eine Tour in G mit Kantenkosten maximal k?

Ein paar Probleme



HC auf TSP

Reduktion von HC auf TSP



Zu zeigen

G besitzt genau dann einen Hamitonkreis, wenn G' eine Tour der Länge $n \coloneqq |V|$ besitzt.

Beweis Korrektheit

„ $\Rightarrow$ “

Wähle die gleichen Kanten von G in G'. Diese haben die Kosten n.

„ $\Leftarrow$ “

Besitzt G keinen Hamiltonkreis, so muss in G' mindestens eine Kante mit Gewicht N benutzt werden. Somit hat die Tour ein Gewicht von mindestens $n - 1 + N > n$, da $N > 1$.

Laufzeit

Es müssen $O(n^2)$ Kanten hinzugefügt werden.

Alle $O(n^2)$ Kanten müssen mit Kosten versehen werden.

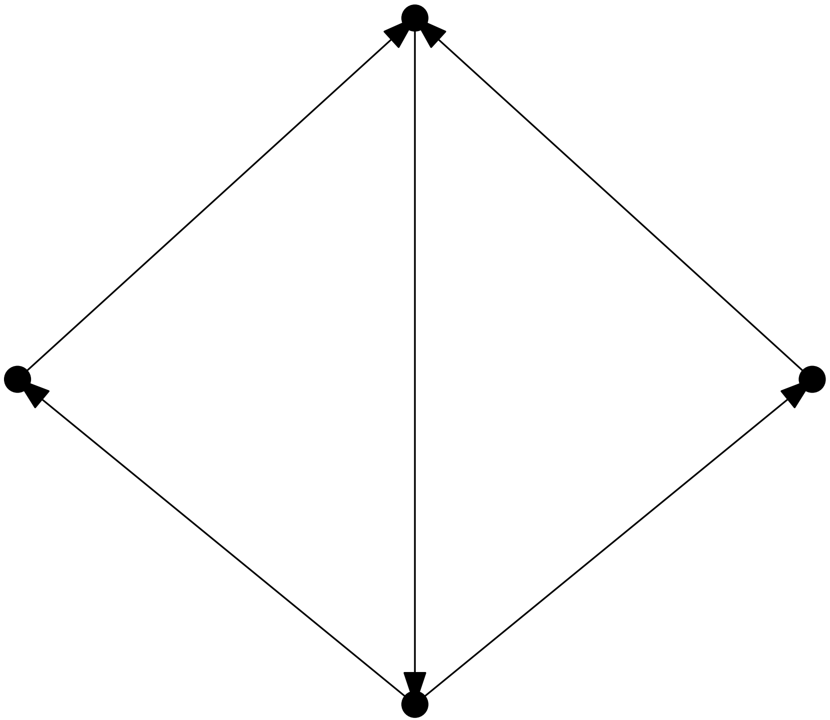
Insgesamt also eine Laufzeit von $O(n^2)$.

Konsequenz

TSP kann nicht approximiert werden

DHC auf HC

Reduktion von DHC auf HC

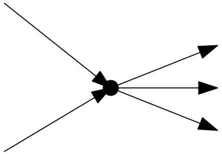


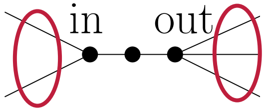
Wie kann man garantieren, dass im ungerichteten Graphen…

…nur eine der ursprünglich *eingehenden* Kanten verwendet wird?

…nur eine der ursprünglich *ausgehenden* Kanten verwendet wird?

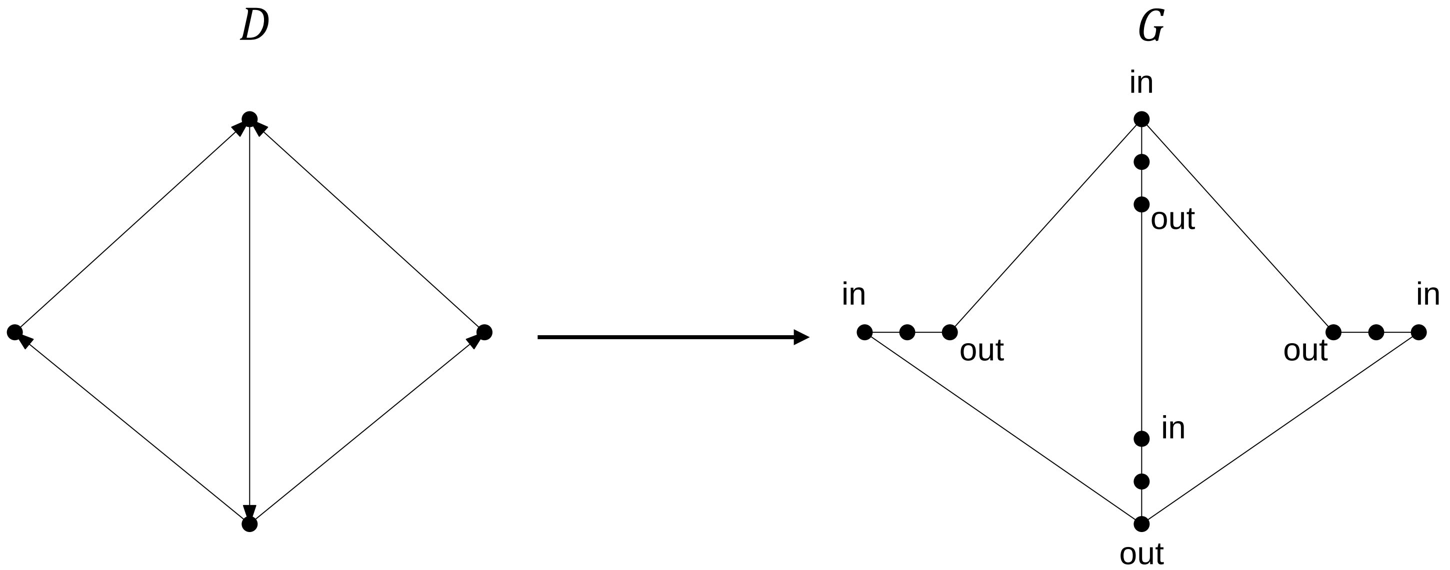
Idee: Teile Knoten auf!





Jeweils nur eine möglich!

Reduktion von DHC auf HC



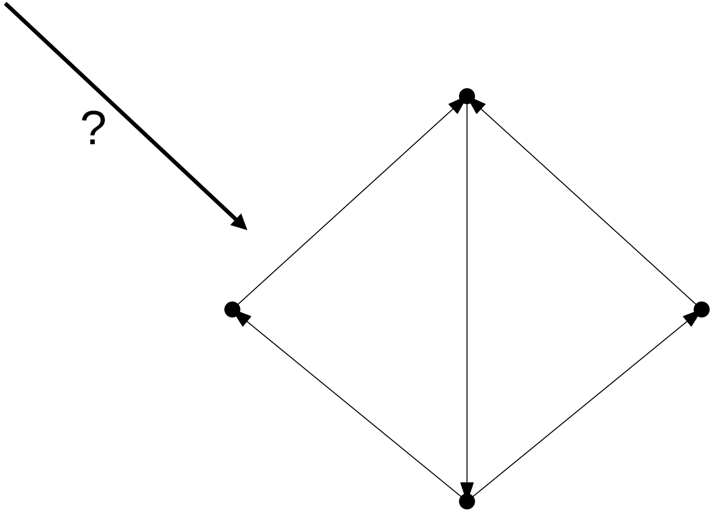
Zu zeigen

D besitzt genau dann einen gerichteten Hamiltonkreis, wenn G einen Hamiltonkreis besitzt.

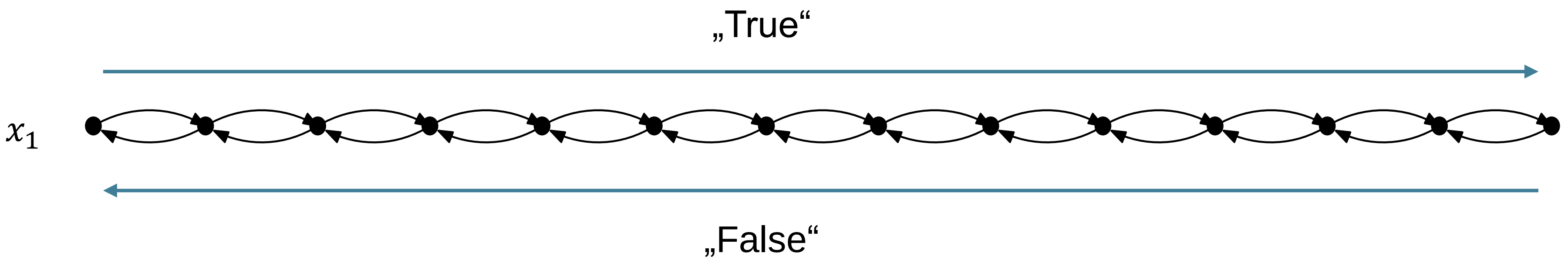
3SAT auf DHC

Reduktion 3SAT auf DHC

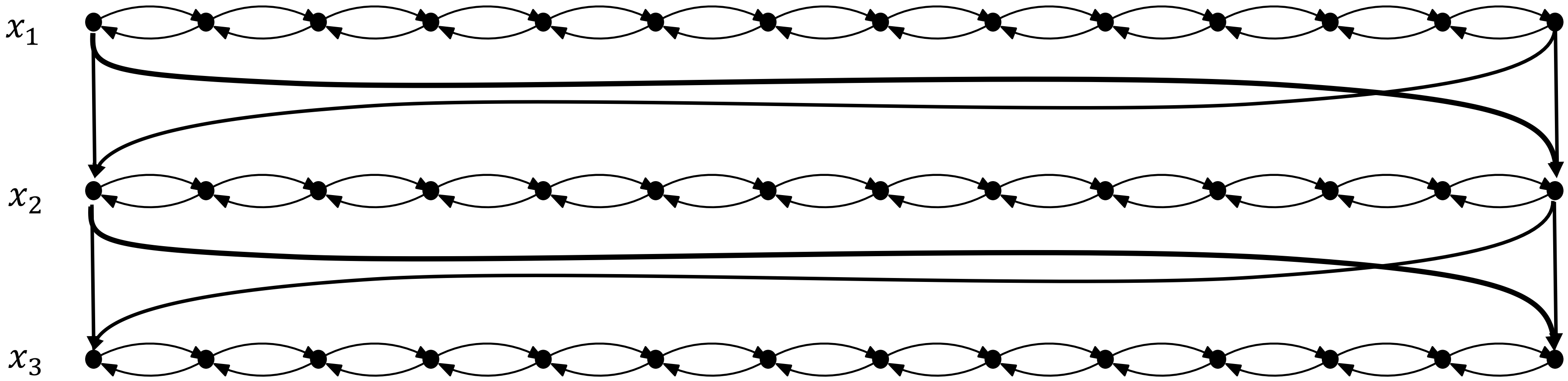
$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



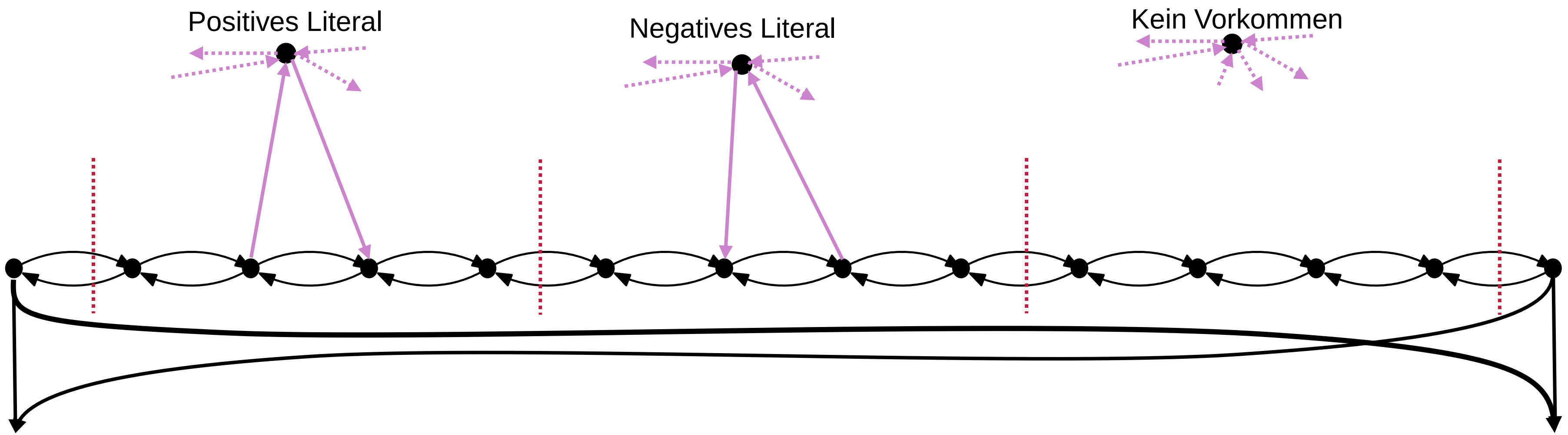
Variablen-Gadgets



Variablen-Gadgets

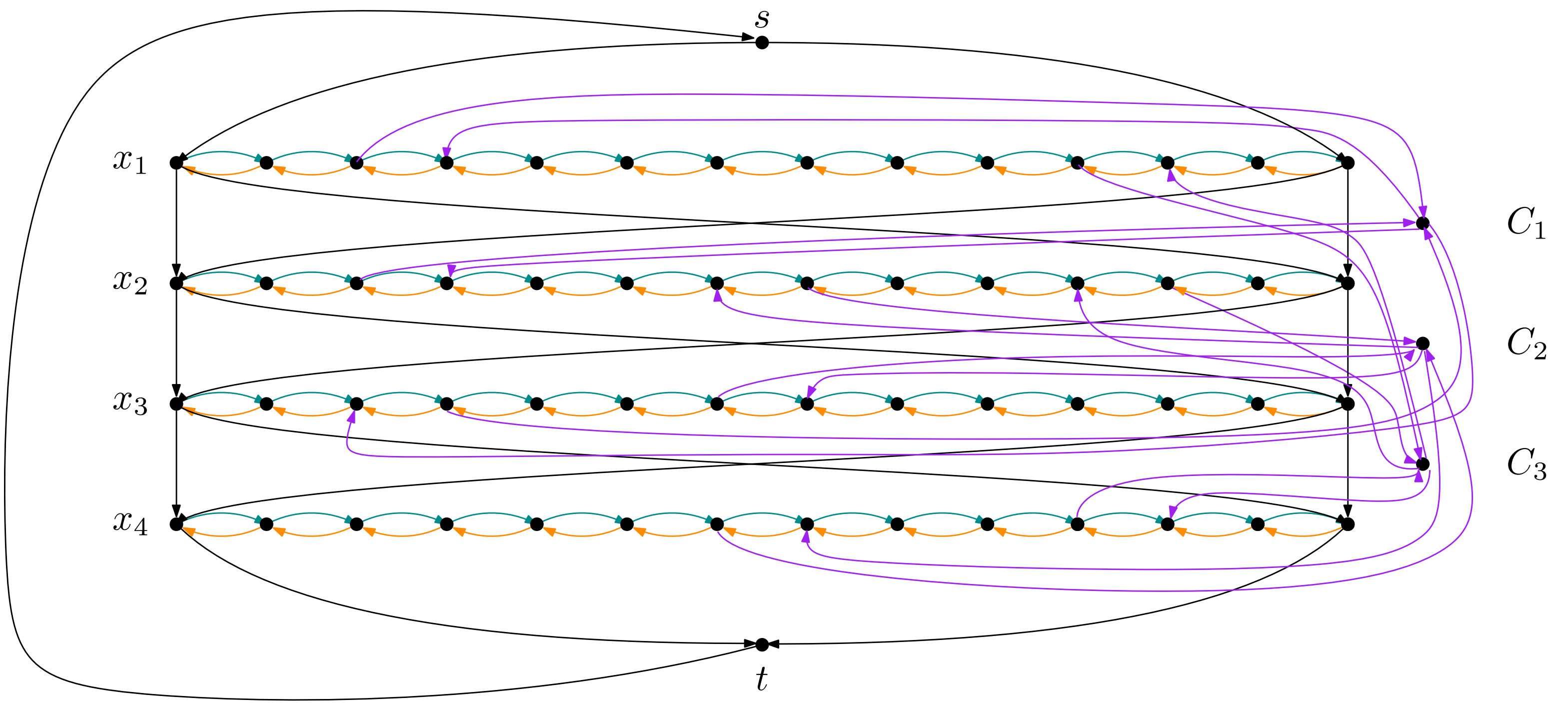


Klausel-Gadgets



Beispiel der Reduktion

$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$



Korrektheit

„Wenn die Formel erfüllbar ist, dann gibt es einen Hamiltonkreis.“

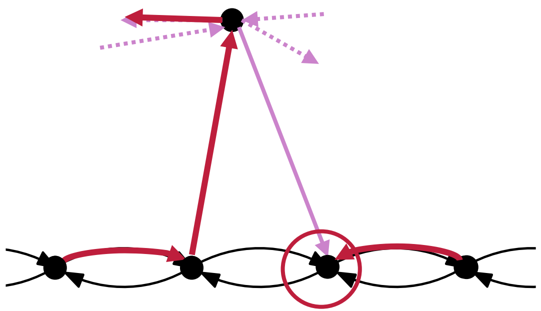
Laufe die Variablen Gadgets in der richtigen Richtung ab und laufe zwischendurch die Klauseln ab. (Nach Konstruktion möglich)

„Wenn es einen Hamiltonkreis gibt, dann ist die Formel erfüllbar.“

Dazu müssen wir zeigen:

1. Geht man zu einer Klausel, muss man zur selben Variable zurück.
2. Man darf nur Klauseln ablaufen, wenn die richtige Richtung gewählt wurde.

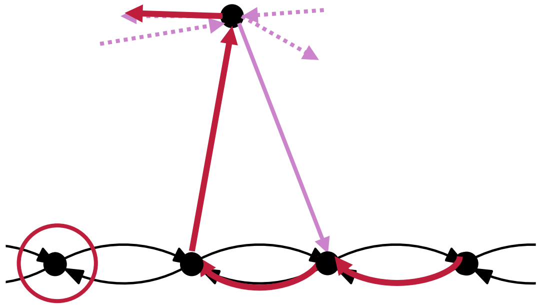
Man muss wieder zurück…



Man kommt nicht mehr weg…

Annahme: Man geht nicht zurück.

Man muss richtig rum laufen…



Man kommt nicht mehr weg…

Annahme: Man läuft Klauseln falsch ab.

Korrektheit

„Wenn es einen Hamiltonkreis gibt, dann ist die Formel erfüllbar."

Dazu müssen wir zeigen:

1. Geht man zu einer Klausel, muss man zur selben Variable zurück. ✓
2. Man darf nur Klauseln ablaufen, wenn die richtige Richtung gewählt wurde. ✓

Also:

1. Variablen-Gadgets werden in einem Zug durchlaufen
   - Die Richtung gibt uns *true* oder *false*
2. Gibt es keine Belegung der Variablen, sodass φ erfüllt wird, so gibt es immer mindestens ein Klausel-Gadget, dass nicht abgelaufen werden kann.
   - Es gibt also keinen Hamiltonkreis.

Laufzeit der Transformation

Wir erstellen einen Graphen mit

- $m + 4nm + 2n + 2$ Knoten
- $O(nm)$ vielen Kanten

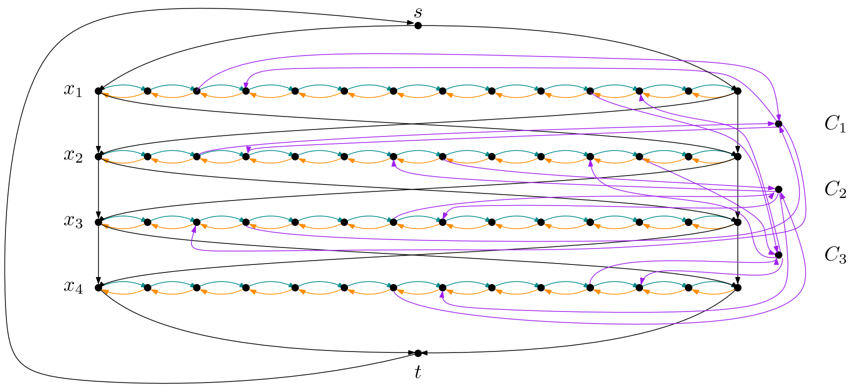
Wir brauchen also $O(nm)$ Zeit, den Graphen zu erstellen.

Lösung für 3SAT berechnen

- O(1)

Uns interessiert nur, **ob** die Formel erfüllbar ist!

$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$



Schritte für einen NP-Schwere Beweis

Zeige: Problem Π ist NP-schwer

- Suche ein geeignetes NP-schweres Problem Π'.
- Reduziere **von** Π' **auf** Π.
- Beweise Korrektheit:

  „Für jede Instanz $I_{\Pi'}$ von Π' gibt es genau dann eine Lösung, wenn die Instanz $T(I_{\Pi'})$ von Π eine Lösung gibt.“
- Beweise polynomielle Laufzeit von T und T^{-1}.

Beliebte Fehler

- Nur für ein Beispiel gezeigt.
- Reduktion falsch herum.
- Im Korrektheitsbeweis nur eine Richtung gezeigt.
- Laufzeit der Transformation nicht berücksichtigt.
- Codierungsgröße von $T(I_{\Pi'})$ ist nicht polynomiell durch die Größe von $I_{\Pi'}$ beschränkt.