7 Hashing

Algorithmen und Datenstrukturen 2
Sommer 2021

Prof. Dr. Sándor Fekete

7.1 Motivation

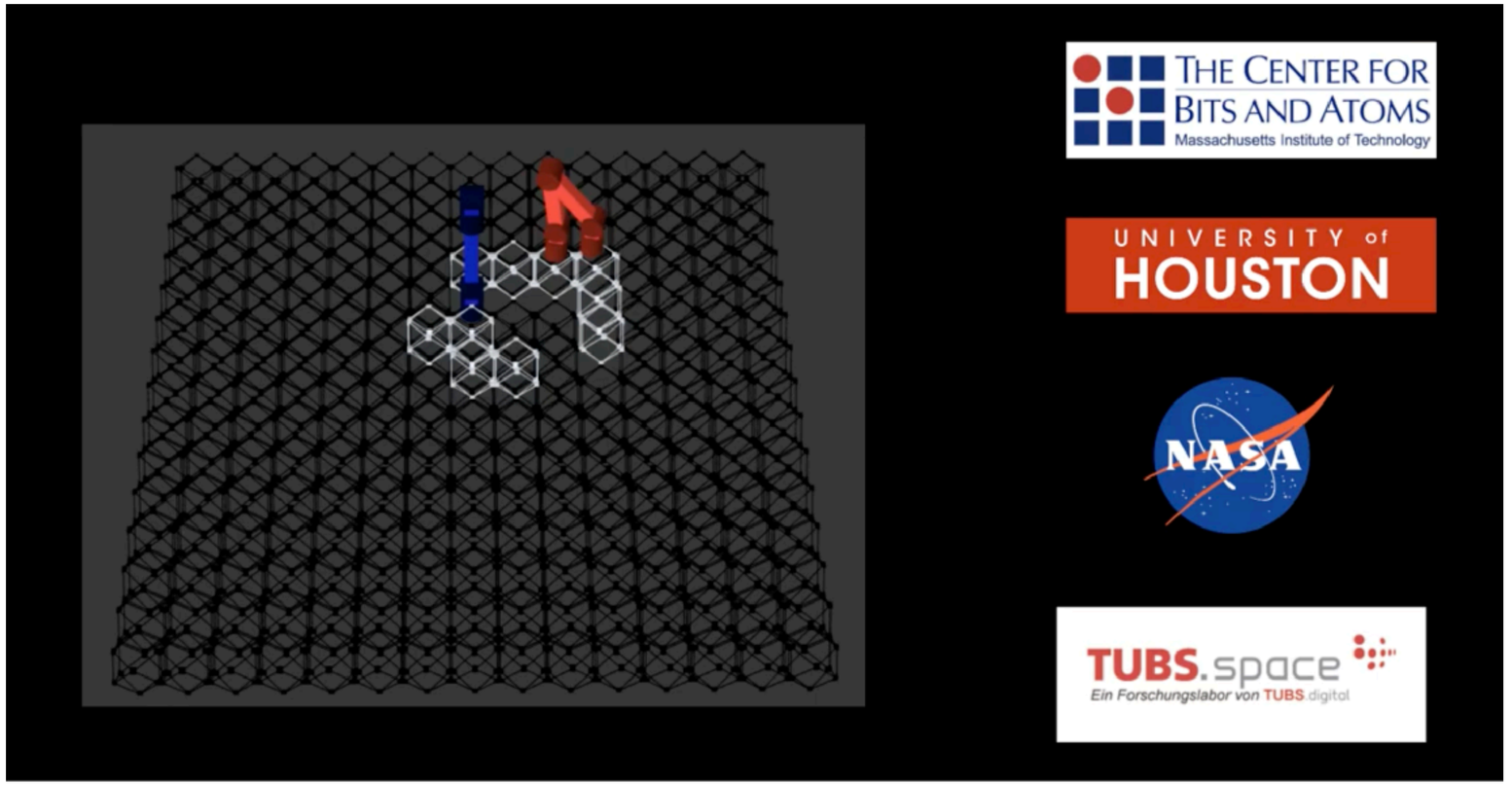
Aufgabenstellung

Aufgabenstellung

Aufgabenstellung

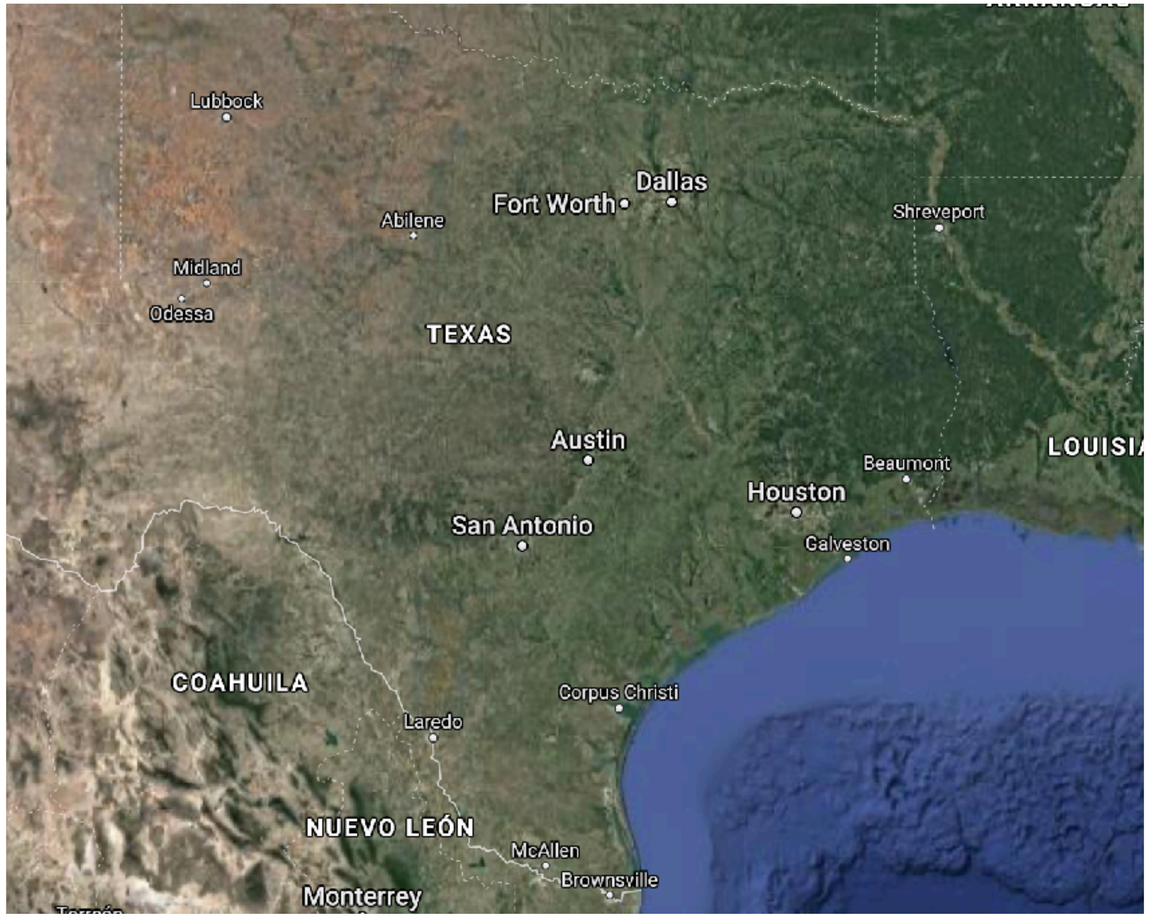
Aufgabenstellung

Aufgabenstellung

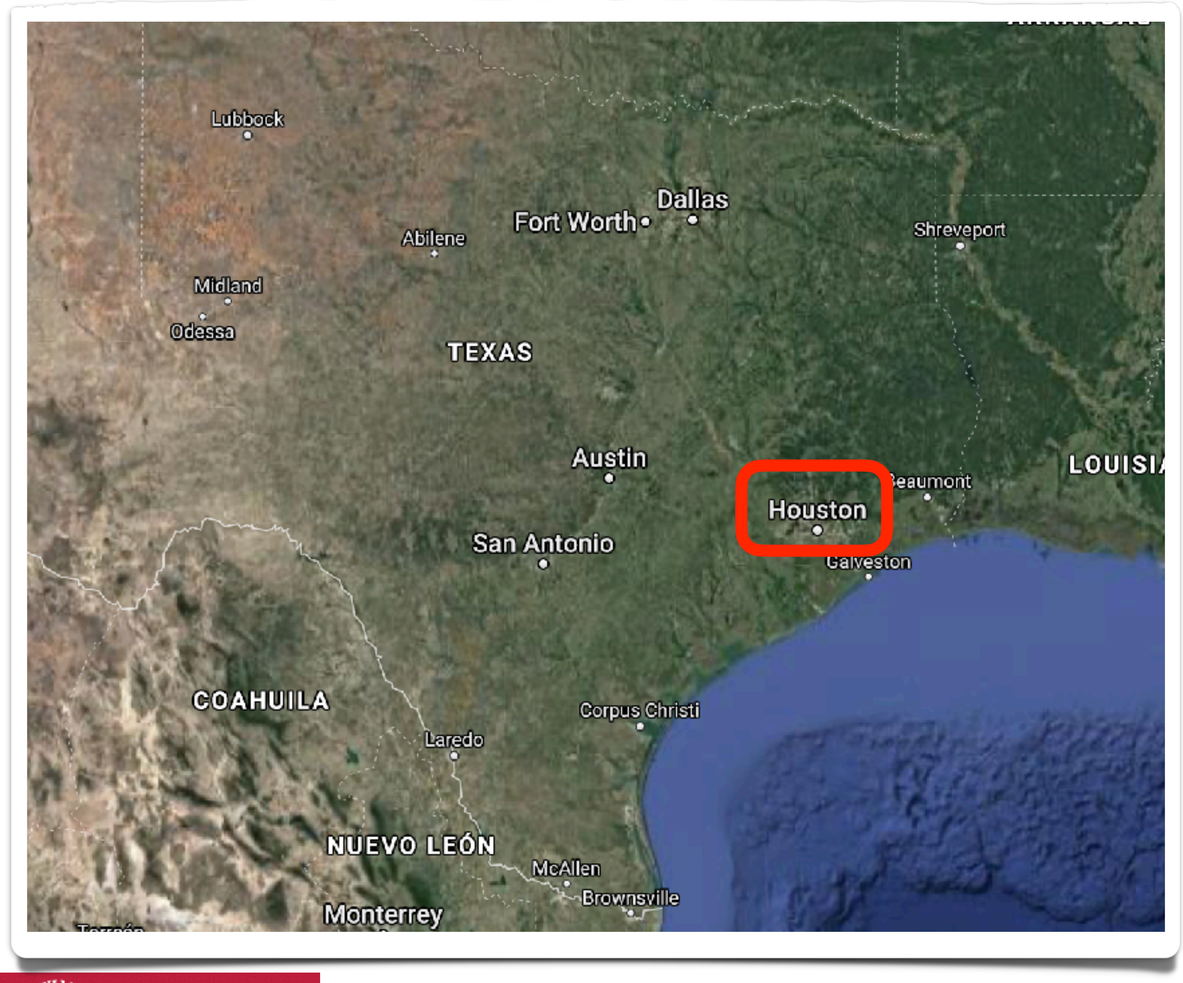


Aufgabenstellung

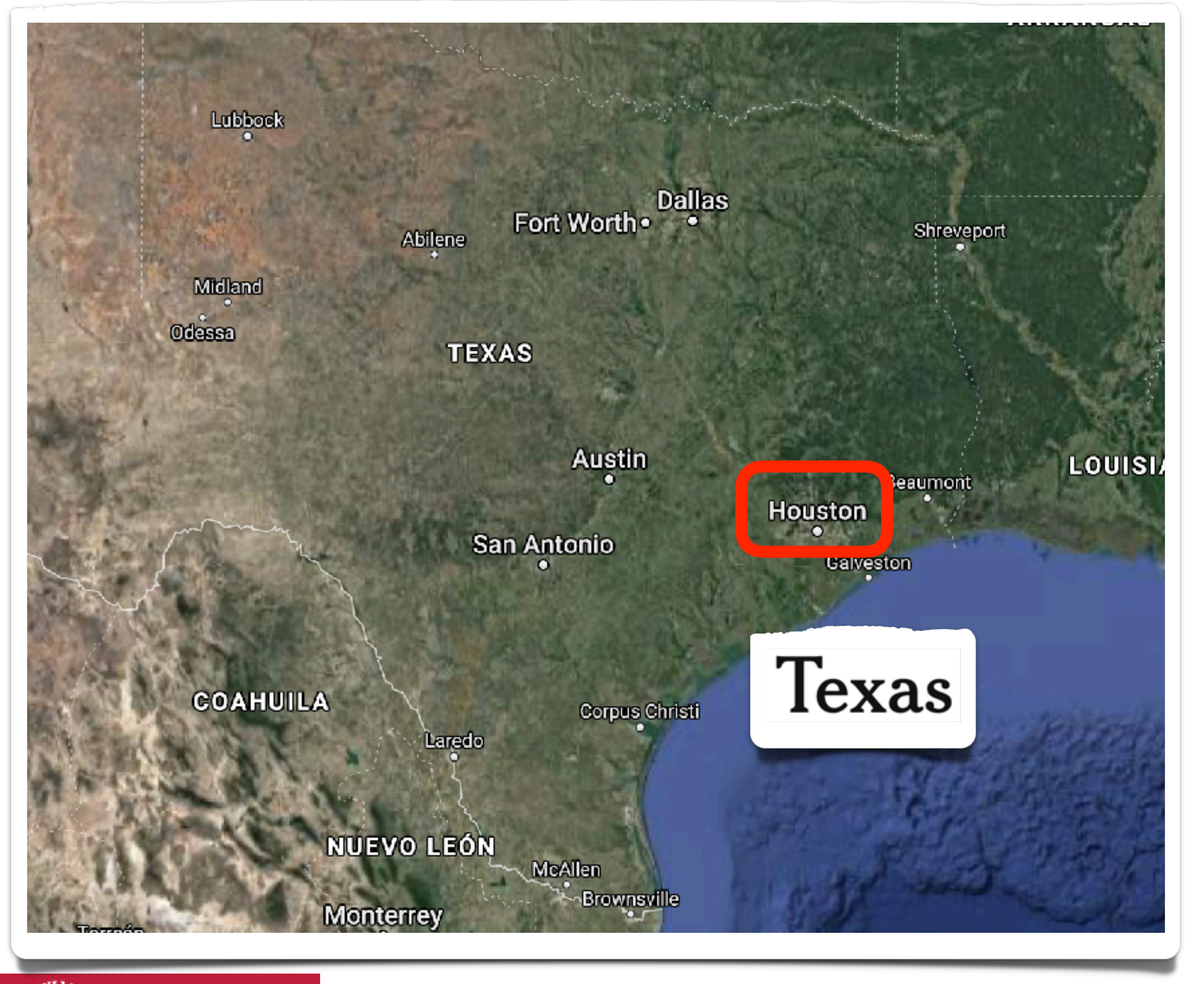
Aufgabenstellung



Aufgabenstellung



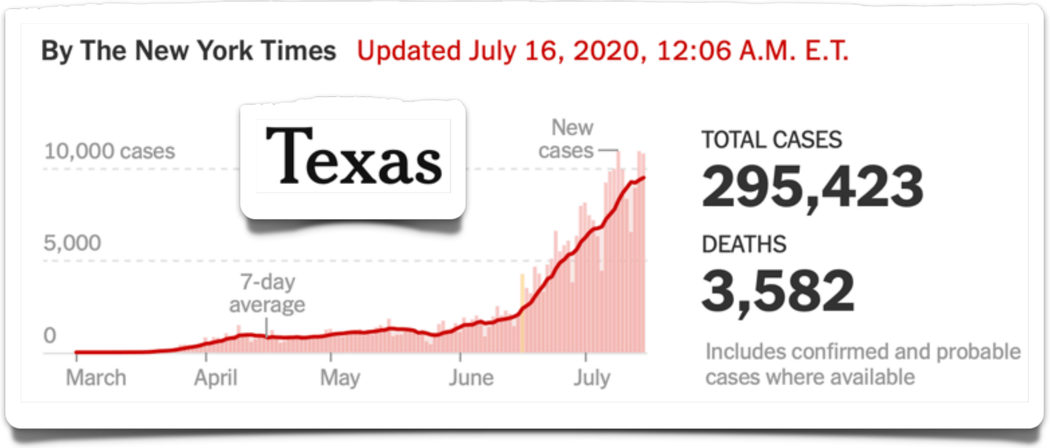
Aufgabenstellung



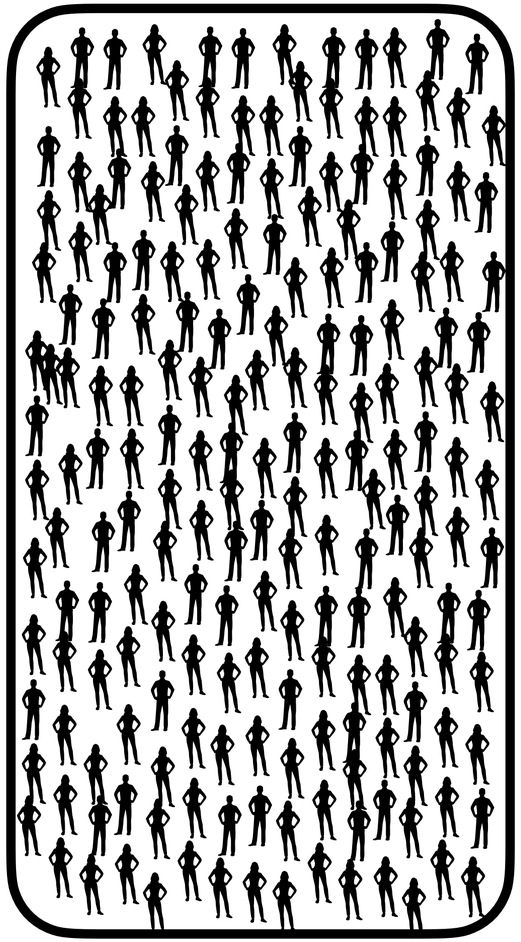
Aufgabenstellung

Texas

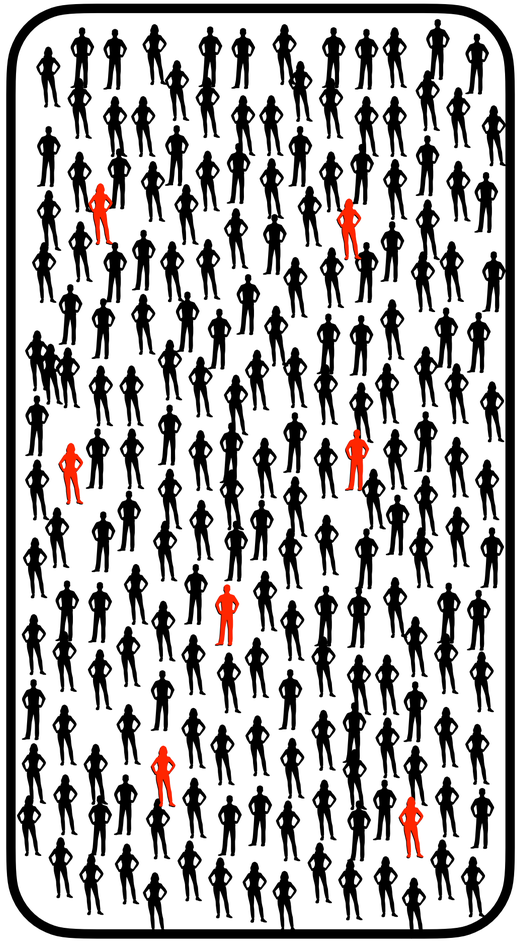
Aufgabenstellung



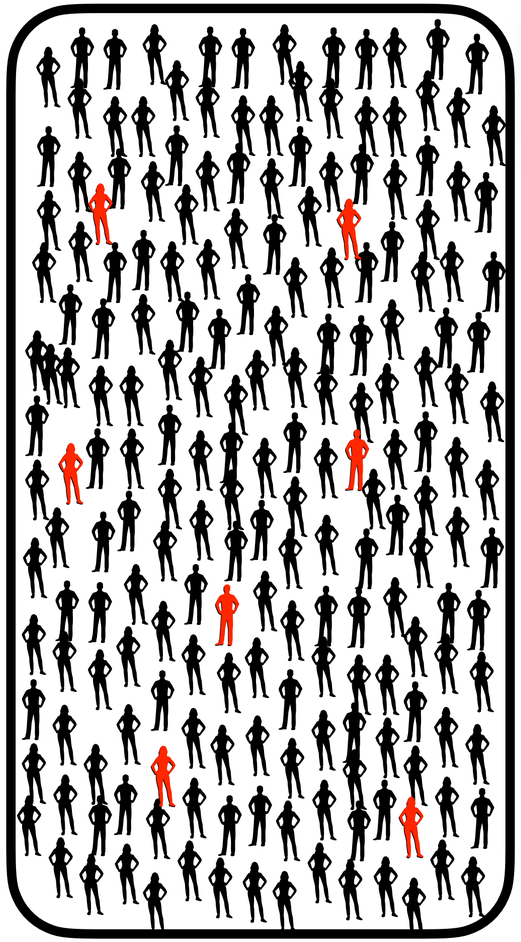
Aufgabenstellung



Aufgabenstellung

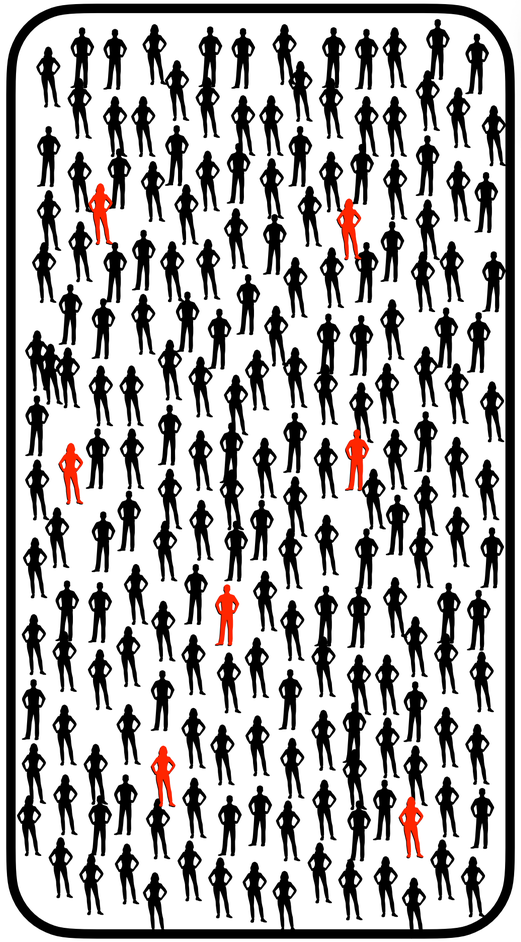


Aufgabenstellung

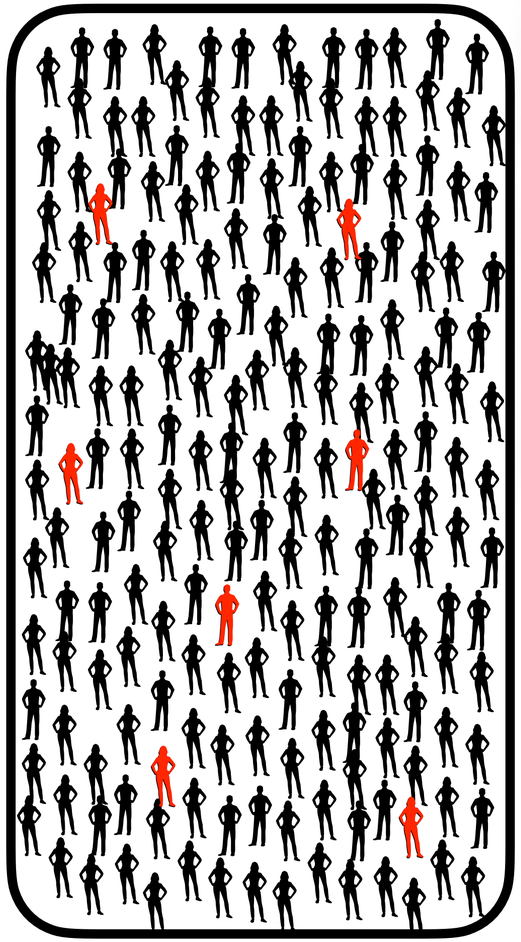


The New York Times

Aufgabenstellung



Aufgabenstellung



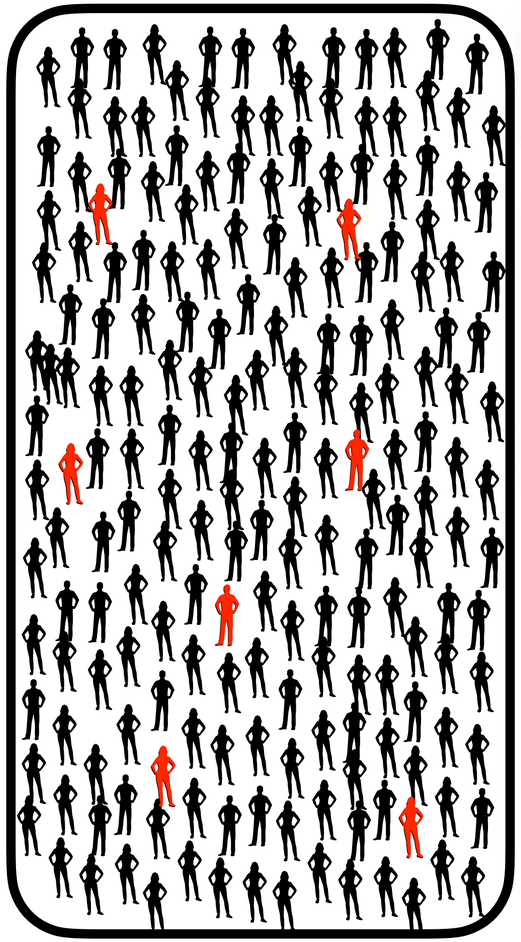
The New York Times

July 13, 2020

Bottleneck for U.S. Coronavirus Response: The Fax Machine

Before public health officials can manage the pandemic, they must deal with a broken data system that sends incomplete results in formats they can't easily use.

Aufgabenstellung

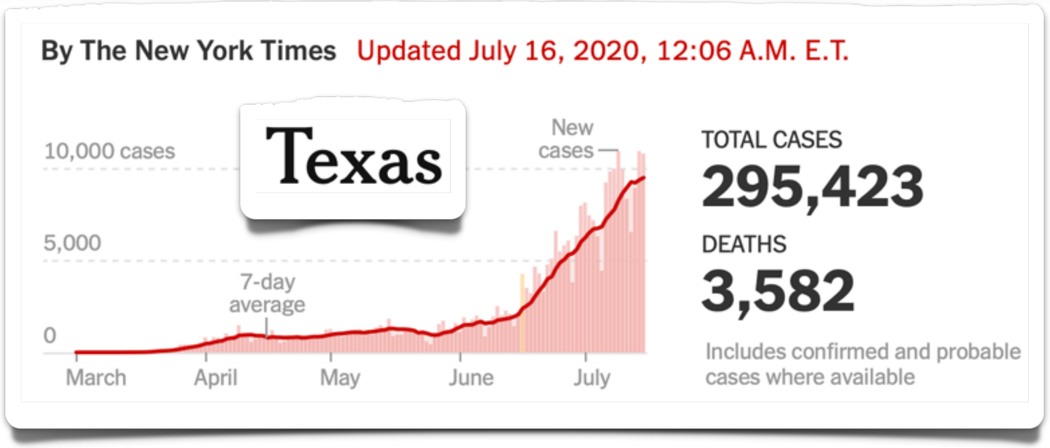


The New York Times

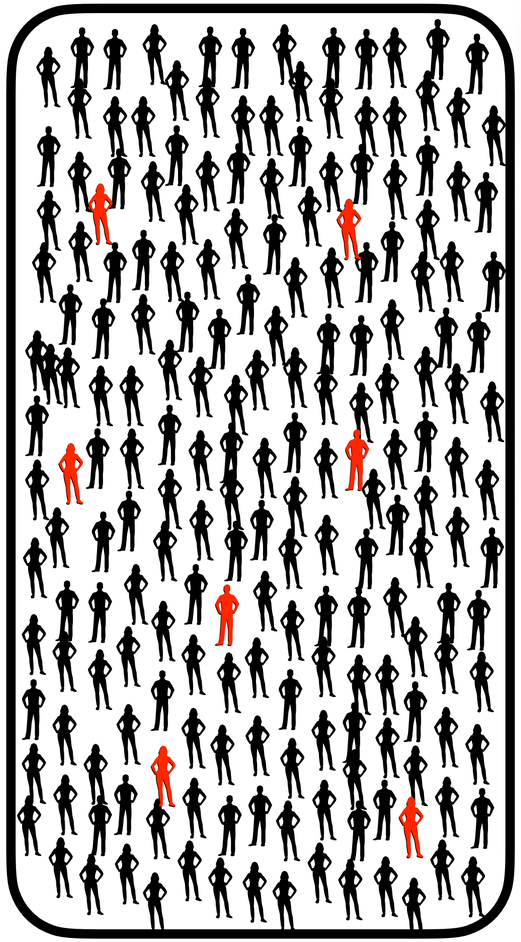
July 13, 2020

Bottleneck for U.S. Coronavirus Response: The Fax Machine

Before public health officials can manage the pandemic, they must deal with a broken data system that sends incomplete results in formats they can't easily use.



Aufgabenstellung



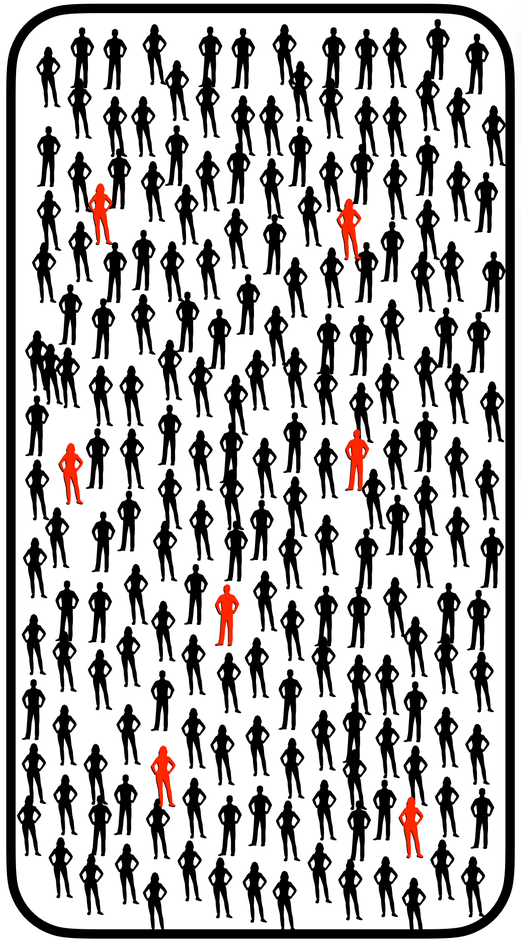
The New York Times

July 13, 2020

Bottleneck for U.S. Coronavirus Response: The Fax Machine

Before public health officials can manage the pandemic, they must deal with a broken data system that sends incomplete results in formats they can't easily use.

Aufgabenstellung



The New York Times

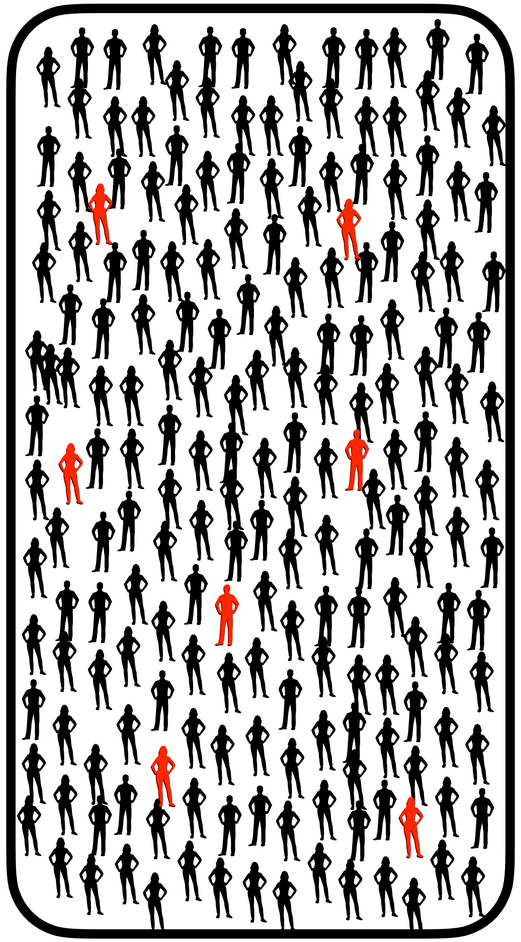
July 13, 2020

Bottleneck for U.S. Coronavirus Response: The Fax Machine

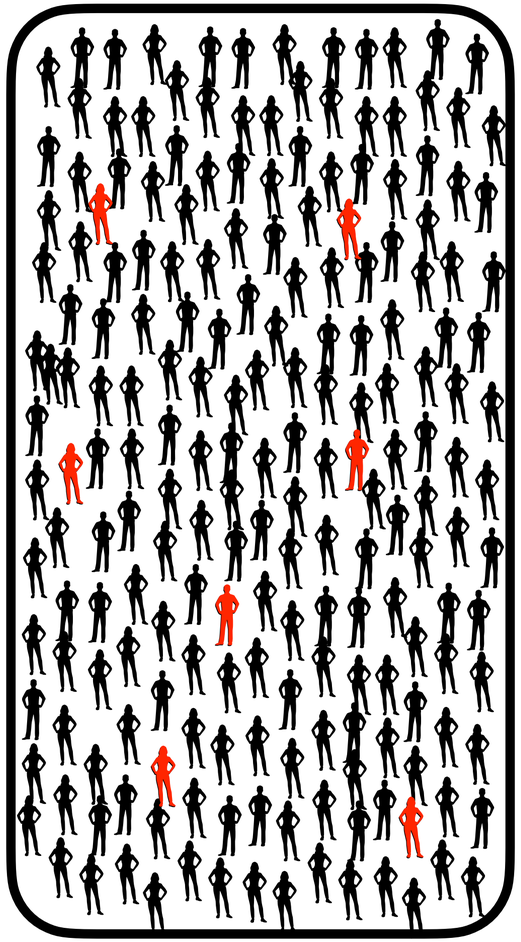
Before public health officials can manage the pandemic, they must deal with a broken data system that sends incomplete results in formats they can't easily use.

Stacks of coronavirus test results at the Harris County Public Health department in Houston. They arrived by mistake and had to be sent to other jurisdictions.

Aufgabenstellung

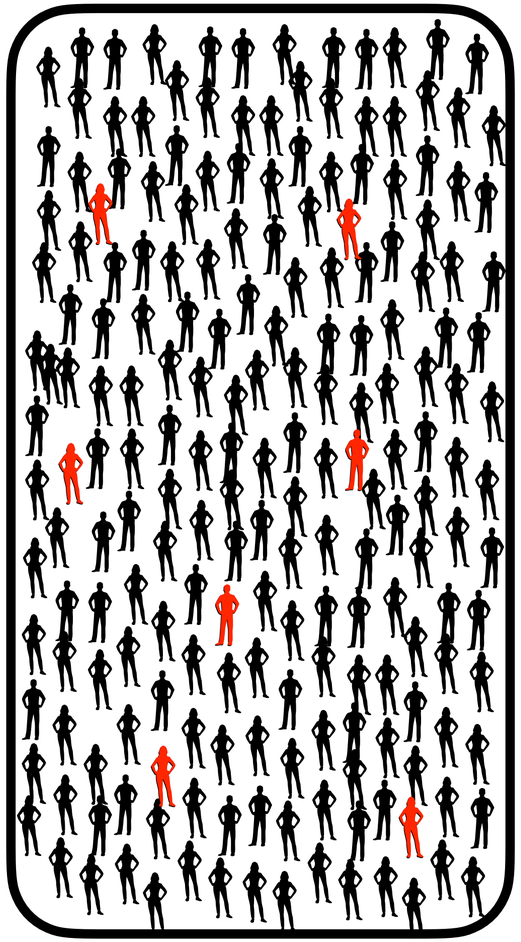


Aufgabenstellung



Hashing

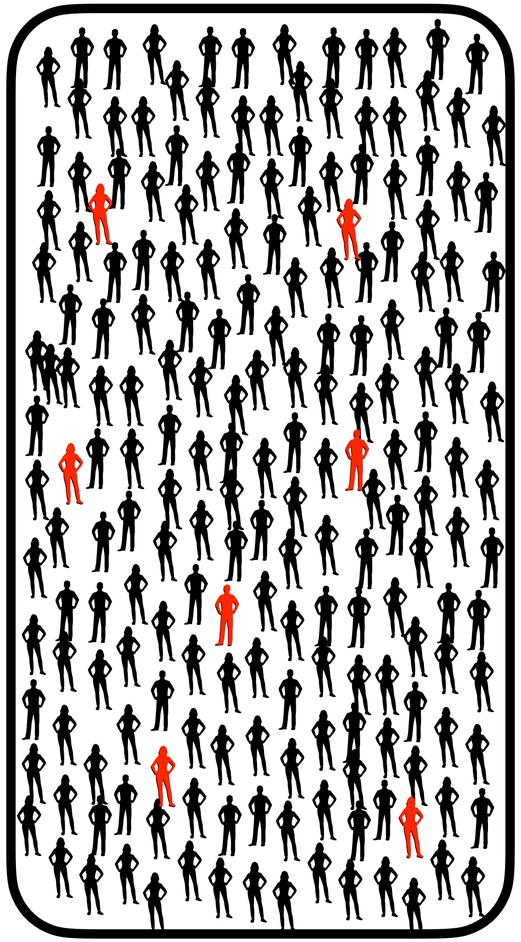
Aufgabenstellung



Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß,

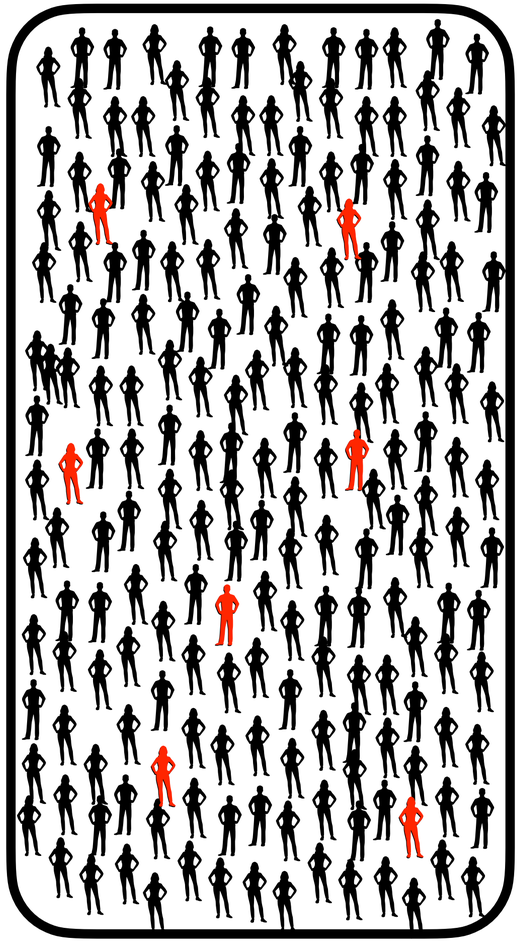
Aufgabenstellung



Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)

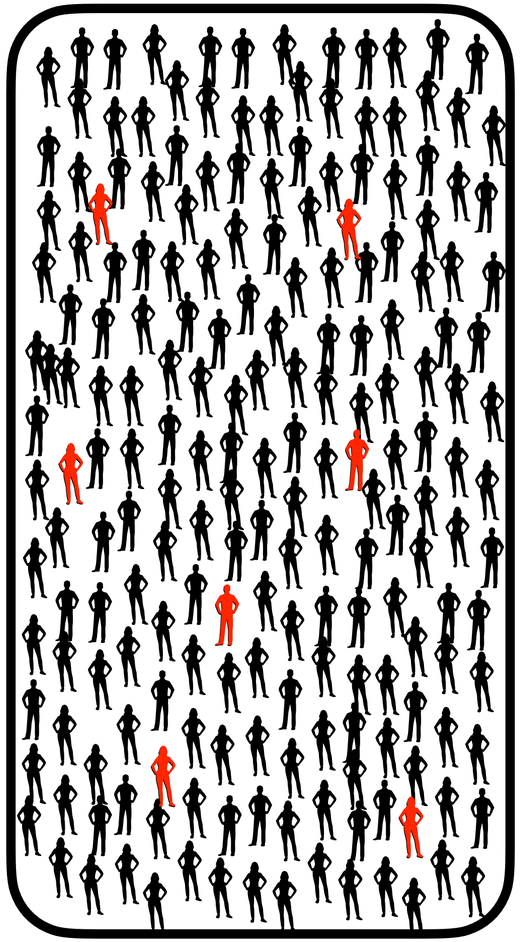
Aufgabenstellung



Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert

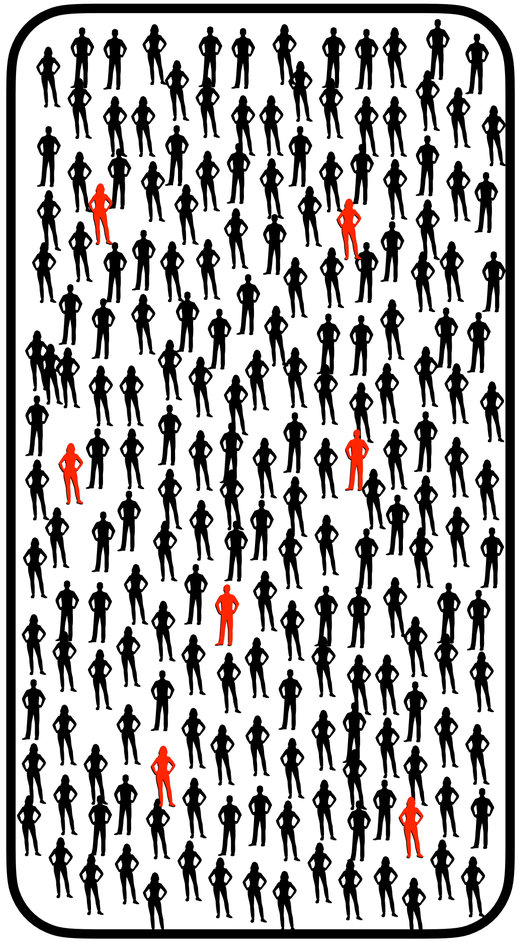
Aufgabenstellung



Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert
- Abspeicherung der Datensätze in einem Array T mit Indizes $\{0, 1, \ldots, m-1\}$: Hashtabelle

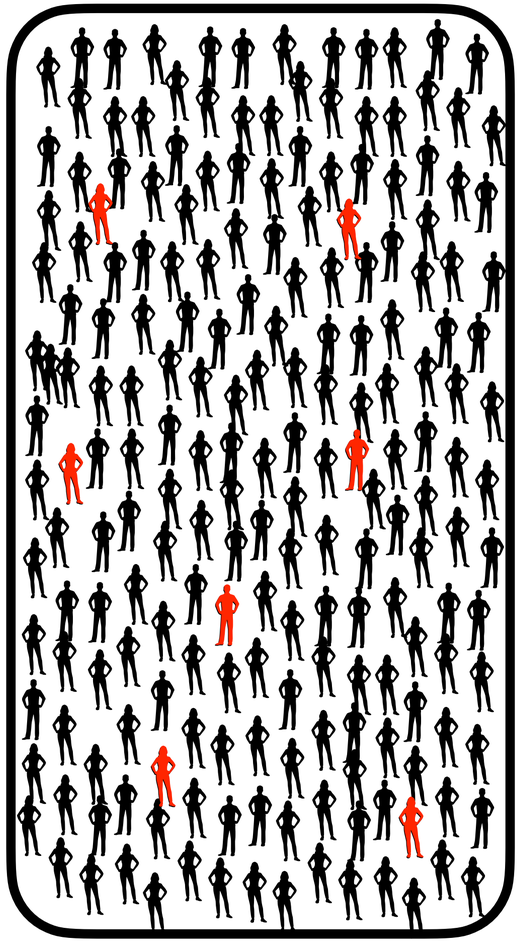
Aufgabenstellung



Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert
- Abspeicherung der Datensätze in einem Array T mit Indizes $\{0, 1, \ldots, m-1\}$: Hashtabelle

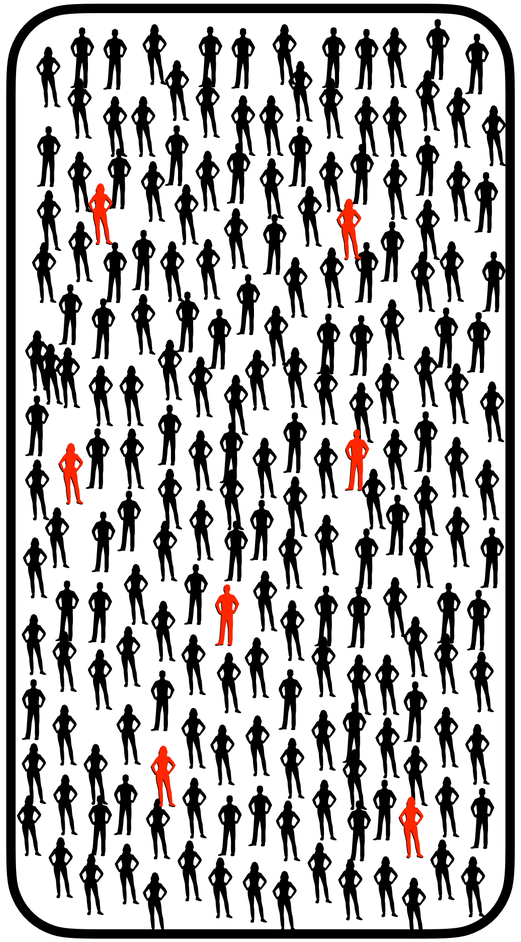
Aufgabenstellung



Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert
- Abspeicherung der Datensätze in einem Array T mit Indizes $\{0, 1, \ldots, m-1\}$: Hashtabelle

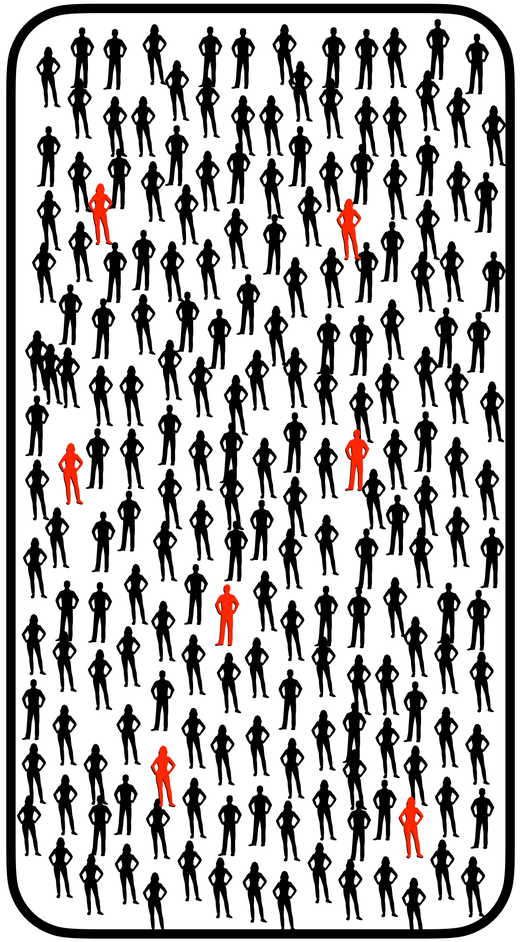
Aufgabenstellung

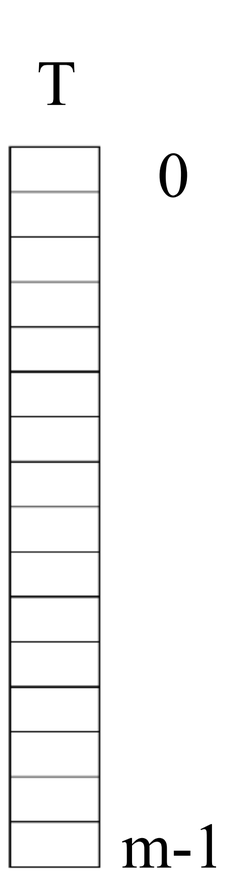


Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert
- Abspeicherung der Datensätze in einem Array T mit Indizes $\{0, 1, \ldots, m-1\}$: Hashtabelle

Aufgabenstellung

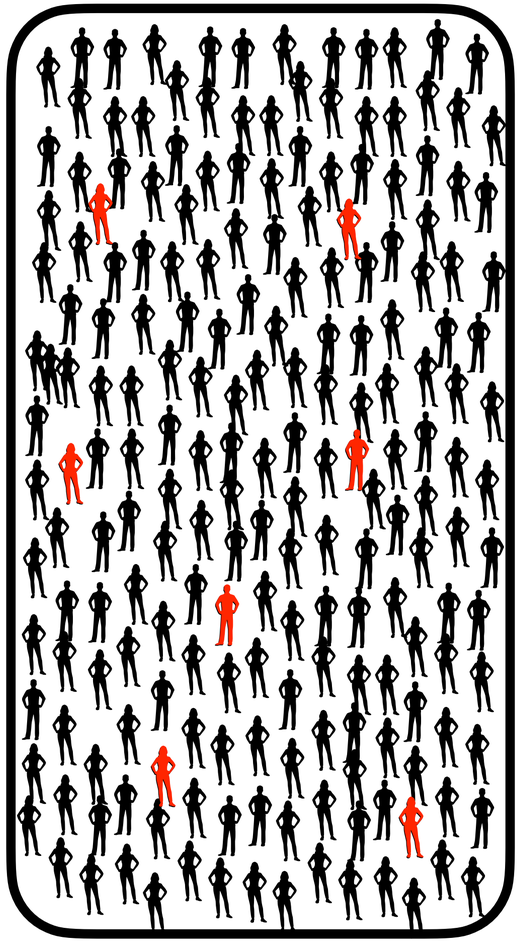


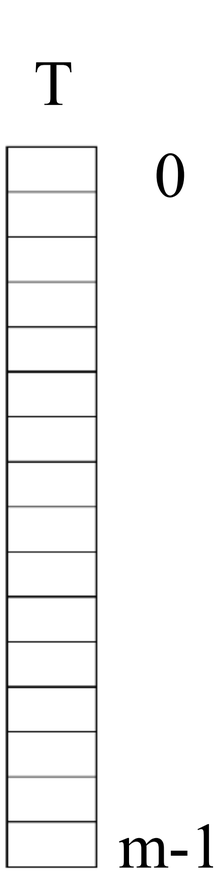


Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert
- Abspeicherung der Datensätze in einem Array T mit Indizes $\{0, 1, \ldots, m-1\}$: Hashtabelle

Aufgabenstellung

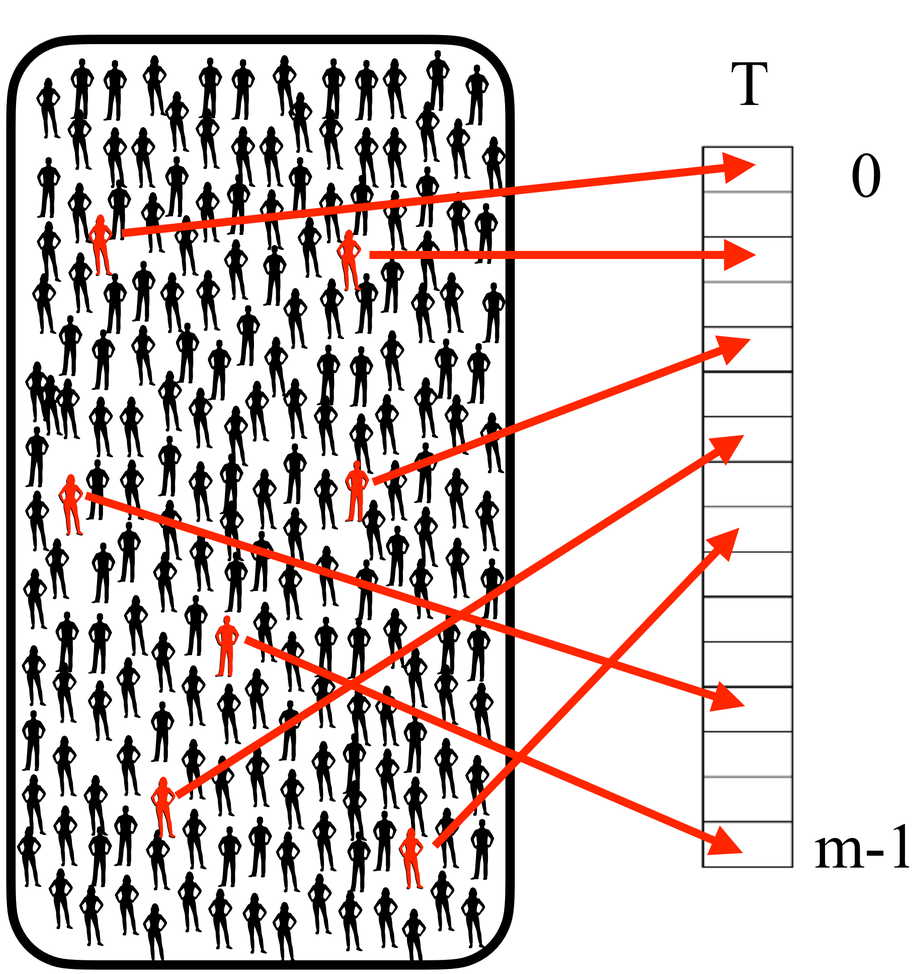




Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert
- Abspeicherung der Datensätze in einem Array T mit Indizes $\{0, 1, \ldots, m-1\}$: Hashtabelle
- Hashfunktion h liefert für jeden Schlüssel $x \in U$ eine Adresse in Hashtabelle, d.h. $h : U \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

Aufgabenstellung



Hashing

- Menge U potentieller Schlüssel sehr groß, aktuelle Schlüsselmenge S jeweils nur kleine Teilmenge des Universums (im allgemeinen S nicht bekannt)
- Idee: durch Berechnung feststellen, wo Datensatz mit Schlüssel x gespeichert
- Abspeicherung der Datensätze in einem Array T mit Indizes $\{0, 1, \ldots, m-1\}$: Hashtabelle
- Hashfunktion h liefert für jeden Schlüssel $x \in U$ eine Adresse in Hashtabelle, d.h. $h : U \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

7.2 Aufgabenstellung

Aufgabenstellung

Aufgabenstellung

Aufgabe

Dynamische Verwaltung von Daten, wobei jeder Datensatz eindeutig durch einen Schlüssel charakterisiert ist

Aufgabenstellung

Aufgabe

Dynamische Verwaltung von Daten, wobei jeder Datensatz eindeutig durch einen Schlüssel charakterisiert ist

Viele Anwendungen benötigen nur einfache Daten-Zugriffsmechanismen (dictionary operations):

Aufgabenstellung

Aufgabe

Dynamische Verwaltung von Daten, wobei jeder Datensatz eindeutig durch einen Schlüssel charakterisiert ist

Viele Anwendungen benötigen nur einfache Daten-Zugriffsmechanismen (dictionary operations):

- Suche nach Datensatz bei gegebenem Schlüssel x
  search(x)

Aufgabenstellung

Aufgabe

Dynamische Verwaltung von Daten, wobei jeder Datensatz eindeutig durch einen Schlüssel charakterisiert ist

Viele Anwendungen benötigen nur einfache Daten-Zugriffsmechanismen (dictionary operations):

- Suche nach Datensatz bei gegebenem Schlüssel x
  search(x)
- Einfügen eines neuen Datensatzes d mit Schlüssel x
  insert(x, d) (abgekürzt insert(x))

Aufgabenstellung

Aufgabe

Dynamische Verwaltung von Daten, wobei jeder Datensatz eindeutig durch einen Schlüssel charakterisiert ist

Viele Anwendungen benötigen nur einfache Daten-Zugriffsmechanismen (dictionary operations):

- Suche nach Datensatz bei gegebenem Schlüssel x
  search(x)
- Einfügen eines neuen Datensatzes d mit Schlüssel x
  insert(x, d) (abgekürzt insert(x))
- Entfernen eines Datensatzes bei gegebenem Schlüssel x
  delete(x)

Aufgabenstellung

Aufgabe

Dynamische Verwaltung von Daten, wobei jeder Datensatz eindeutig durch einen Schlüssel charakterisiert ist

Viele Anwendungen benötigen nur einfache Daten-Zugriffsmechanismen (dictionary operations):

- Suche nach Datensatz bei gegebenem Schlüssel x
  search(x)
- Einfügen eines neuen Datensatzes d mit Schlüssel x
  insert(x, d) (abgekürzt insert(x))
- Entfernen eines Datensatzes bei gegebenem Schlüssel x
  delete(x)

Menge potentieller Schlüssel (Universum) kann sehr groß sein!

Alternativen

Alternativen

Sei $n := |S|$.

Alternativen

Sei $n := |S|$.

- Balancierte Suchbäume (AVL-Bäume, B-Bäume): dictionary operations haben Komplexität $O(\log n)$

Alternativen

Sei $n := |S|$.

- Balancierte Suchbäume (AVL-Bäume, B-Bäume):
  dictionary operations haben Komplexität $O(\log n)$
- Hashing:
  für alle Operationen mittlere Komplexität $O(1)$

Alternativen

Sei $n := |S|$.

- Balancierte Suchbäume (AVL-Bäume, B-Bäume): dictionary operations haben Komplexität $O(\log n)$
- Hashing: für alle Operationen mittlere Komplexität $O(1)$

Belegungsfaktor

Quotient $\beta := n/m$ heißt Belegungsfaktor oder Auslastungsfaktor einer Hashtabelle der Größe m.

Alternativen

Sei $n := |S|$.

- Balancierte Suchbäume (AVL-Bäume, B-Bäume): dictionary operations haben Komplexität $O(\log n)$
- Hashing: für alle Operationen mittlere Komplexität $O(1)$

Belegungsfaktor

Quotient $\beta := n/m$ heißt Belegungsfaktor oder Auslastungsfaktor einer Hashtabelle der Größe m.

Mittlerer Aufwand für dictionary operations als Funktion in β

Alternativen

Sei $n := |S|$.

- Balancierte Suchbäume (AVL-Bäume, B-Bäume): dictionary operations haben Komplexität $O(\log n)$
- Hashing: für alle Operationen mittlere Komplexität $O(1)$

Belegungsfaktor

Quotient $\beta := n/m$ heißt Belegungsfaktor oder Auslastungsfaktor einer Hashtabelle der Größe m.

Mittlerer Aufwand für dictionary operations als Funktion in β abschätzbar

$\rightarrow$ Anzahl aktueller Schlüssel geht nur indirekt in Aufwand ein

Herausforderungen

Herausforderungen

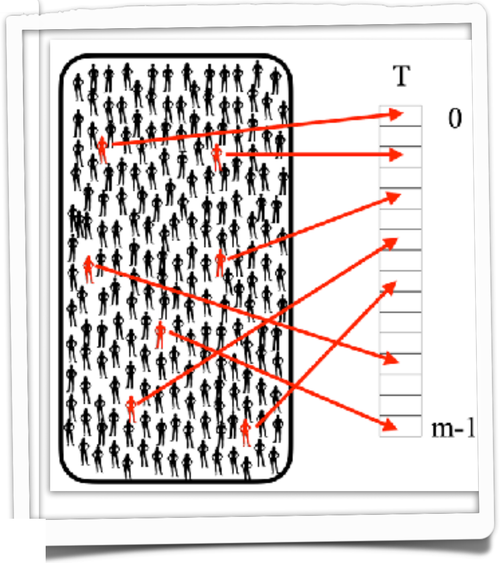
Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also

$|U| >> m$

Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also

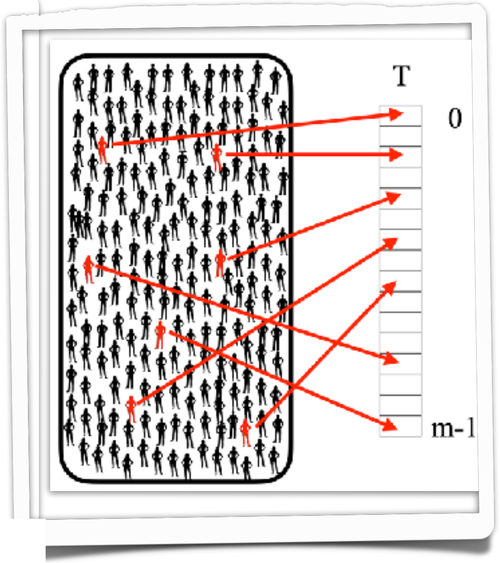
$|U| >> m$



Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also $|U| >> m$

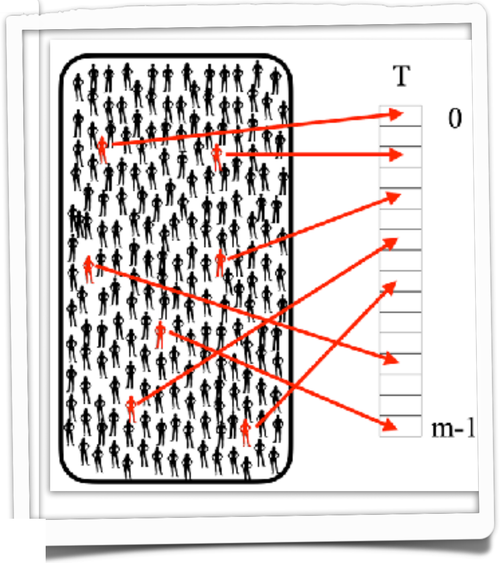
- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.



Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also $|U| >> m$

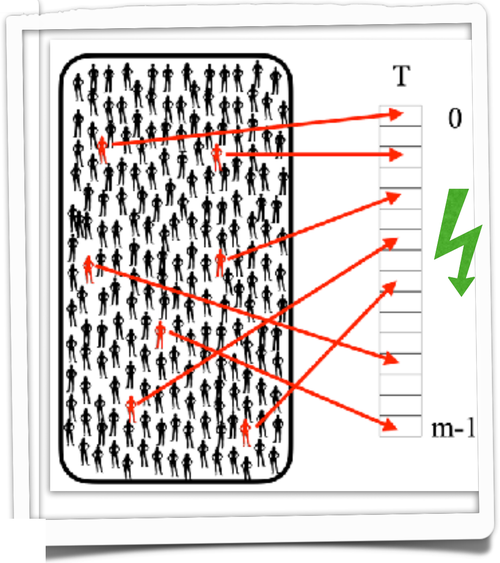
- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge
  $\rightarrow$ Adresskollision



Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also $|U| >> m$

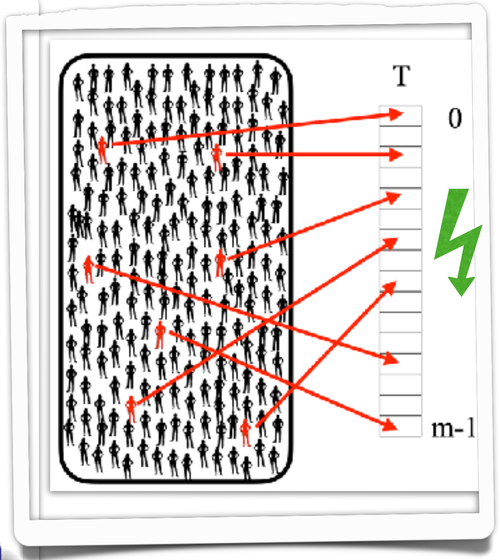
- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge
  $\rightarrow$ Adresskollision



Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also $|U| >> m$

- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge
  $\rightarrow$ Adresskollision

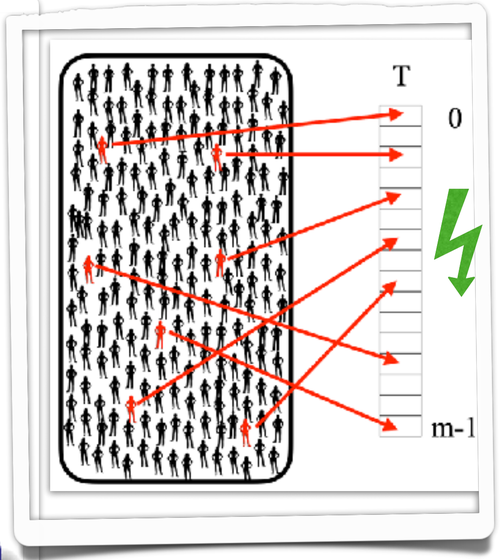


Hashverfahren gegeben durch:

Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also $|U| >> m$

- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge
  $\rightarrow$ Adresskollision



Hashverfahren gegeben durch:

1. eine Hashtabelle,

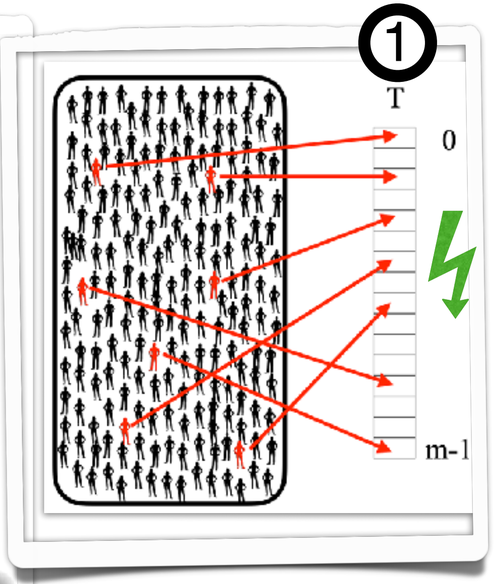
Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also $|U| >> m$

- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge
  $\rightarrow$ Adresskollision

Hashverfahren gegeben durch:

1. eine Hashtabelle,



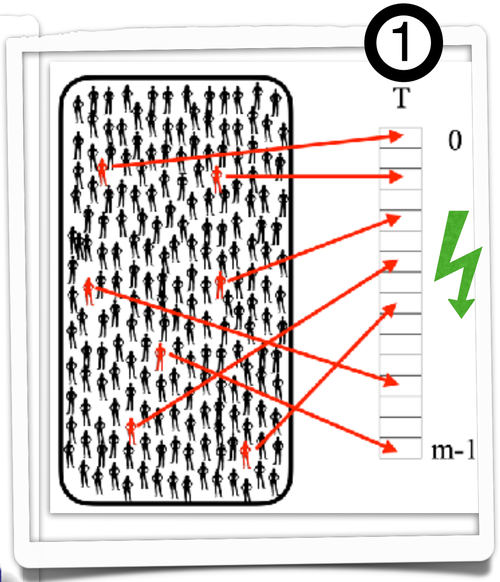
Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also $|U| >> m$

- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge
  $\rightarrow$ Adresskollision

Hashverfahren gegeben durch:

1. eine Hashtabelle,
2. eine Hashfunktion, die Universum der möglichen Schlüssel auf Adressen einer Hashtabelle abbildet,



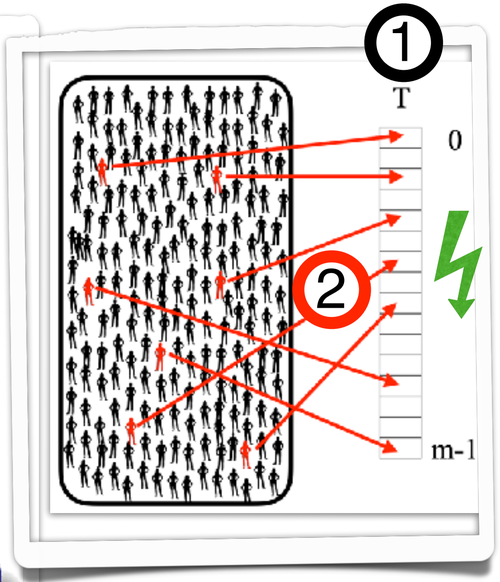
Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also $|U| >> m$

- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge
  $\rightarrow$ Adresskollision

Hashverfahren gegeben durch:

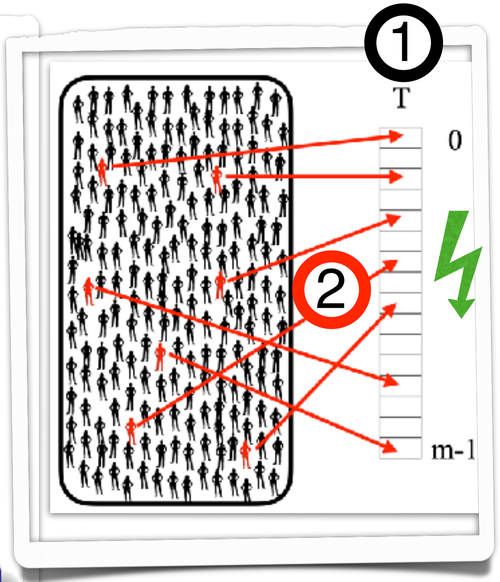
1. eine Hashtabelle,
2. eine Hashfunktion, die Universum der möglichen Schlüssel auf Adressen einer Hashtabelle abbildet,



Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also $|U| >> m$

- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge
  $\rightarrow$ Adresskollision



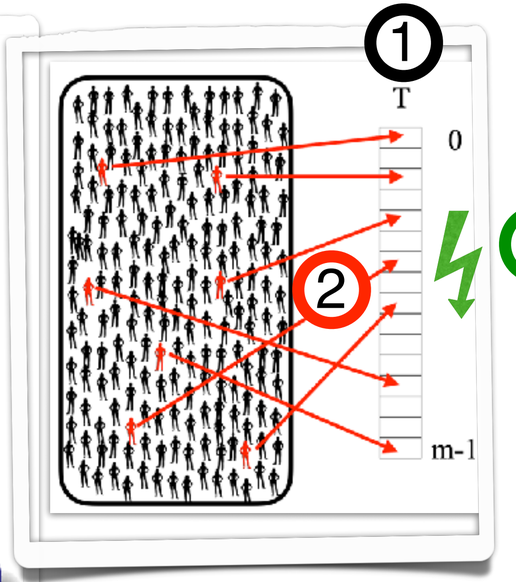
Hashverfahren gegeben durch:

1. eine Hashtabelle,
2. eine Hashfunktion, die Universum der möglichen Schlüssel auf Adressen einer Hashtabelle abbildet,
3. eine Strategie zur Auflösung möglicher Adresskollisionen.

Herausforderungen

Anzahl möglicher Schlüssel viel größer als Hashtabelle, also $|U| >> m$

- Hashfunktion muss verschiedene Schlüssel x_1 und x_2 auf gleiche Adresse abbilden.
- x_1 und x_2 beide in aktueller Schlüsselmenge
  $\rightarrow$ Adresskollision



Hashverfahren gegeben durch:

1. eine Hashtabelle,
2. eine Hashfunktion, die Universum der möglichen Schlüssel auf Adressen einer Hashtabelle abbildet,
3. eine Strategie zur Auflösung möglicher Adresskollisionen.

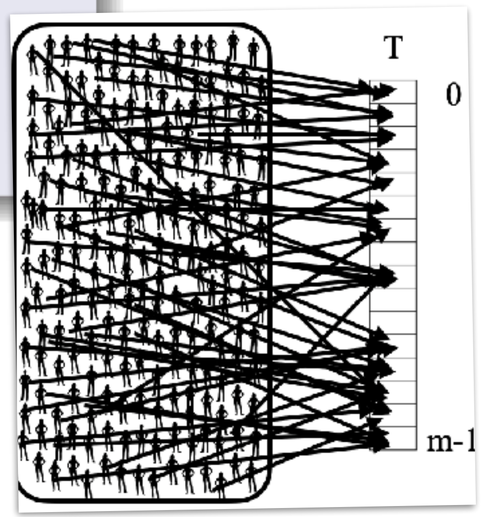
Anforderungen

Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

Anforderungen

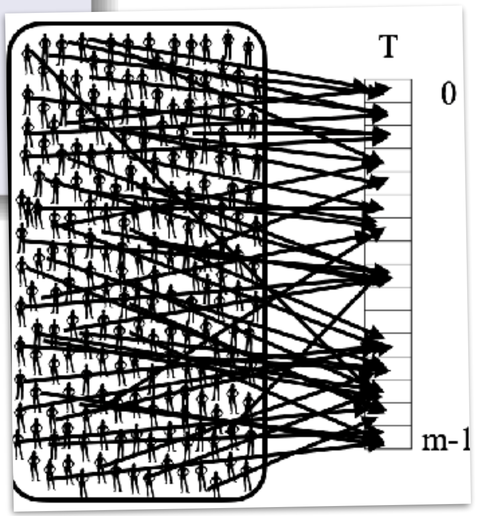
Gute Hashfunktionen sollten:



Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

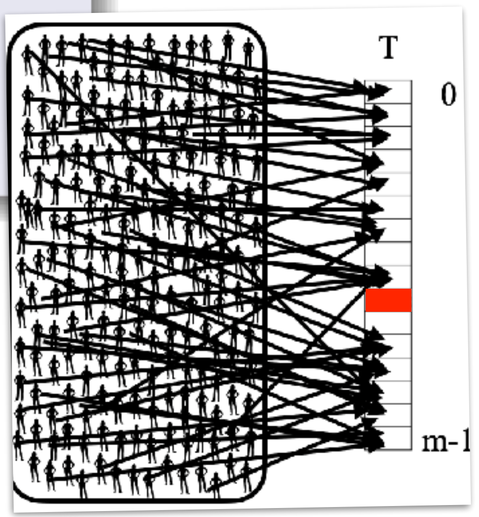
- surjektiv sein, d.h. den ganzen Wertebereich umfassen,



Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

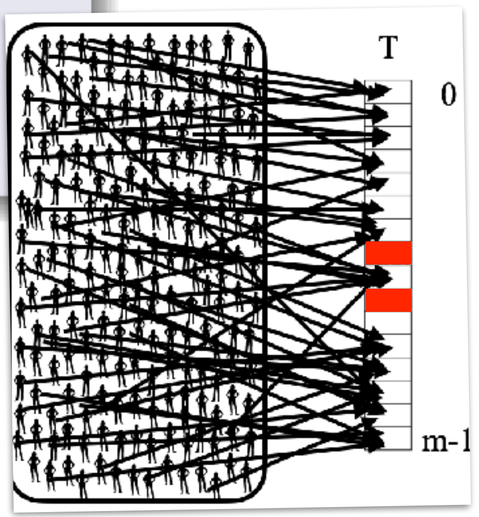
- surjektiv sein, d.h. den ganzen Wertebereich umfassen,



Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

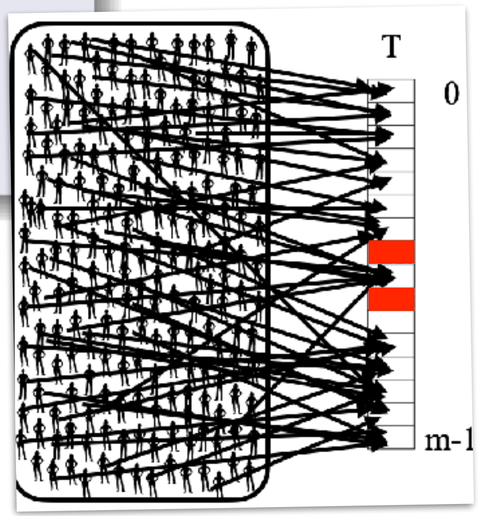
- surjektiv sein, d.h. den ganzen Wertebereich umfassen,



Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

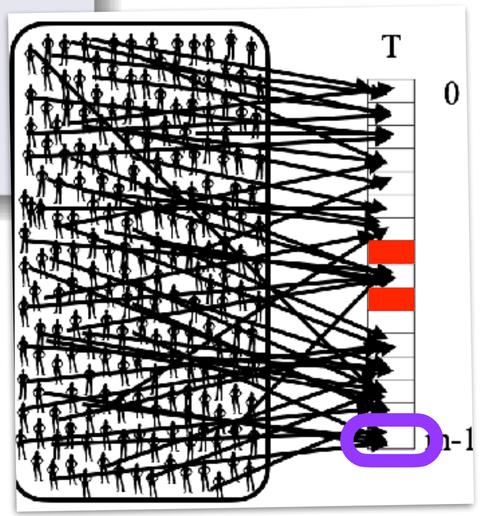
- surjektiv sein, d.h. den ganzen Wertebereich umfassen,
- die zu speichernden Schlüssel (möglichst) gleichmäßig verteilen, d.h. für alle Speicherplätze i und j sollte gelten $|h^{-1}(i)| \approx |h^{-1}(j)|$,



Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

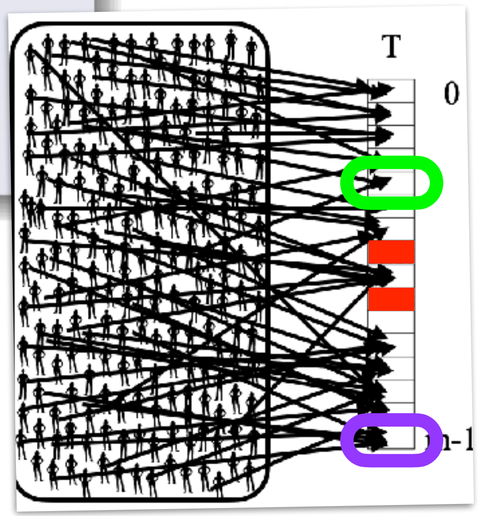
- surjektiv sein, d.h. den ganzen Wertebereich umfassen,
- die zu speichernden Schlüssel (möglichst) gleichmäßig verteilen, d.h. für alle Speicherplätze i und j sollte gelten $|h^{-1}(i)| \approx |h^{-1}(j)|$,



Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

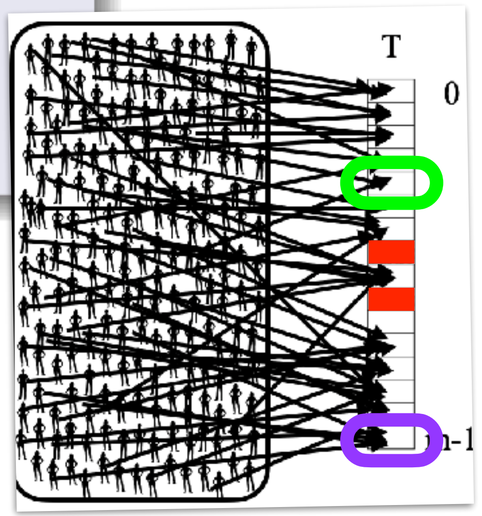
- surjektiv sein, d.h. den ganzen Wertebereich umfassen,
- die zu speichernden Schlüssel (möglichst) gleichmäßig verteilen, d.h. für alle Speicherplätze i und j sollte gelten $|h^{-1}(i)| \approx |h^{-1}(j)|$,



Anforderungen

Gute Hashfunktionen sollten:

- surjektiv sein, d.h. den ganzen Wertebereich umfassen,
- die zu speichernden Schlüssel (möglichst) gleichmäßig verteilen, d.h. für alle Speicherplätze i und j sollte gelten $|h^{-1}(i)| \approx |h^{-1}(j)|$,
- effizient berechenbar sein.



7.3 Hashfunktionen

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte: $h(49) = \quad 5$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte: $h(49) = 5$

$h(22) = 0$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte: $h(49) = 5$

$h(22) = 0$

$h(6) = 6$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte: $h(49) = 5$
$h(22) = 0$
$h(6) = 6$
$h(52) = 8$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte:

$h(49) = 5$
$h(22) = 0$
$h(6) = 6$
$h(52) = 8$
$h(76) = 10$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte:

$h(49) = 5$
$h(22) = 0$
$h(6) = 6$
$h(52) = 8$
$h(76) = 10$
$h(34) = 1$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte:

$h(49) = 5$
$h(22) = 0$
$h(6) = 6$
$h(52) = 8$
$h(76) = 10$
$h(34) = 1$
$h(13) = 2$

Divisions-Rest-Methode

Divisions-Rest-Methode

$$h(x) = x \bmod m := x - \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \cdot m$$

Beispiel: m=11, S={49, 22, 6, 52, 76, 34, 13, 29}

Hashwerte:

$h(49) = 5$
$h(22) = 0$
$h(6) = 6$
$h(52) = 8$
$h(76) = 10$
$h(34) = 1$
$h(13) = 2$
$h(29) = 7$

Wahl von *m*

Wahl von *m*

Wahl von *m*

Problem: Daten oft nicht gleichverteilt!

Wahl von *m*

Problem: Daten oft nicht gleichverteilt!

Beispiel: Texte in Zahlen übertragen, oft viele Leerzeichen, bestimmte Wörter häufiger etc.

Wahl von m

Problem: Daten oft nicht gleichverteilt!

Beispiel: Texte in Zahlen übertragen, oft viele Leerzeichen, bestimmte Wörter häufiger etc.

Wichtig: geeignete Wahl von m

Wahl von m

Problem: Daten oft nicht gleichverteilt!

Beispiel: Texte in Zahlen übertragen, oft viele Leerzeichen, bestimmte Wörter häufiger etc.

Wichtig: geeignete Wahl von m

- m Zweierpotenz: x mod m wählt nur die letzten $\log m$ Bits

Wahl von m

Problem: Daten oft nicht gleichverteilt!

Beispiel: Texte in Zahlen übertragen, oft viele Leerzeichen, bestimmte Wörter häufiger etc.

Wichtig: geeignete Wahl von m

- m Zweierpotenz: x mod m wählt nur die letzten $\log m$ Bits
- m Primzahl: x mod m *beeinflusst* alle Bits

7.4 Kollisionen

Auftreten von Kollisionen

Auftreten von Kollisionen

Zur Erinnerung:

Auftreten von Kollisionen

Zur Erinnerung:

Im Allgemeinen unvermeidbar, dass Kollisionen auftreten, denn aus $N >> m$ folgt Existenz eines Speicherplatzes i mit $|h^{-1}(i)| \geq N/m$.

Auftreten von Kollisionen

Zur Erinnerung:

Im Allgemeinen unvermeidbar, dass Kollisionen auftreten, denn aus $N >> m$ folgt Existenz eines Speicherplatzes i mit $|h^{-1}(i)| \geq N/m$.

Frage:

Sei $n := |S|$. Wie wahrscheinlich sind Kollisionen bei $n << m$?

Auftreten von Kollisionen

Zur Erinnerung:

Im Allgemeinen unvermeidbar, dass Kollisionen auftreten, denn aus $N >> m$ folgt Existenz eines Speicherplatzes i mit $|h^{-1}(i)| \geq N/m$.

Frage:

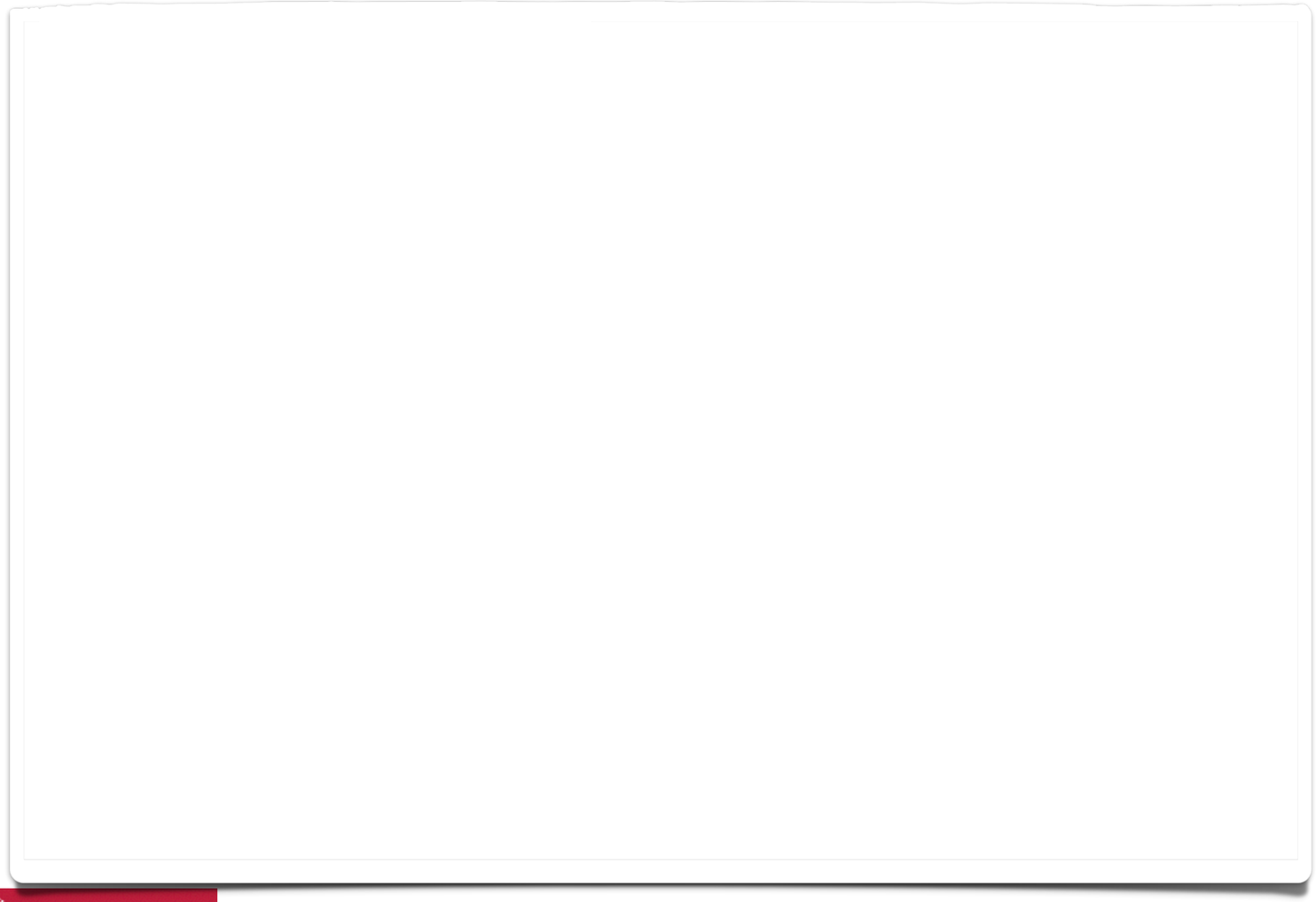
Sei $n := |S|$. Wie wahrscheinlich sind Kollisionen bei $n << m$?

Geburtstagsparadoxon

Bei wie vielen (zufällig gewählten) Personen ist es *wahrscheinlich*, dass hiervon zwei am selben Datum (Tag und Monat) Geburtstag haben?

Geburtstagsparadoxon

Geburtstagsparadoxon



Geburtstagsparadoxon

Annahme:

Geburtstagsparadoxon

Annahme:

- Daten unabhängig

Geburtstagsparadoxon

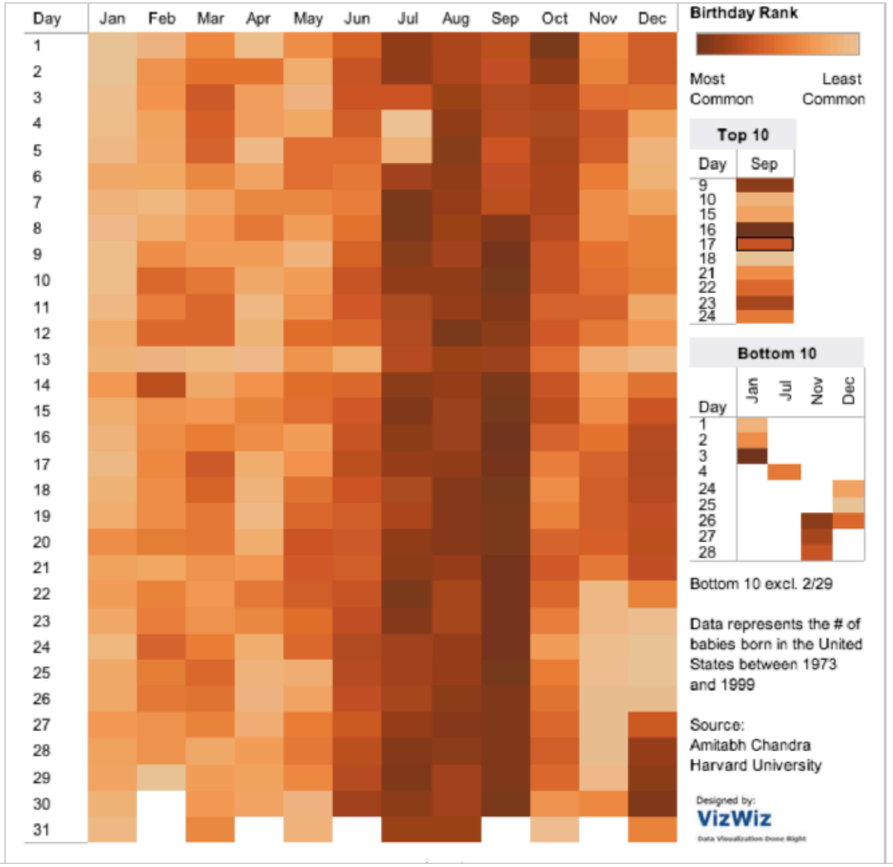
Annahme:

- Daten unabhängig
- Prob($h(x) = j$)=$1/m$

Geburtstagsparadoxon

Annahme:

- Daten unabhängig
- Prob$(h(x) = j)$=$1/m$



Geburtstagsparadoxon

Annahme:

- Daten unabhängig
- Prob($h(x) = j$)=$1/m$

Geburtstagsparadoxon

Annahme:

- Daten unabhängig
- Prob($h(x) = j$)=$1/m$

Prob(i-tes Datum kollidiert nicht mit den ersten $i-1$ Daten, wenn diese kollisionsfrei sind)= $\frac{m-(i-1)}{m}$

Geburtstagsparadoxon

Annahme:

- Daten unabhängig
- Prob($h(x) = j$)=$1/m$

Prob(i-tes Datum kollidiert nicht mit den ersten $i-1$ Daten, wenn diese kollisionsfrei sind)= $\frac{m-(i-1)}{m}$

Intuition:

Geburtstagsparadoxon

Annahme:

- Daten unabhängig
- Prob($h(x) = j$)=$1/m$

Prob(i-tes Datum kollidiert nicht mit den ersten $i-1$ Daten, wenn diese kollisionsfrei sind)= $\frac{m-(i-1)}{m}$

Intuition:

Egal welche Speicherplätze die ersten $i-1$ Daten belegen,

Geburtstagsparadoxon

Annahme:

- Daten unabhängig
- Prob($h(x) = j$)=$1/m$

Prob(i-tes Datum kollidiert nicht mit den ersten $i-1$ Daten, wenn diese kollisionsfrei sind)= $\frac{m-(i-1)}{m}$

Intuition:

Egal welche Speicherplätze die ersten $i-1$ Daten belegen,
$m-i+1$ der m Möglichkeiten sind *gut*.

Geburtstagsparadoxon

Annahme:

- Daten unabhängig
- Prob($h(x) = j$)=$1/m$

Prob(i-tes Datum kollidiert nicht mit den ersten $i-1$ Daten, wenn diese kollisionsfrei sind)= $\frac{m-(i-1)}{m}$

Intuition:

Egal welche Speicherplätze die ersten $i-1$ Daten belegen, $m-i+1$ der m Möglichkeiten sind *gut*.

Prob(n Daten kollisionsfrei) = $\frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \ldots \frac{m-n+1}{m}$

Geburtstagsparadoxon

Annahme:

- Daten unabhängig
- Prob($h(x) = j$)=$1/m$

Prob(i-tes Datum kollidiert nicht mit den ersten $i-1$ Daten, wenn diese kollisionsfrei sind)= $\frac{m-(i-1)}{m}$

Intuition:

Egal welche Speicherplätze die ersten $i-1$ Daten belegen, $m-i+1$ der m Möglichkeiten sind *gut*.

Prob(n Daten kollisionsfrei) = $\frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \ldots \frac{m-n+1}{m}$

Beispiel: $m = 365$

Geburtstagsparadoxon

Annahme:

- Daten unabhängig
- Prob($h(x) = j$)=$1/m$

Prob(i-tes Datum kollidiert nicht mit den ersten $i-1$ Daten, wenn diese kollisionsfrei sind)= $\frac{m-(i-1)}{m}$

Intuition:

Egal welche Speicherplätze die ersten $i-1$ Daten belegen, $m-i+1$ der m Möglichkeiten sind *gut*.

Prob(n Daten kollisionsfrei) = $\frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \ldots \frac{m-n+1}{m}$

Beispiel: $m = 365$

Prob(23 Daten kollisionsfrei) ≈ 0.49

Geburtstagsparadoxon

Annahme:

- Daten unabhängig
- Prob($h(x) = j$)=$1/m$

Prob(i-tes Datum kollidiert nicht mit den ersten $i-1$ Daten, wenn diese kollisionsfrei sind)= $\frac{m-(i-1)}{m}$

Intuition:

Egal welche Speicherplätze die ersten $i-1$ Daten belegen, $m-i+1$ der m Möglichkeiten sind *gut*.

Prob(n Daten kollisionsfrei) = $\frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \ldots \frac{m-n+1}{m}$

Beispiel: $m = 365$

Prob(23 Daten kollisionsfrei) ≈ 0.49

Prob(50 Daten kollisionsfrei) ≈ 0.03

Geburtstagsparadoxon

Annahme:

- Daten unabhängig
- Prob($h(x) = j$)=$1/m$

Prob(i-tes Datum kollidiert nicht mit den ersten $i-1$ Daten, wenn diese kollisionsfrei sind)= $\frac{m-(i-1)}{m}$

Intuition:

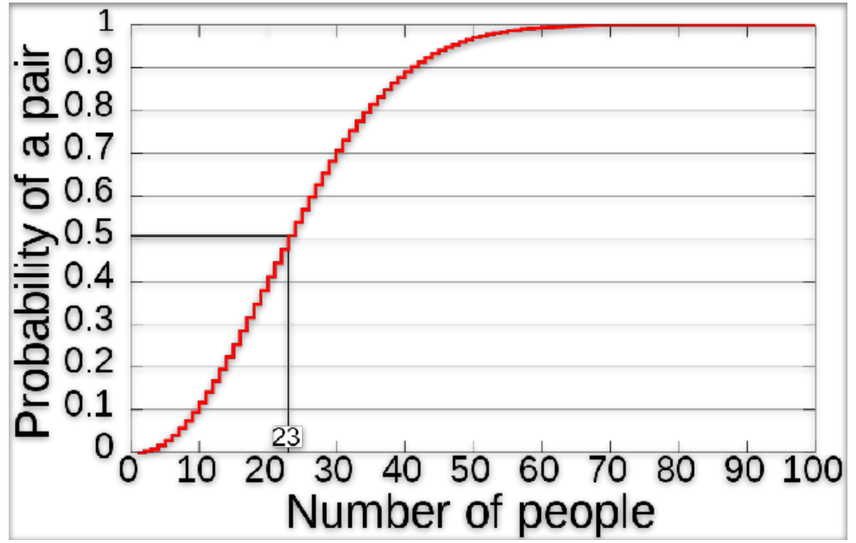
Egal welche Speicherplätze die ersten $i-1$ Daten belegen, $m-i+1$ der m Möglichkeiten sind *gut*.

Prob(n Daten kollisionsfrei) = $\frac{m-1}{m} \cdot \frac{m-2}{m} \ldots \frac{m-n+1}{m}$

Beispiel: $m = 365$

Prob(23 Daten kollisionsfrei) ≈ 0.49

Prob(50 Daten kollisionsfrei) ≈ 0.03



Geburtstagsparadoxon (verallgemeinert)

Geburtstagsparadoxon (verallgemeinert)

Prob($2m^{1/2}$ Daten kollisionsfrei) =

Geburtstagsparadoxon (verallgemeinert)

Prob($2m^{1/2}$ Daten kollisionsfrei) =

$$\frac{m-1}{m} \cdots \frac{m-m^{1/2}}{m} \cdots \frac{m-2m^{1/2}+1}{m}$$

Geburtstagsparadoxon (verallgemeinert)

Prob($2m^{1/2}$ Daten kollisionsfrei) =

$$\underbrace{\frac{m-1}{m} \cdots \frac{m-m^{1/2}}{m}}_{} \cdots \frac{m-2m^{1/2}+1}{m}$$

Geburtstagsparadoxon (verallgemeinert)

Prob($2m^{1/2}$ Daten kollisionsfrei) =

$$\underbrace{\frac{m-1}{m} \cdots \frac{m-m^{1/2}}{m} \cdots \frac{m-2m^{1/2}+1}{m}}$$

$$\leq \quad 1 \quad \cdot$$

Geburtstagsparadoxon (verallgemeinert)

Prob($2m^{1/2}$ Daten kollisionsfrei) =

$$\underbrace{\frac{m-1}{m}}\cdots\underbrace{\frac{m-m^{1/2}}{m}\cdots\frac{m-2m^{1/2}+1}{m}}$$

$$\leq \quad 1 \quad \cdot$$

Geburtstagsparadoxon (verallgemeinert)

Prob($2m^{1/2}$ Daten kollisionsfrei) =

$$\frac{m-1}{m} \cdots \underbrace{\frac{m-m^{1/2}}{m} \cdots \frac{m-2m^{1/2}+1}{m}}_{}$$

$$\leq \quad 1 \quad \cdot \quad \left(\frac{m-m^{1/2}}{m}\right)^{m^{1/2}} \quad ;$$

Geburtstagsparadoxon (verallgemeinert)

$$\text{Prob}(2m^{1/2} \text{ Daten kollisionsfrei}) =$$

$$\frac{m-1}{m} \cdots \underbrace{\frac{m-m^{1/2}}{m} \cdots \frac{m-2m^{1/2}+1}{m}}$$

$$\leq \quad 1 \quad \cdot \quad \left(\frac{m-m^{1/2}}{m}\right)^{m^{1/2}} \quad = \left(1-\frac{1}{m^{1/2}}\right)^{m^{1/2}}$$

Geburtstagsparadoxon (verallgemeinert)

$$\text{Prob}(2m^{1/2} \text{ Daten kollisionsfrei}) =$$

$$\underbrace{\frac{m-1}{m}}_{1} \cdots \underbrace{\frac{m-m^{1/2}}{m} \cdots \frac{m-2m^{1/2}+1}{m}}_{\left(\frac{m-m^{1/2}}{m}\right)^{m^{1/2}}}$$

$$\leq 1 \cdot \left(\frac{m-m^{1/2}}{m}\right)^{m^{1/2}} = \left(1-\frac{1}{m^{1/2}}\right)^{m^{1/2}} \approx \frac{1}{e}$$

Geburtstagsparadoxon (verallgemeinert)

Prob($2m^{1/2}$ Daten kollisionsfrei) =

$$\underbrace{\frac{m-1}{m}}_{1} \cdots \underbrace{\frac{m-m^{1/2}}{m} \cdots \frac{m-2m^{1/2}+1}{m}}_{\left(\frac{m-m^{1/2}}{m}\right)^{m^{1/2}}}$$

$$\leq \quad 1 \quad \cdot \quad \left(\frac{m-m^{1/2}}{m}\right)^{m^{1/2}} \quad = \left(1-\frac{1}{m^{1/2}}\right)^{m^{1/2}} \approx \frac{1}{e}$$

Hashing muss mit Kollisionen leben und benötigt Strategien zur Kollisionsbehandlung!

Kollisionbehandlung

Kollisionbehandlung

Kollisionbehandlung

Verschiedene Arten der Kollisionsbehandlung:

Kollisionbehandlung

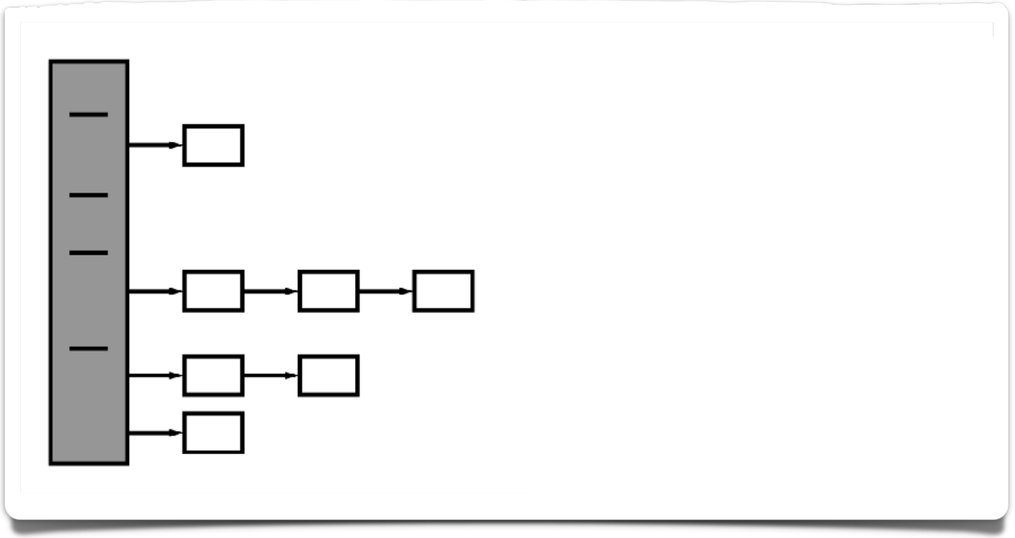
Verschiedene Arten der Kollisionsbehandlung:

- mittels verketteter Listen
  (links)

Kollisionbehandlung

Verschiedene Arten der Kollisionsbehandlung:

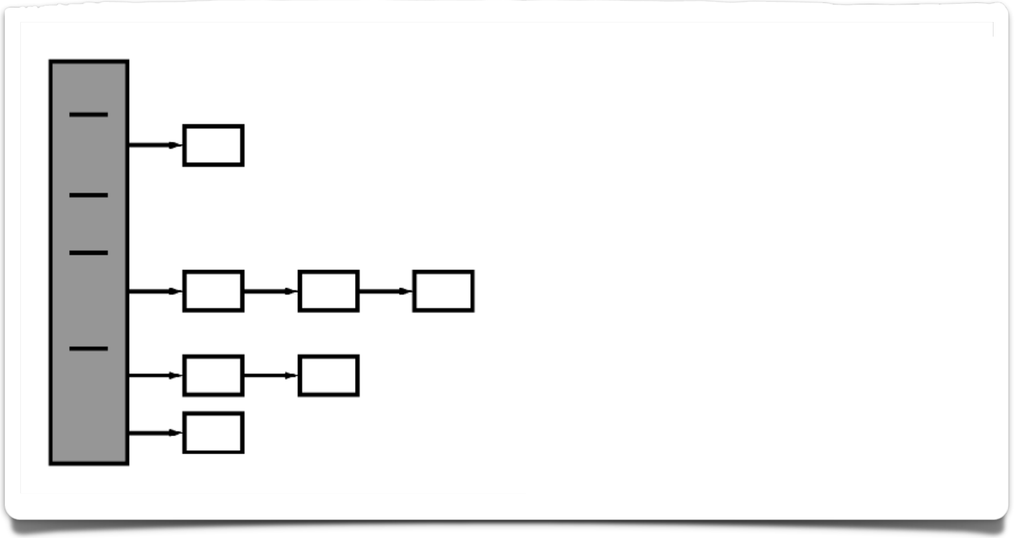
- mittels verketteter Listen (links)



Kollisionbehandlung

Verschiedene Arten der Kollisionsbehandlung:

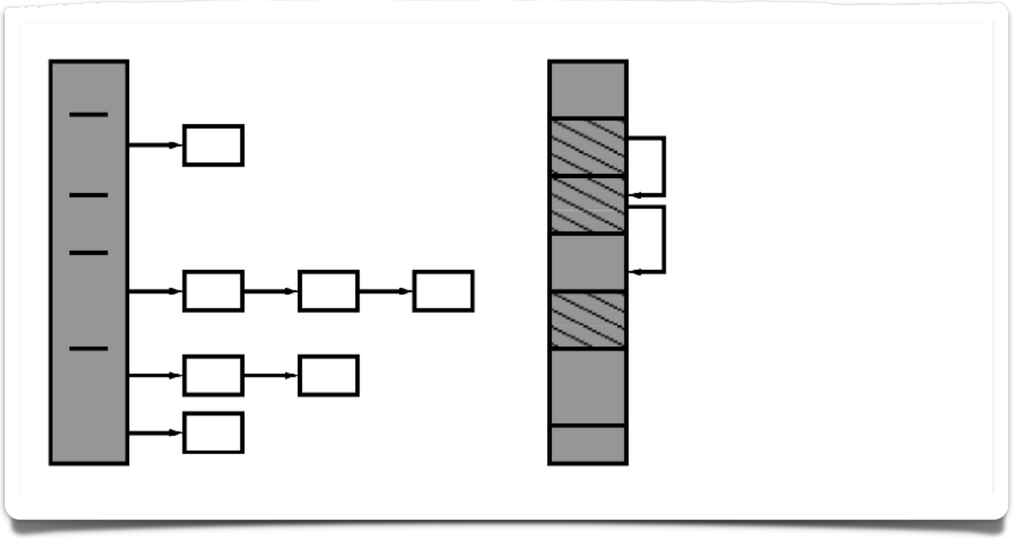
- mittels verketteter Listen (links)
- mittels offener Adressierung (rechts)



Kollisionbehandlung

Verschiedene Arten der Kollisionsbehandlung:

- mittels verketteter Listen (links)
- mittels offener Adressierung (rechts)



7.5 Verkettung von Überläufern

Verkettetung: Realisierung

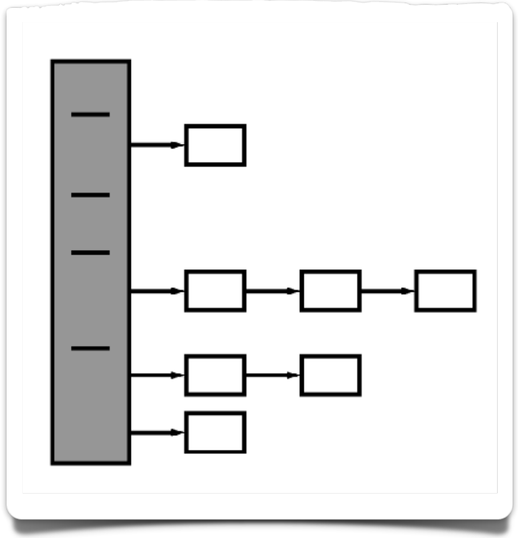
Verkettetung: Realisierung

Verkettetung: Realisierung

Realisierung:

Verkettetung: Realisierung

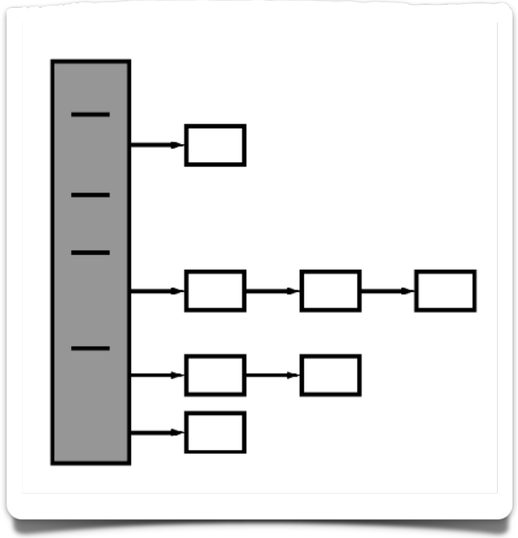
Realisierung:



Verkettetung: Realisierung

Realisierung:

Jede Komponente der Hashtabelle enthält Zeiger auf paarweise disjunkte lineare Listen. Die i-te Liste $L(i)$ enthält alle Schlüssel $x \in S$ mit $h(x) = i$.

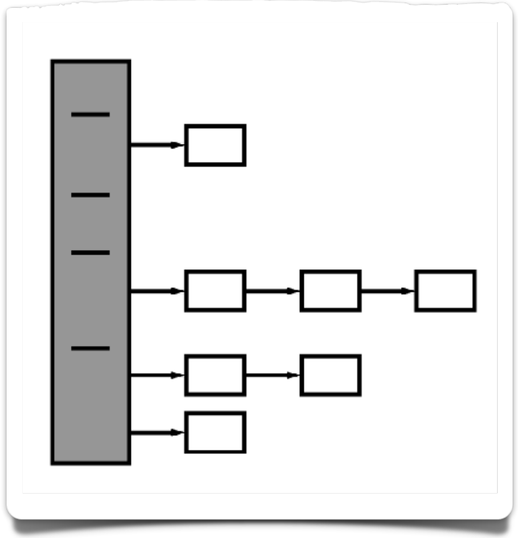


Verkettetung: Realisierung

Realisierung:

Jede Komponente der Hashtabelle enthält Zeiger auf paarweise disjunkte lineare Listen. Die i-te Liste $L(i)$ enthält alle Schlüssel $x \in S$ mit $h(x) = i$.

Vorteil: Alle Operationen werden unterstützt und $n > m$ ist möglich. (Für $n >> m$ jedoch Rehashing ratsam) Nachteil: Speicherplatzbedarf für Zeiger



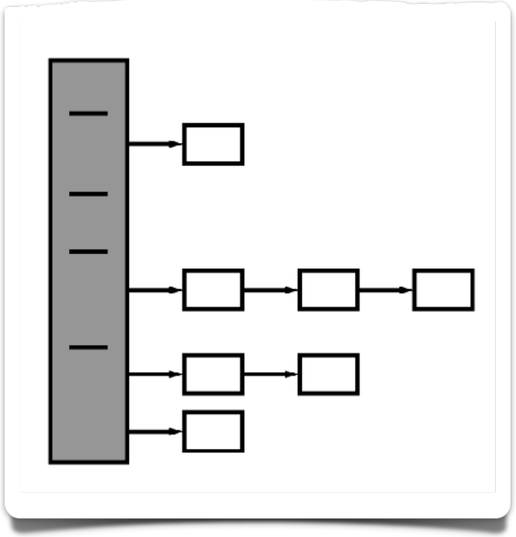
Verkettetung: Realisierung

Realisierung:

Jede Komponente der Hashtabelle enthält Zeiger auf paarweise disjunkte lineare Listen. Die i-te Liste $L(i)$ enthält alle Schlüssel $x \in S$ mit $h(x) = i$.

Vorteil: Alle Operationen werden unterstützt und $n > m$ ist möglich. (Für $n >> m$ jedoch Rehashing ratsam) Nachteil: Speicherplatzbedarf für Zeiger

- search(x): Berechne $h(x)$ und suche in Liste $L(h(x))$.



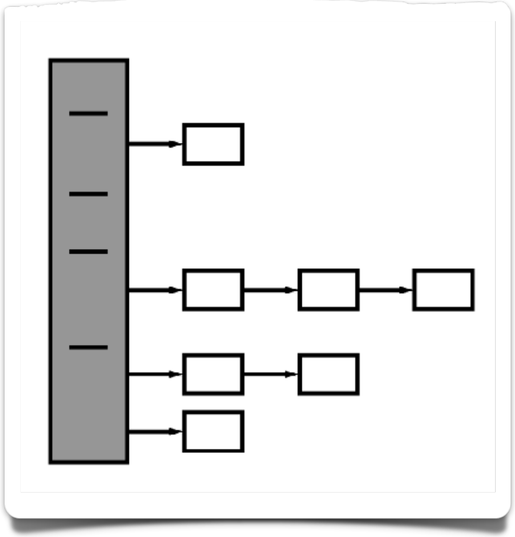
Verkettetung: Realisierung

Realisierung:

Jede Komponente der Hashtabelle enthält Zeiger auf paarweise disjunkte lineare Listen. Die i-te Liste $L(i)$ enthält alle Schlüssel $x \in S$ mit $h(x) = i$.

Vorteil: Alle Operationen werden unterstützt und $n > m$ ist möglich. (Für $n >> m$ jedoch Rehashing ratsam) Nachteil: Speicherplatzbedarf für Zeiger

- search(x): Berechne $h(x)$ und suche in Liste $L(h(x))$.
- insert(x) (nach erfolgloser Suche): Berechne $h(x)$ und füge x in Liste $L(h(x))$ ein.



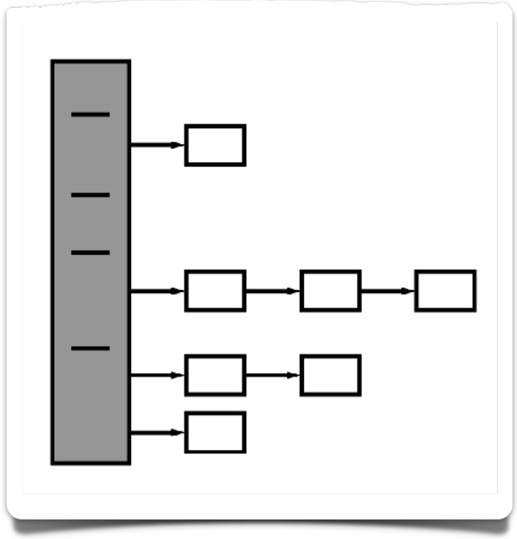
Verkettetung: Realisierung

Realisierung:

Jede Komponente der Hashtabelle enthält Zeiger auf paarweise disjunkte lineare Listen. Die i-te Liste $L(i)$ enthält alle Schlüssel $x \in S$ mit $h(x) = i$.

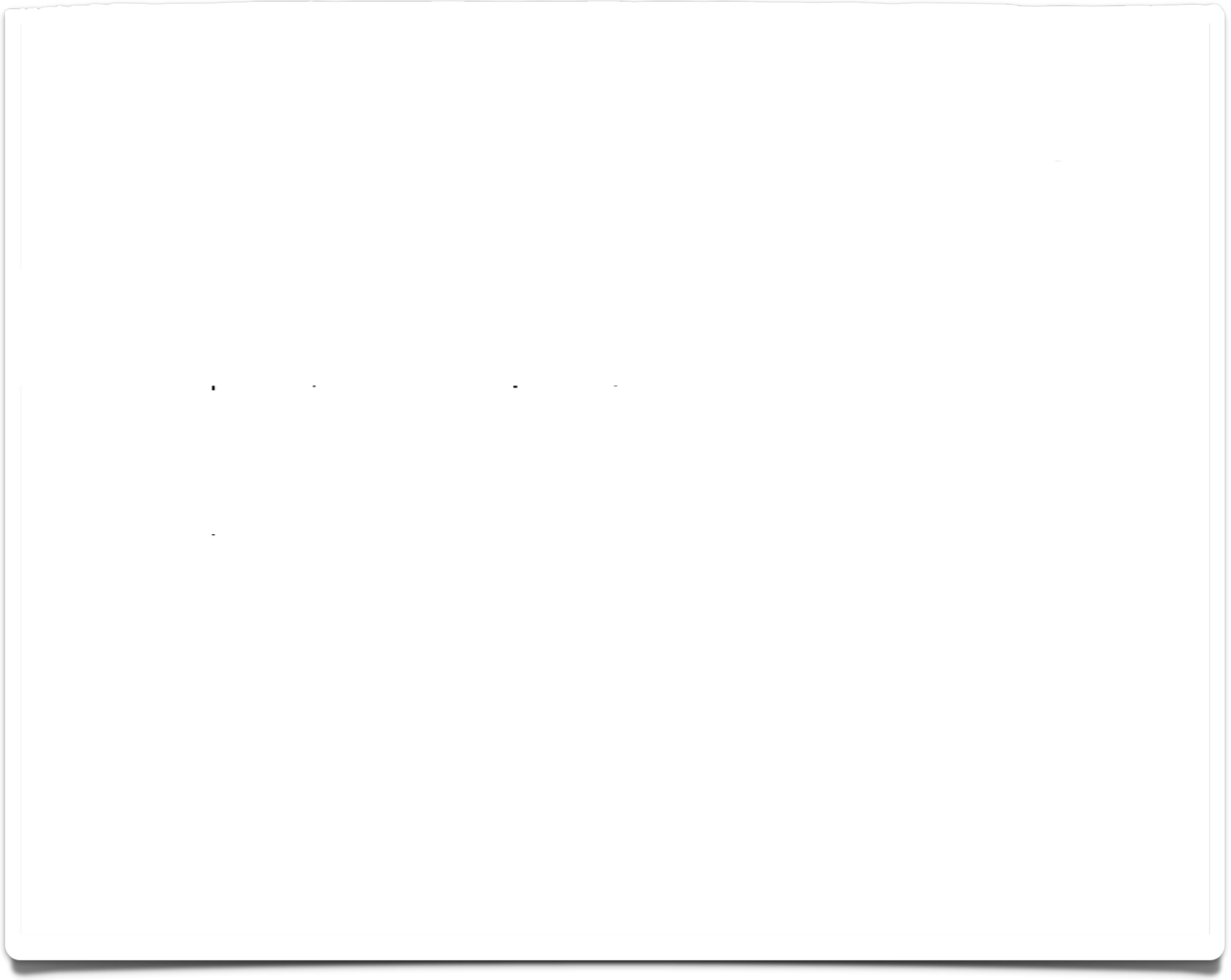
Vorteil: Alle Operationen werden unterstützt und $n > m$ ist möglich. (Für $n >> m$ jedoch Rehashing ratsam) Nachteil: Speicherplatzbedarf für Zeiger

- search(x): Berechne $h(x)$ und suche in Liste $L(h(x))$.
- insert(x) (nach erfolgloser Suche): Berechne $h(x)$ und füge x in Liste $L(h(x))$ ein.
- delete(x) (nach erfolgreicher Suche): Berechne $h(x)$, suche x in Liste $L(h(x))$ und entferne x.



Beispiel

Beispiel

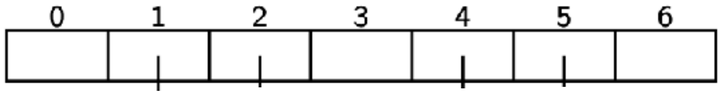


Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

Beispiel

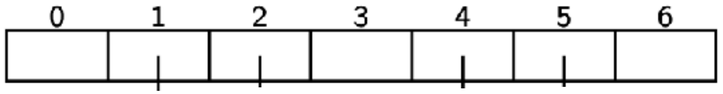
Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

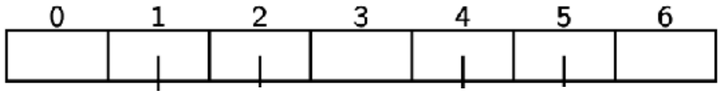
$S = \{$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

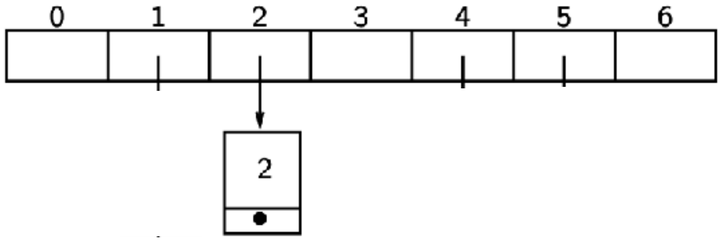
$S = \{2,$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

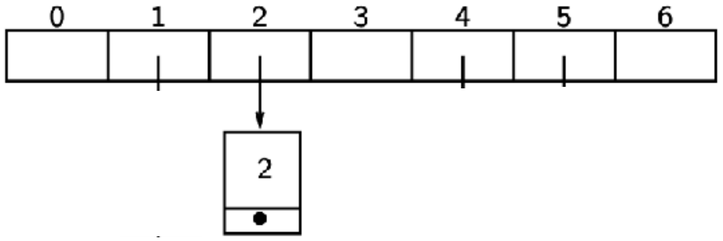
$S = \{2,$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

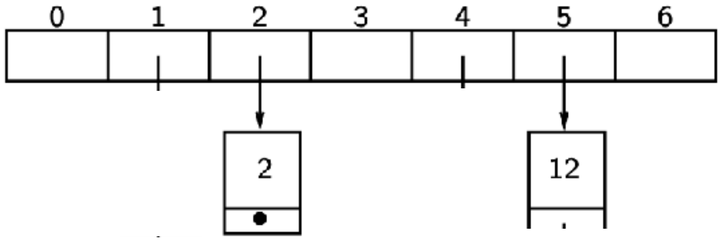
$S = \{2,12,$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

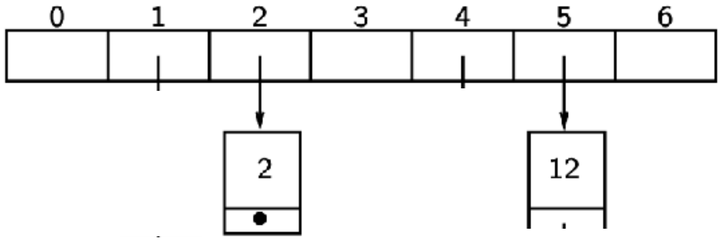
$S = \{2,12,$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

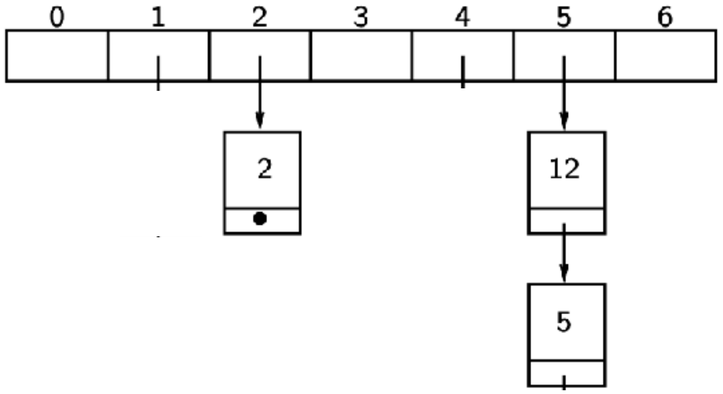
$S = \{2, 12, 5,$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

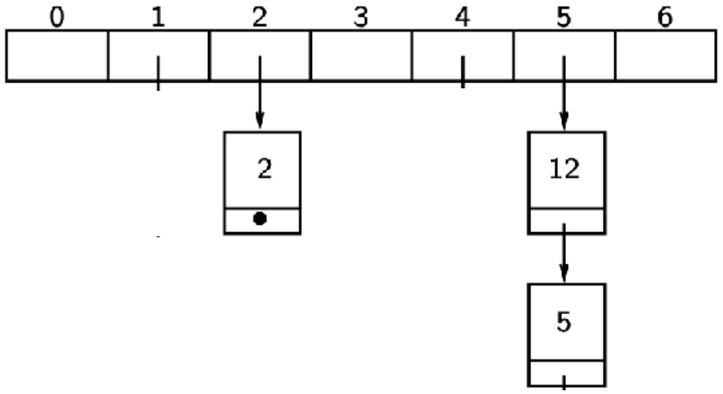
$S = \{2, 12, 5,$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

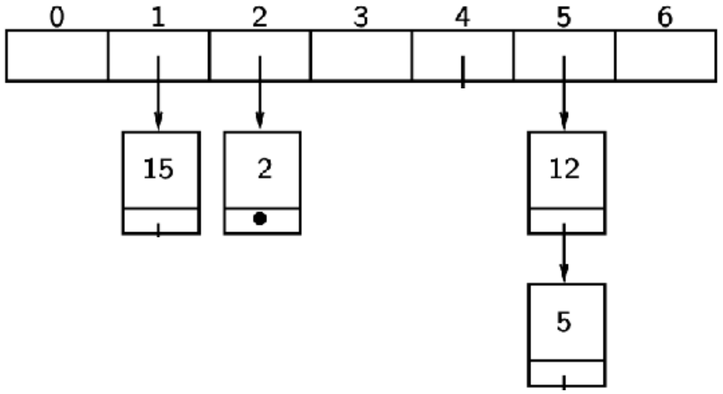
$S = \{2,12,5,15,$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

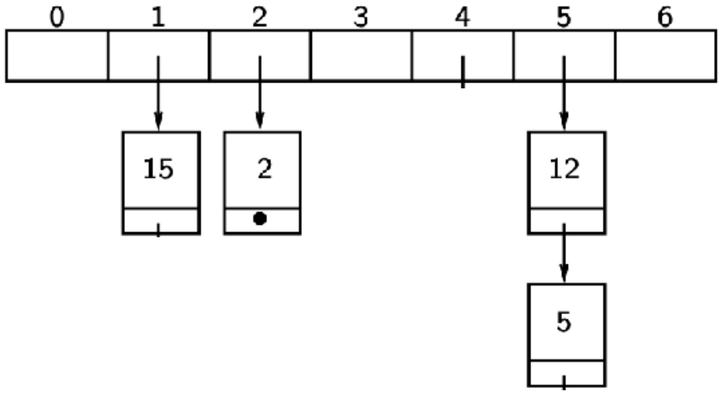
$S = \{2,12,5,15,$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

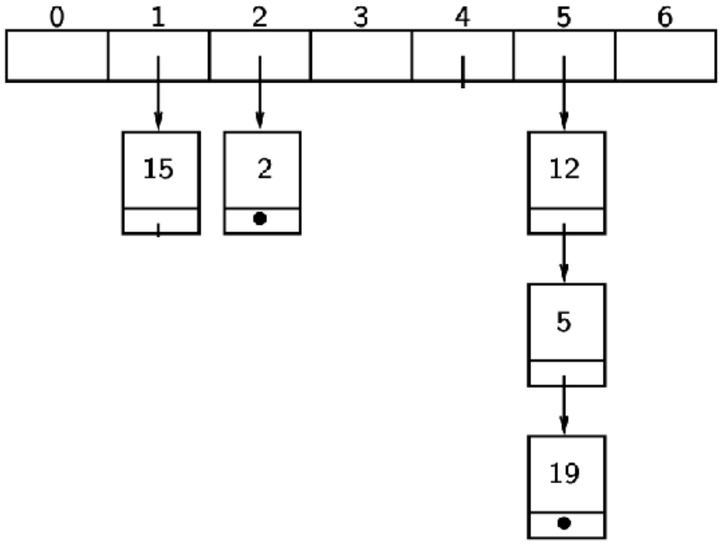
$S = \{2, 12, 5, 15, 19,$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

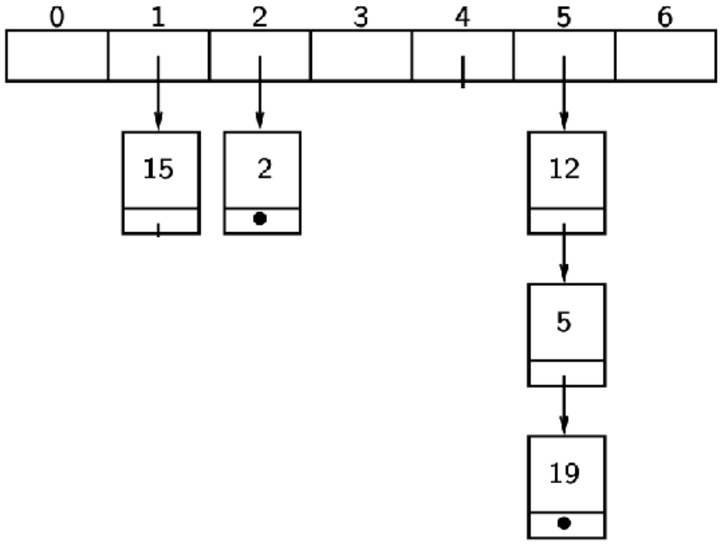
$S = \{2, 12, 5, 15, 19,$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

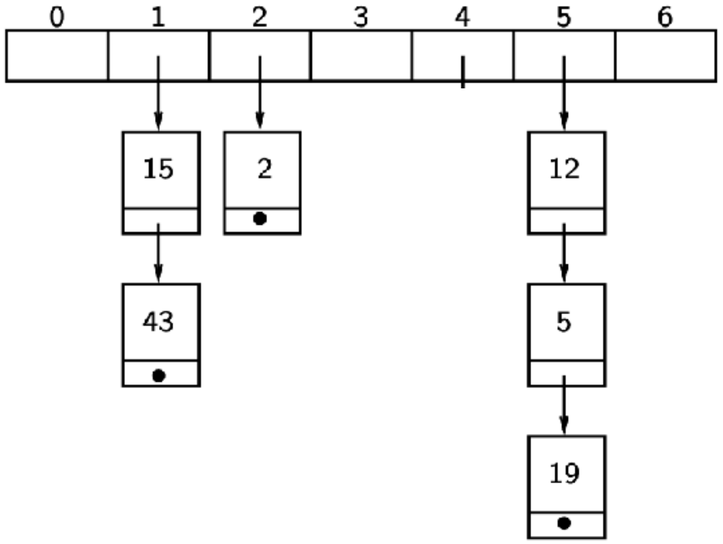
$S = \{2, 12, 5, 15, 19, 43,$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

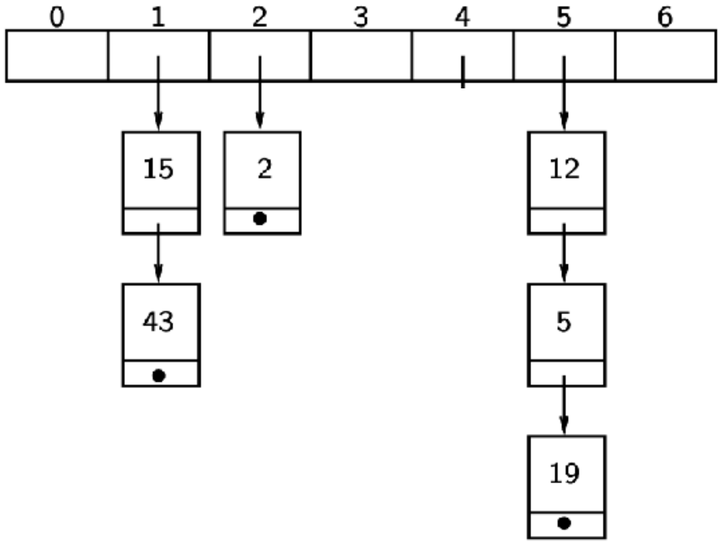
$S = \{2, 12, 5, 15, 19, 43,$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

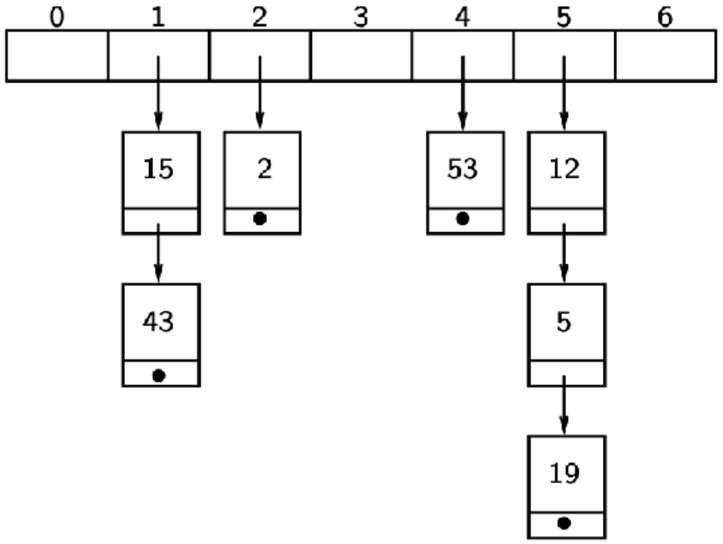
$S = \{2, 12, 5, 15, 19, 43, 53\}$



Beispiel

Beispiel: $m = 7$ und $h(x) = x \bmod m$

$$S = \{2, 12, 5, 15, 19, 43, 53\}$$



Analyse

Analyse

Bei zufälligen Daten und ideal streuenden Hashfunktion gilt für

Analyse

Bei zufälligen Daten und ideal streuenden Hashfunktion gilt für

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & i\text{-tes Datum kommt in Liste } L(j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Analyse

Bei zufälligen Daten und ideal streuenden Hashfunktion gilt für

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & i\text{-tes Datum kommt in Liste } L(j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Prob}(X_{ij} = 1) = \frac{1}{m}$$

Analyse

Bei zufälligen Daten und ideal streuenden Hashfunktion gilt für

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & i\text{-tes Datum kommt in Liste } L(j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{Prob}(X_{ij} = 1) = \frac{1}{m}$$

$$\rightarrow \text{E}(X_{ij}) = 1 \cdot \frac{1}{m} + 0 \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{1}{m}$$

Analyse

Bei zufälligen Daten und ideal streuenden Hashfunktion gilt für

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & i\text{-tes Datum kommt in Liste } L(j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\text{Prob}(X_{ij} = 1) = \frac{1}{m}$

$\rightarrow \text{E}(X_{ij}) = 1 \cdot \frac{1}{m} + 0 \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{1}{m}$

$X_j = X_{1j} + \cdots + X_{nj}$ zählt Anzahl Daten in Liste $L(j)$.

Analyse

Bei zufälligen Daten und ideal streuenden Hashfunktion gilt für

$$X_{ij} := \begin{cases} 1 & i\text{-tes Datum kommt in Liste } L(j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\text{Prob}(X_{ij} = 1) = \frac{1}{m}$

$\rightarrow \text{E}(X_{ij}) = 1 \cdot \frac{1}{m} + 0 \cdot \frac{m-1}{m} = \frac{1}{m}$

$X_j = X_{1j} + \cdots + X_{nj}$ zählt Anzahl Daten in Liste $L(j)$.

$\text{E}(X_j) = \text{E}(X_{1j} + \cdots + X_{nj}) = \text{E}(X_{1j}) + \cdots + \text{E}(X_{nj}) = \frac{n}{m}$

Analyse (2)

Analyse (2)

Analyse (2)

- Erfolglose Suche in Liste $L(j)$:

Analyse (2)

- Erfolglose Suche in Liste $L(j)$:

  Inklusive nil-Zeiger durchschnittlich $1 + \frac{n}{m} = 1 + \beta$ Objekte betrachten

Analyse (2)

- Erfolglose Suche in Liste $L(j)$:

  Inklusive nil-Zeiger durchschnittlich $1 + \frac{n}{m} = 1 + \beta$ Objekte betrachten

  Beispiel: Für $n \approx 0.95 \cdot m$ ist dies ≈ 1.95.

Analyse (2)

- Erfolglose Suche in Liste $L(j)$:

  Inklusive nil-Zeiger durchschnittlich $1 + \frac{n}{m} = 1 + \beta$ Objekte betrachten

  Beispiel: Für $n \approx 0.95 \cdot m$ ist dies ≈ 1.95.

- Erfolgreiche Suche in Liste $L(j)$ der Länge ℓ:

Analyse (2)

- Erfolglose Suche in Liste $L(j)$:

  Inklusive nil-Zeiger durchschnittlich $1 + \frac{n}{m} = 1 + \beta$ Objekte betrachten

  Beispiel: Für $n \approx 0.95 \cdot m$ ist dies ≈ 1.95.

- Erfolgreiche Suche in Liste $L(j)$ der Länge ℓ:

  Jede Position in der Liste hat Wahrscheinlichkeit $1/\ell$, also $\frac{1}{\ell}(1 + 2 + \cdots + \ell) = \frac{\ell+1}{2}$.

Analyse (2)

- Erfolglose Suche in Liste $L(j)$:

  Inklusive nil-Zeiger durchschnittlich $1 + \frac{n}{m} = 1 + \beta$ Objekte betrachten
  Beispiel: Für $n \approx 0.95 \cdot m$ ist dies ≈ 1.95.

- Erfolgreiche Suche in Liste $L(j)$ der Länge ℓ:

  Jede Position in der Liste hat Wahrscheinlichkeit $1/\ell$, also $\frac{1}{\ell}(1 + 2 + \cdots + \ell) = \frac{\ell+1}{2}$.
  Durchschnittliche Listenlänge hier: $1 + \frac{n-1}{m}$

Analyse (2)

- Erfolglose Suche in Liste $L(j)$:

  Inklusive nil-Zeiger durchschnittlich $1 + \frac{n}{m} = 1 + \beta$ Objekte betrachten
  Beispiel: Für $n \approx 0.95 \cdot m$ ist dies ≈ 1.95.

- Erfolgreiche Suche in Liste $L(j)$ der Länge ℓ:

  Jede Position in der Liste hat Wahrscheinlichkeit $1/\ell$, also $\frac{1}{\ell}(1 + 2 + \cdots + \ell) = \frac{\ell+1}{2}$.
  Durchschnittliche Listenlänge hier: $1 + \frac{n-1}{m}$
  (Liste enthält sicher das gesuchte Datum, und die anderen $n - 1$ Daten sind zufällig verteilt.)

Analyse (2)

- Erfolglose Suche in Liste $L(j)$:

  Inklusive nil-Zeiger durchschnittlich $1 + \frac{n}{m} = 1 + \beta$ Objekte betrachten

  Beispiel: Für $n \approx 0.95 \cdot m$ ist dies ≈ 1.95.

- Erfolgreiche Suche in Liste $L(j)$ der Länge ℓ:

  Jede Position in der Liste hat Wahrscheinlichkeit $1/\ell$, also $\frac{1}{\ell}(1 + 2 + \cdots + \ell) = \frac{\ell+1}{2}$.
  Durchschnittliche Listenlänge hier: $1 + \frac{n-1}{m}$
  (Liste enthält sicher das gesuchte Datum, und die anderen $n - 1$ Daten sind zufällig verteilt.)
  Also erwartete Suchdauer $\frac{1}{2}(1 + \frac{n-1}{m} + 1) = 1 + \frac{n-1}{2m} \approx 1 + \frac{\beta}{2}$
  Beispiel: Für $n \approx 0.95 \cdot m$ ist dies ≈ 1.475.

7.6 Offene Adressierung

Demnächst!

Vielen Dank!

s.fekete@tu-bs.de