Kapitel 2.3: Eulerwege

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21

Prof. Dr. Sándor Fekete

Gestatten, Graph!

Gestatten, Graph!

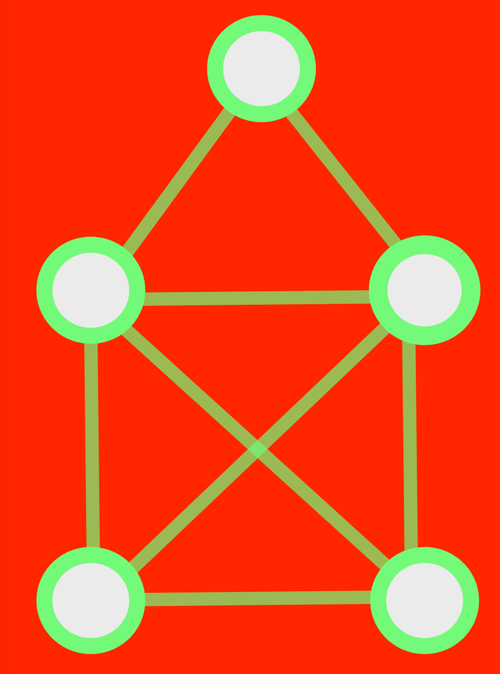
Formal:
DEFINITION 2.1

(1) (i) Ein ungerichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, Ψ), für das

(a) V und E endliche Mengen sind

(b) $\Psi : E \to \{X \subseteq V \mid 1 \leq |X| \leq 2\}$

Kardinalität von X



Graph

Graph: Ein Gebilde aus Knoten (Haltestellen) und Kanten (Verbindungen)

Skript

Algorithmen und Datenstrukturen

Graph!

Definition 2.1 (Ungerichteter Graph).

(1)(i) *Ein ungerichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, Ψ), für das*

(a) *V und E endlichen Mengen sind und*

(b) *Ψ eine Funktion mit*

$$\Psi : E \to \{X \subseteq V \mid 1 \leq |X| \leq 2\} \tag{2.1}$$

ist. D. h. jede Kante enthält einen Knoten (Schleife) oder zwei.

Kardinalität von X

Graph

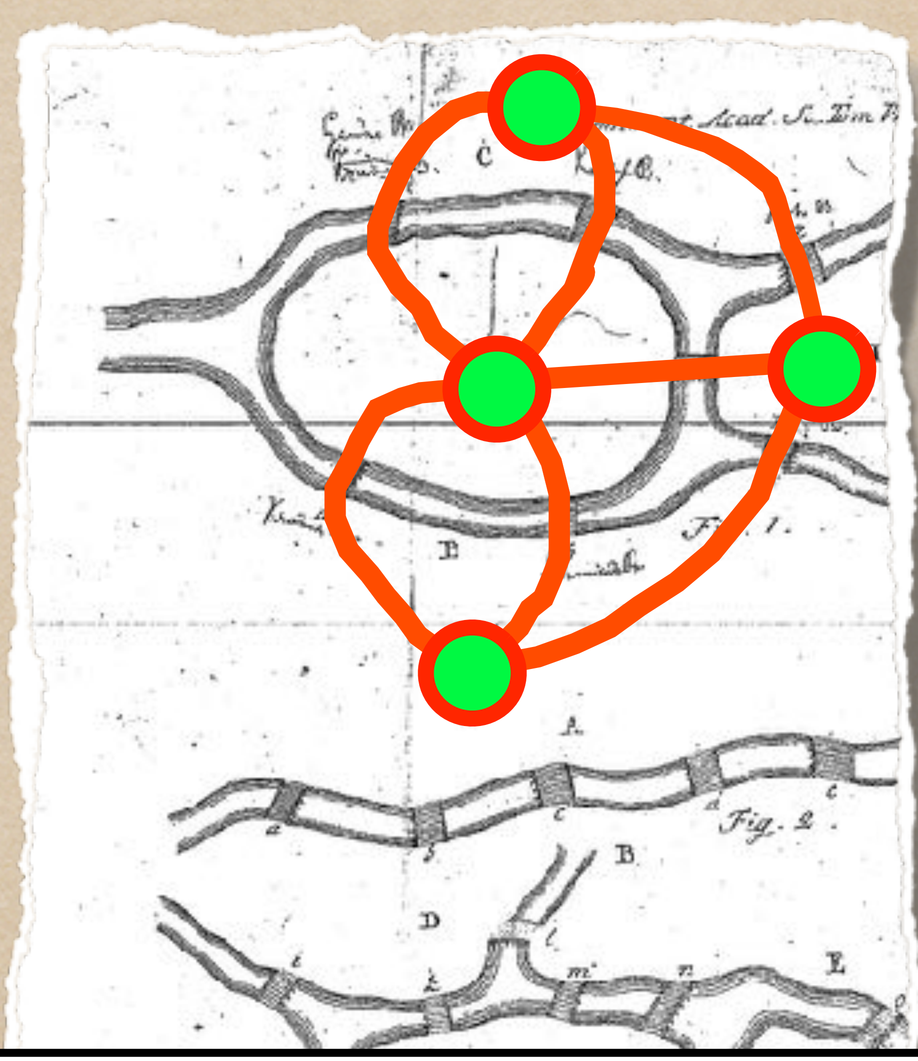
Graph: Ein Gebilde aus Knoten (Haltestellen) und Kanten (Verbindungen)

Problem 2.3 *(Eulerweg)*

Gegeben: **Ein Graph G=(V,E)**

Gesucht: **Ein Eulerweg W in G - oder ein Argument, dass kein Eulerweg existiert**

2.1 Historie



- Alle Knoten sind ungerade?!
- Man müsste an allen anfangen oder aufhören!
- Das geht nicht an einem Stück!

Euler: (1) Das gilt für jede beliebige Instanz: Mit mehr als zwei ungeraden Knoten gibt es keinen solchen Weg.

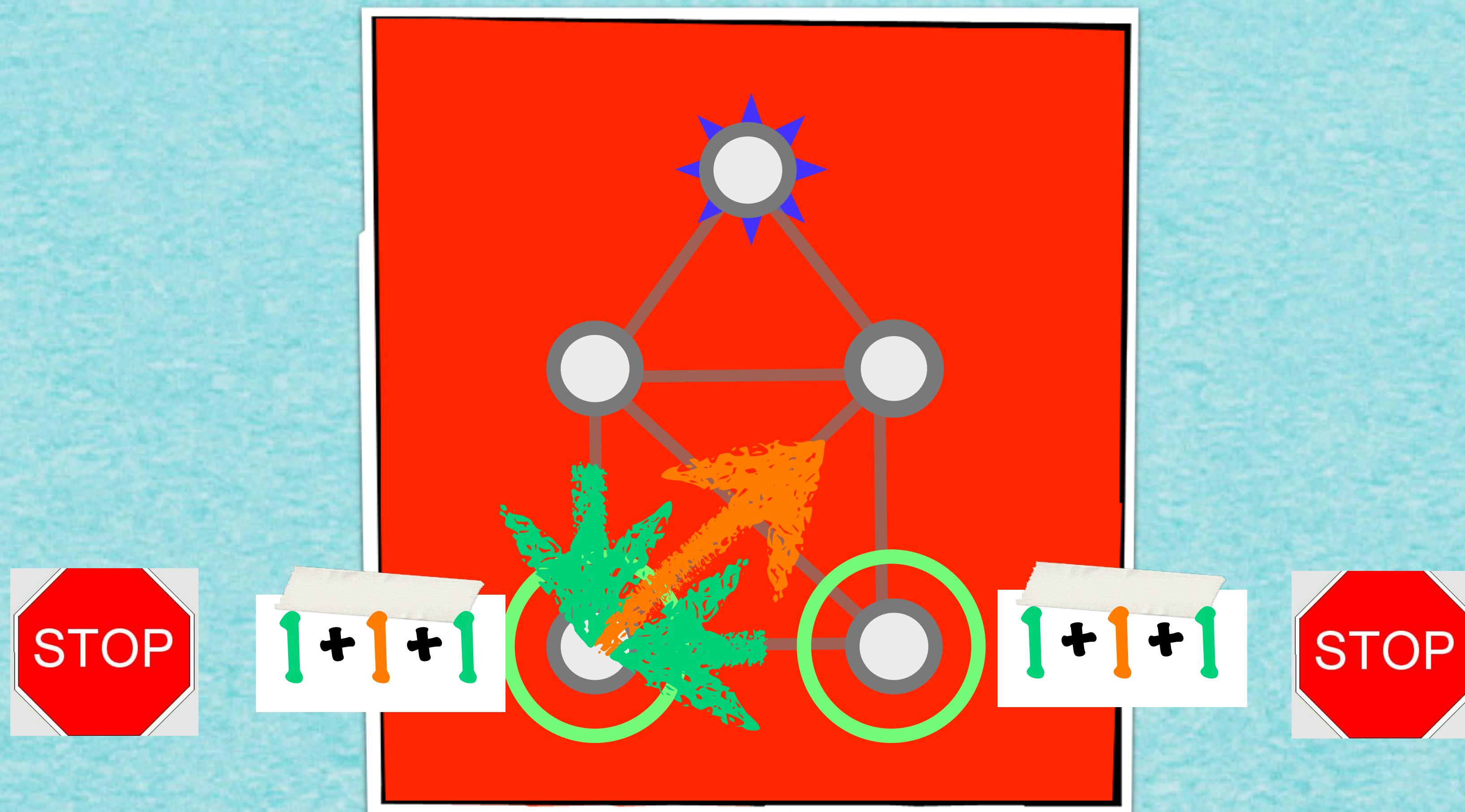
(2) Man kann auch charakterisieren, unter welchen Bedingungen es einen Weg tatsächlich gibt.

Satz 2.4 *(Euler)*

(1) Ein Graph G=(V,E) kann nur dann einen Eulerweg haben, wenn es höchstens zwei Konten mit ungeradem Grad gibt.

(2) Ein Graph G=(V,E) kann nur dann einen geschlossenen Eulerweg haben, wenn alle Konten geraden Grad haben.

Das Haus des Nikolaus



Beweis. Seien $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$ ein Knoten mit ungeradem Grad $\delta(v)$. Dann kann die Zahl der in einem Eulerweg W zu v hinführenden Kanten nicht gleich der von v wegführenden Kanten sein. Also muss W in v beginnen oder enden. Damit:

(1) Es gibt in einem Eulerweg nur einen Start- und Endknoten.

(2) Bei einem geschlossenen Eulerweg gibt es für den Start- und Endknoten w gleich viele hin- und wegführende Kanten. Also ist auch $\delta(w)$ gerade. □

Fragen:

(I) **Was ist mit Graphen, in denen nur ein Knoten ungeraden Grad hat?**

(II) **Die Bedingungen oben sind *notwendig*, d.h. sie müssen auf jeden Fall erfüllt werden, wenn es eine Chance auf einen Eulerweg geben soll. Sind sie auch *hinreichend*, d.h. gibt es bei Erfüllung auch wirklich einen Eulerweg?**

(III) **Wie findet man einen Eulerweg?**

(III') **Wie sieht ein Algorithmus dafür aus?**

Zu (I):

Satz 2.5 ***(Handshake-Lemma)***
Für jeden einfachen Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad eine gerade Zahl.

Zu (II):

Gegeben ein Graph G

- mit nur zwei ungeraden Knoten. Hat er einen Eulerweg?
- mit nur geraden Knoten. Hat er eine Eulertour?

Nein!

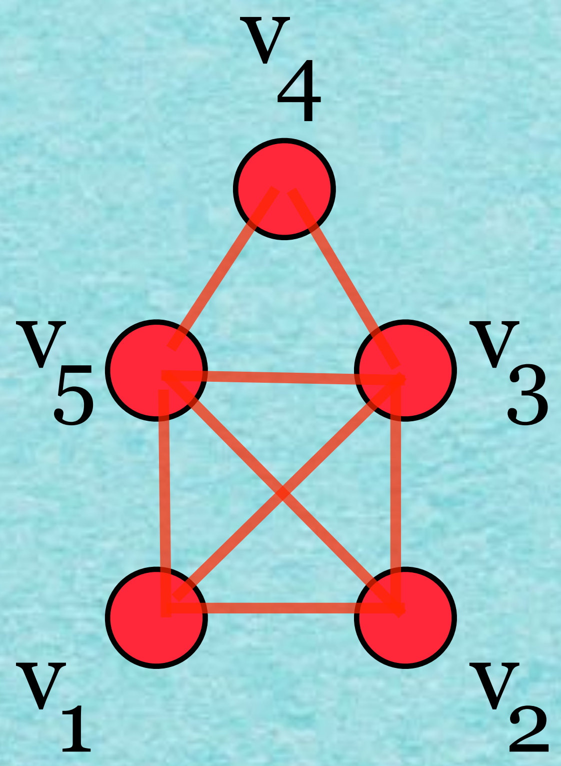
Der Graph muss zusamenhängend sein!

Zu (II):

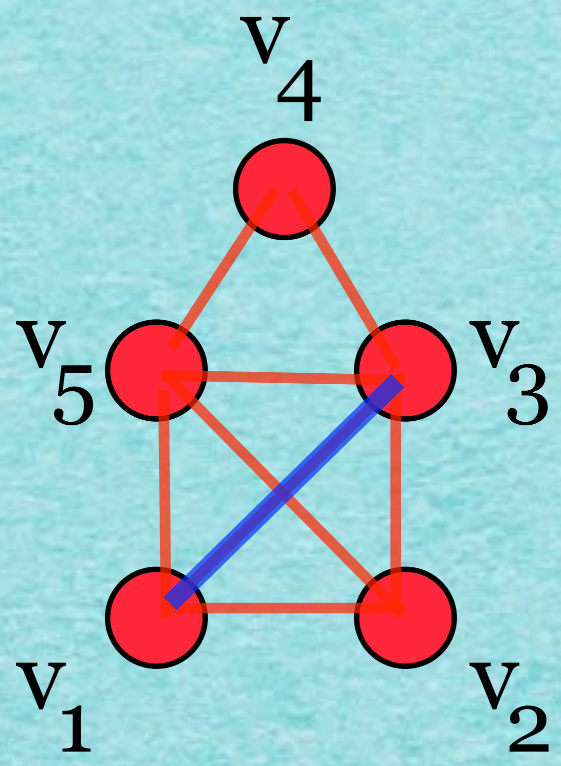
Gegeben ein *zusammenhängender* Graph G
- **mit nur zwei ungeraden Knoten. Hat er einen Eulerweg?**
- **mit nur geraden Knoten. Hat er eine Eulertour?**

Grundtechnik:
Um zu sehen, wo man etwas richtig machen muss, überlegt man sich, wo man etwas falsch machen kann!

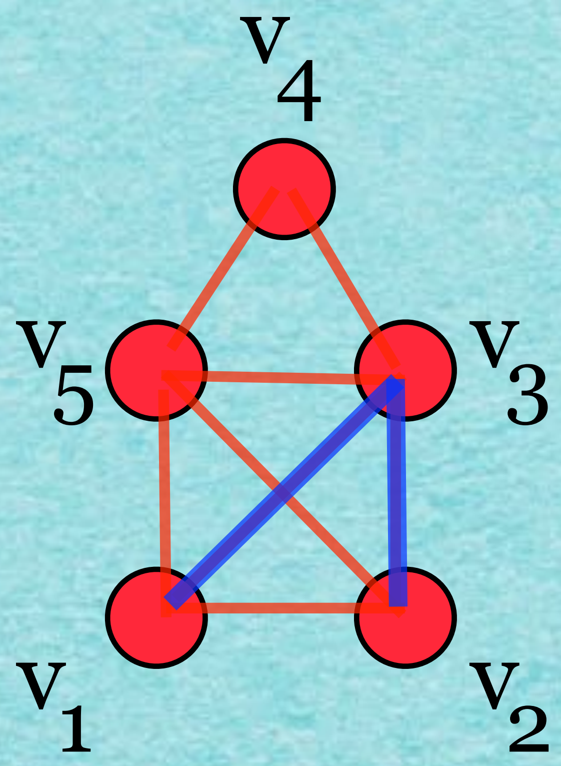
2.3 Eulerwege



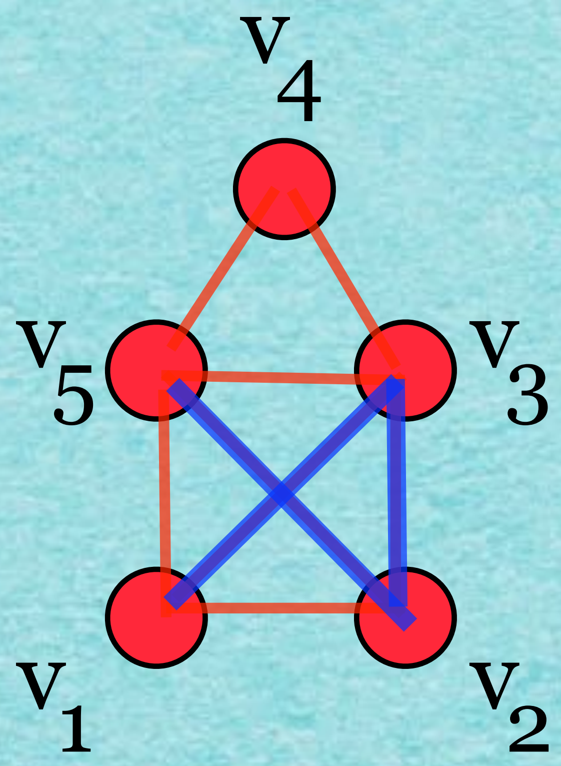
2.3 Eulerwege



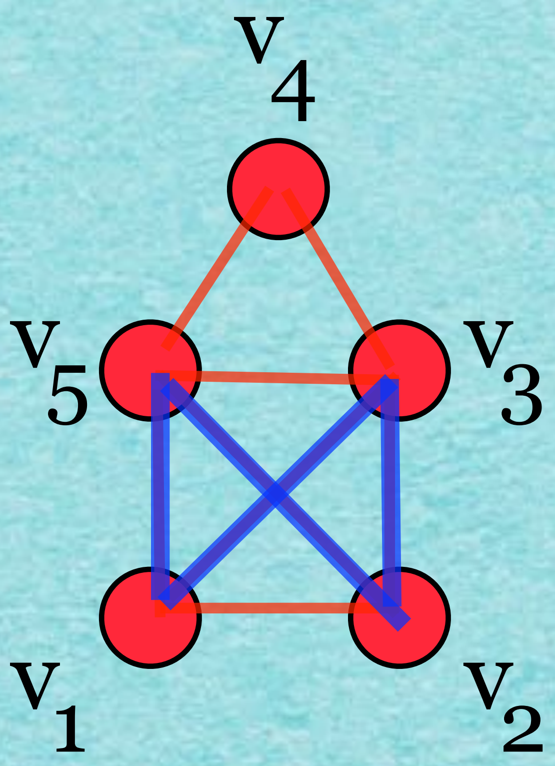
2.3 Eulerwege



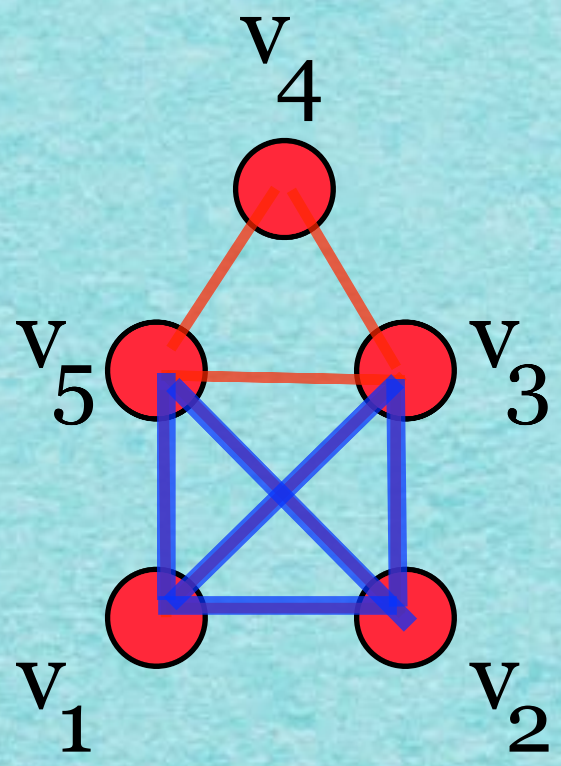
2.3 Eulerwege



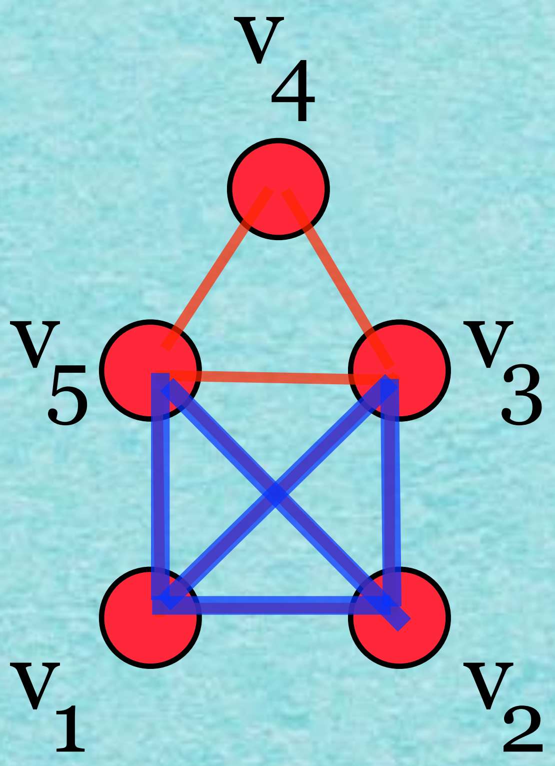
2.3 Eulerwege



2.3 Eulerwege

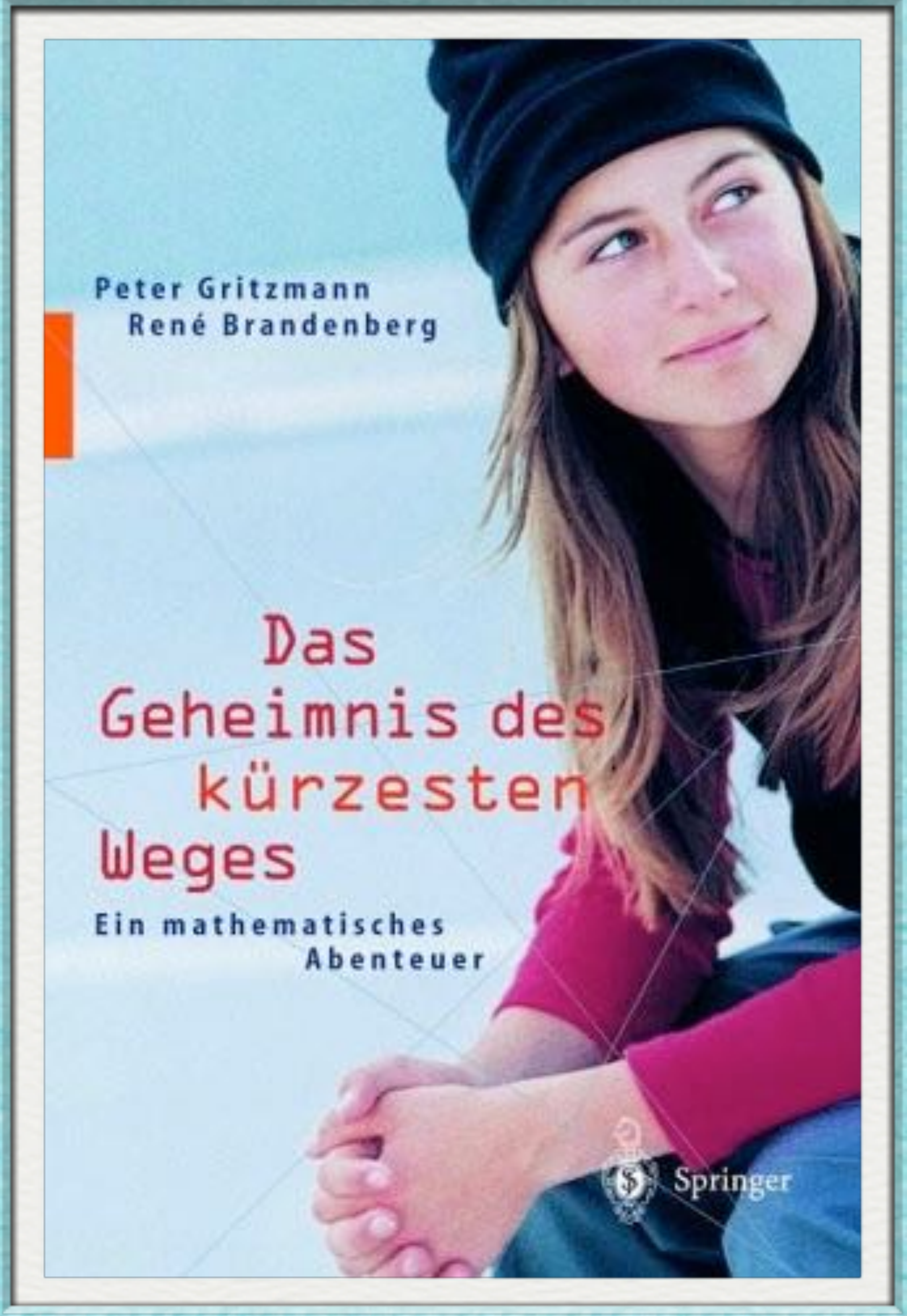


2.3 Eulerwege



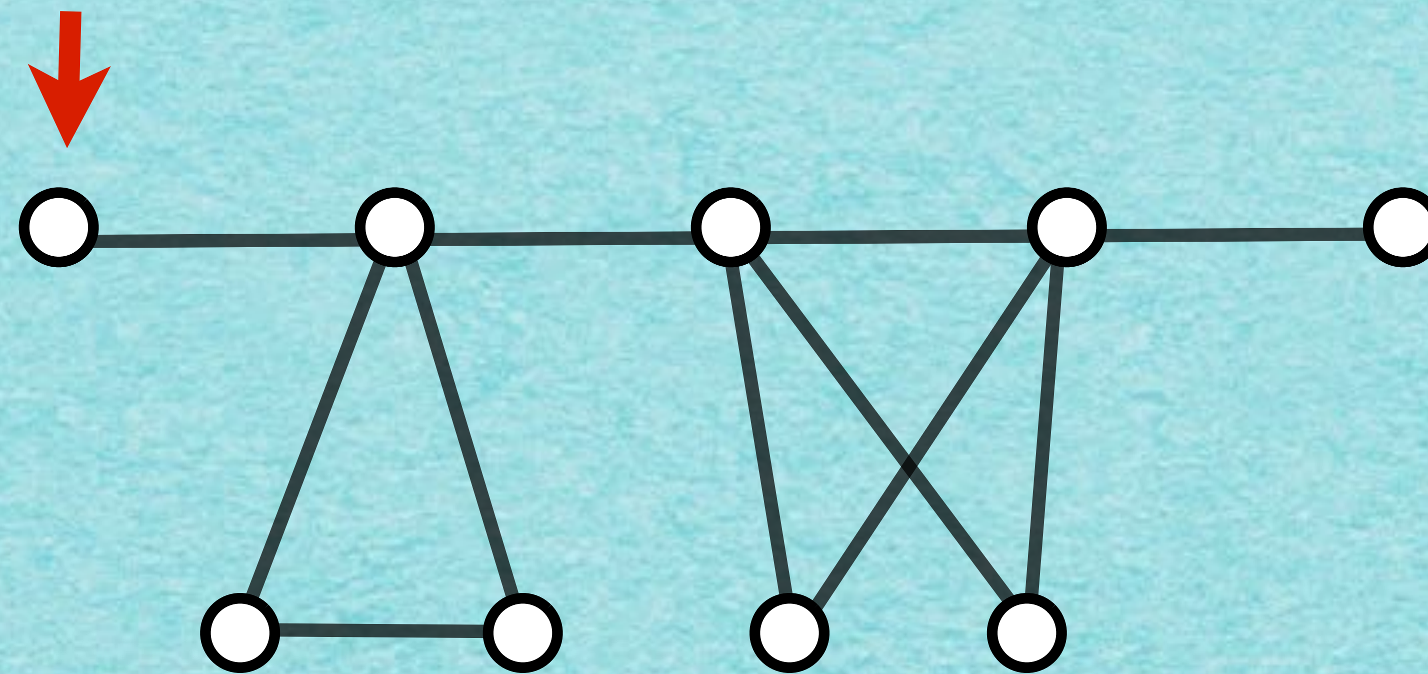
Wir hinterlassen Kanten?!

"Vorlesung"

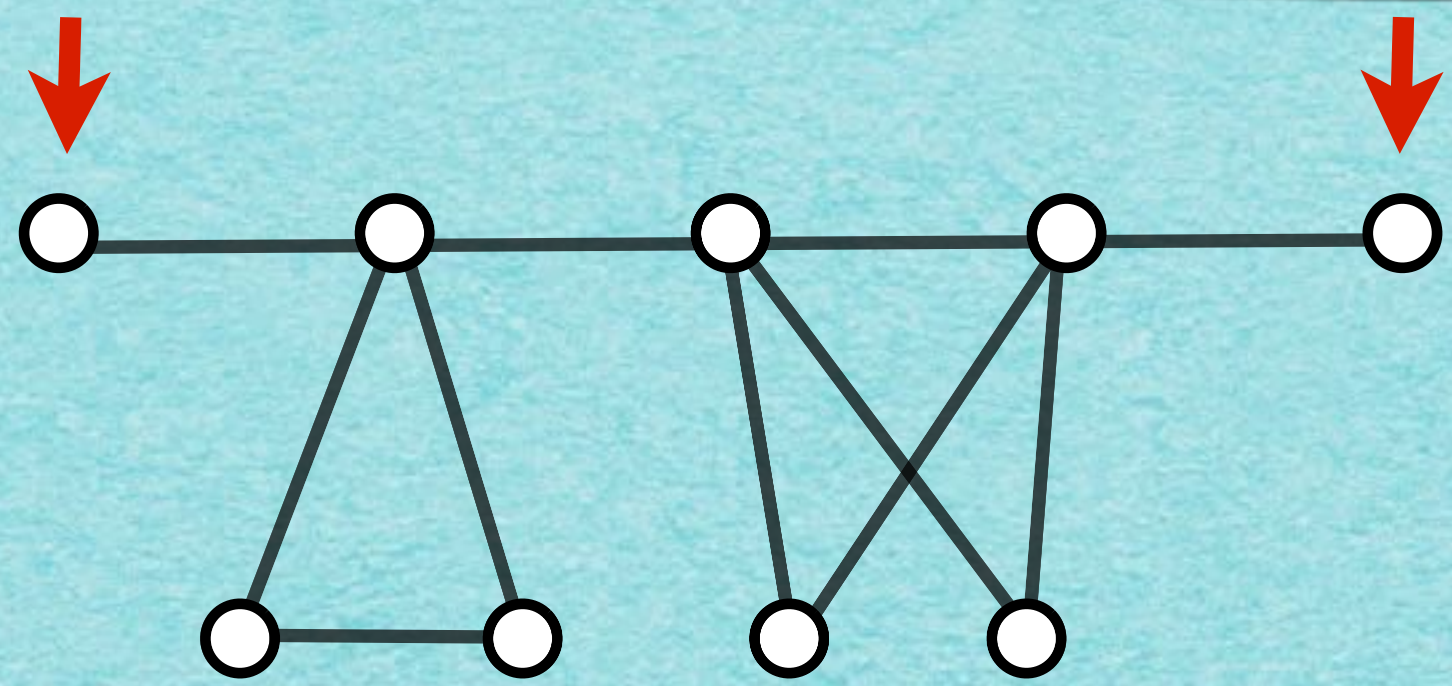


Peter Gritzmann
René Brandenberg
Das Geheimnis des kürzesten Weges
Ein mathematisches Abenteuer
Springer

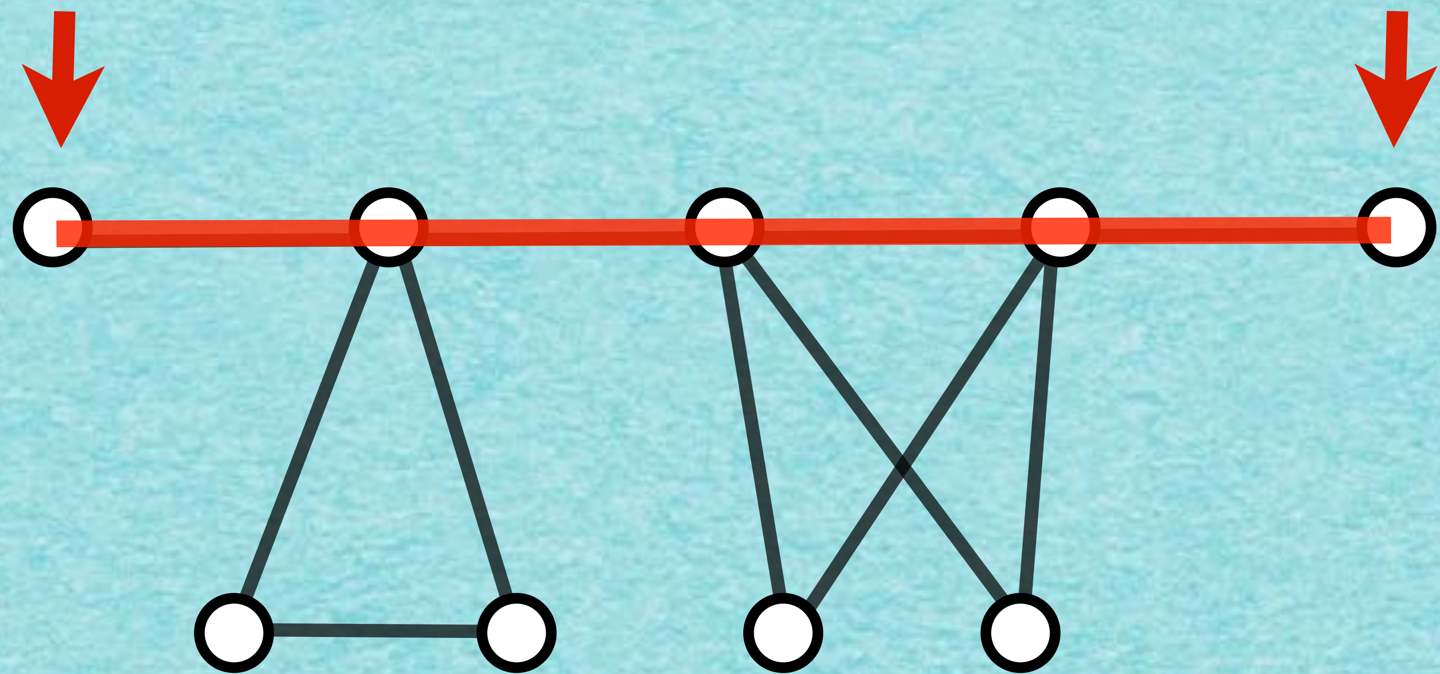
Wegebau



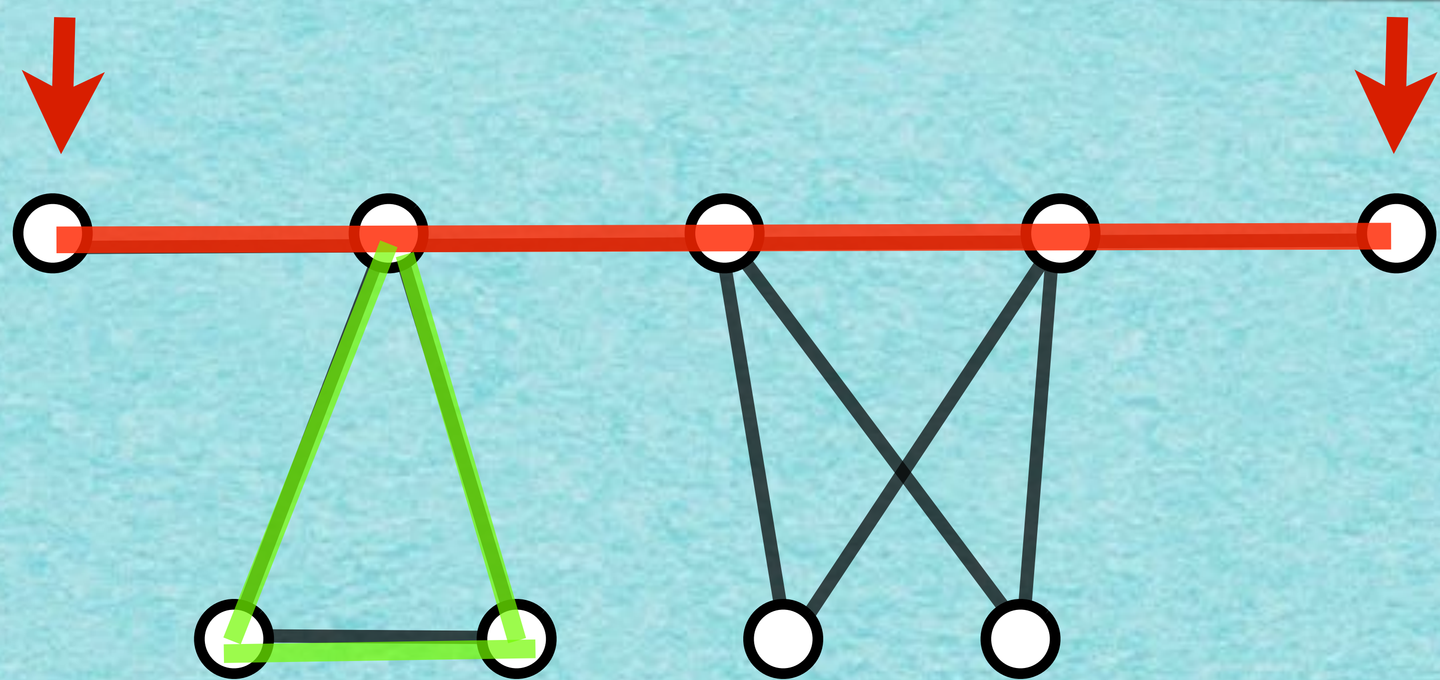
Wegebau



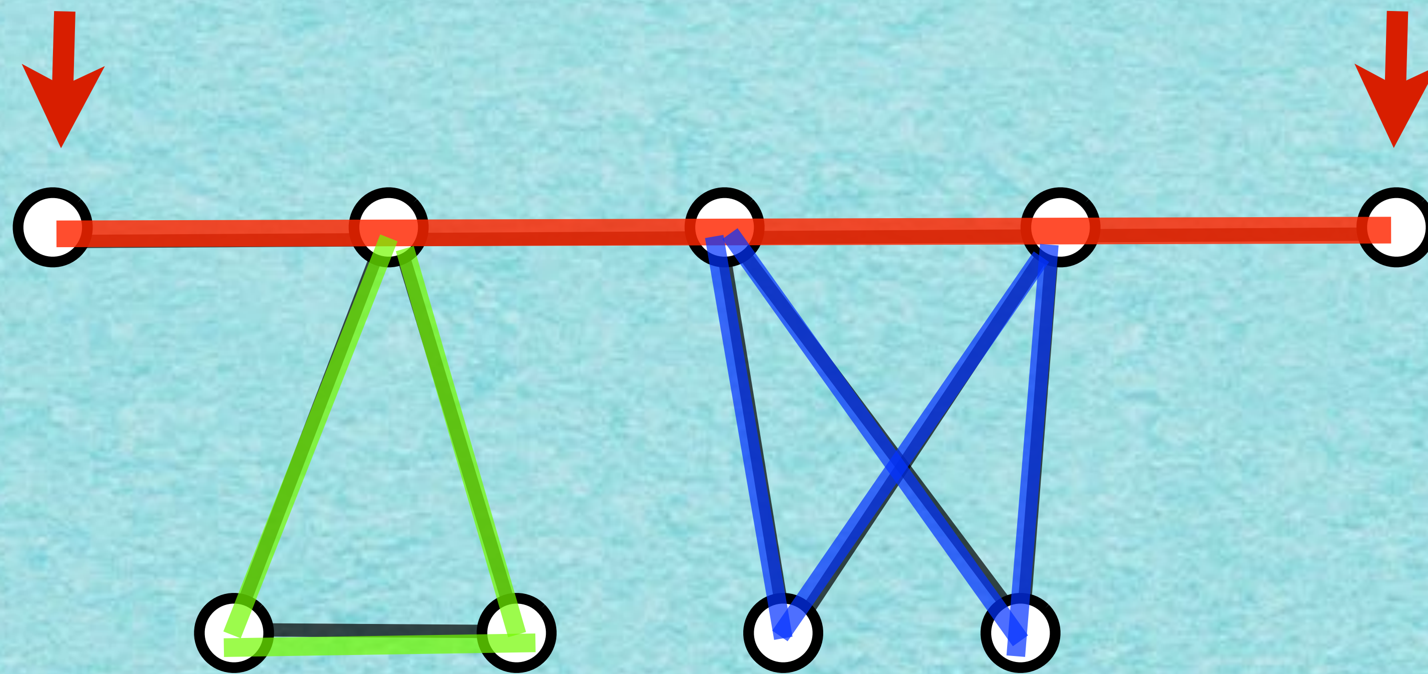
Wegebau



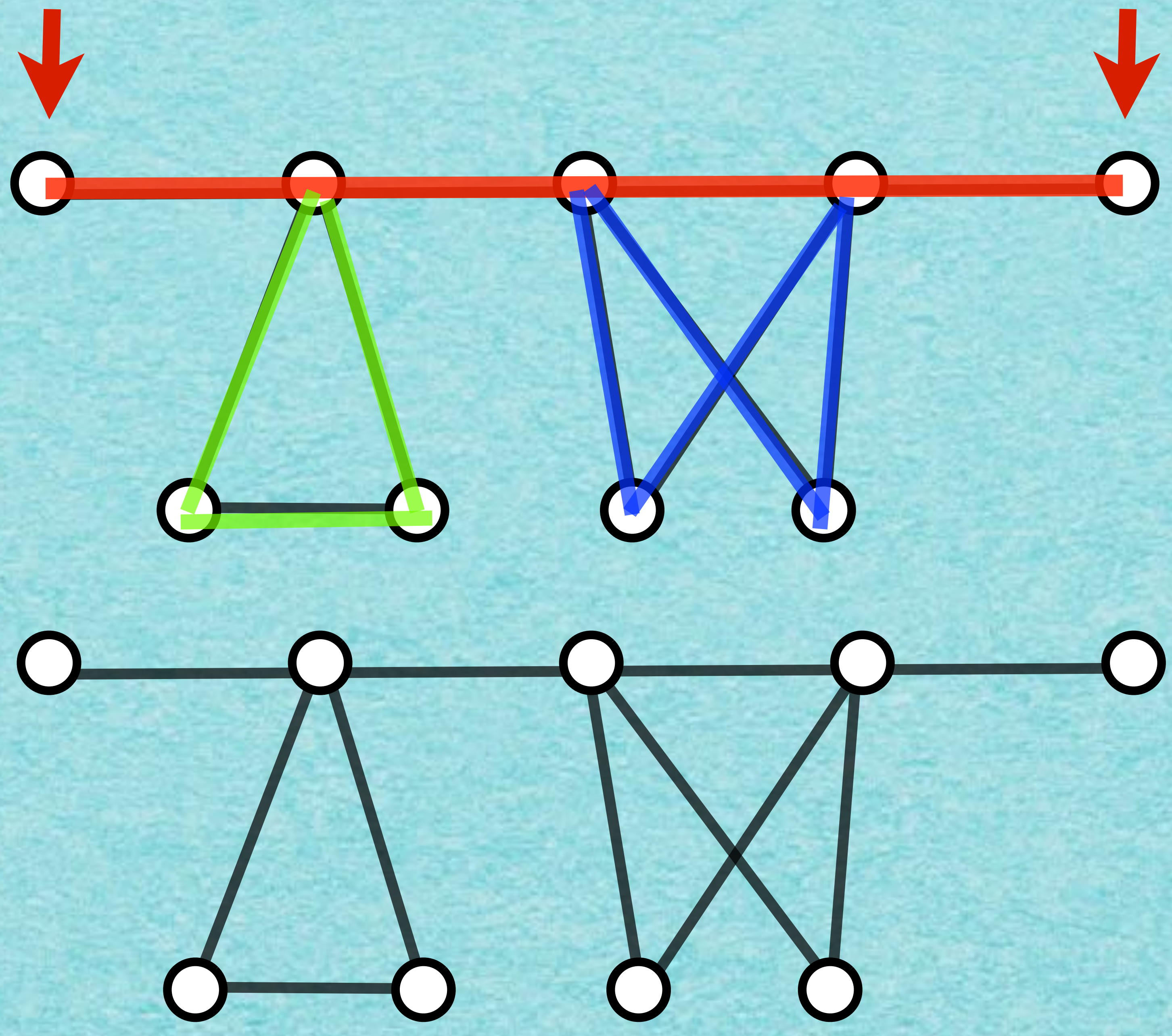
Wegebau



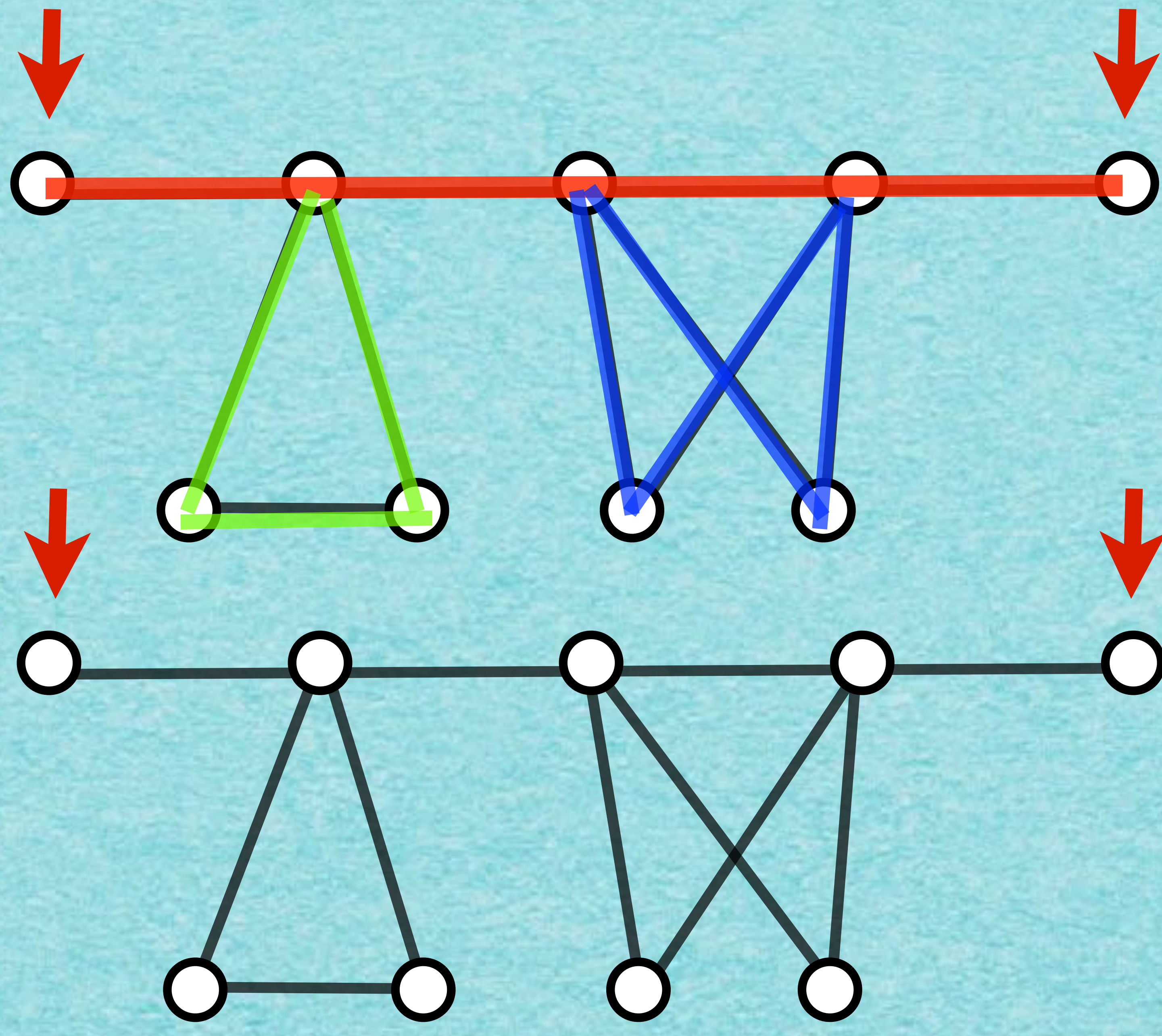
Wegebau



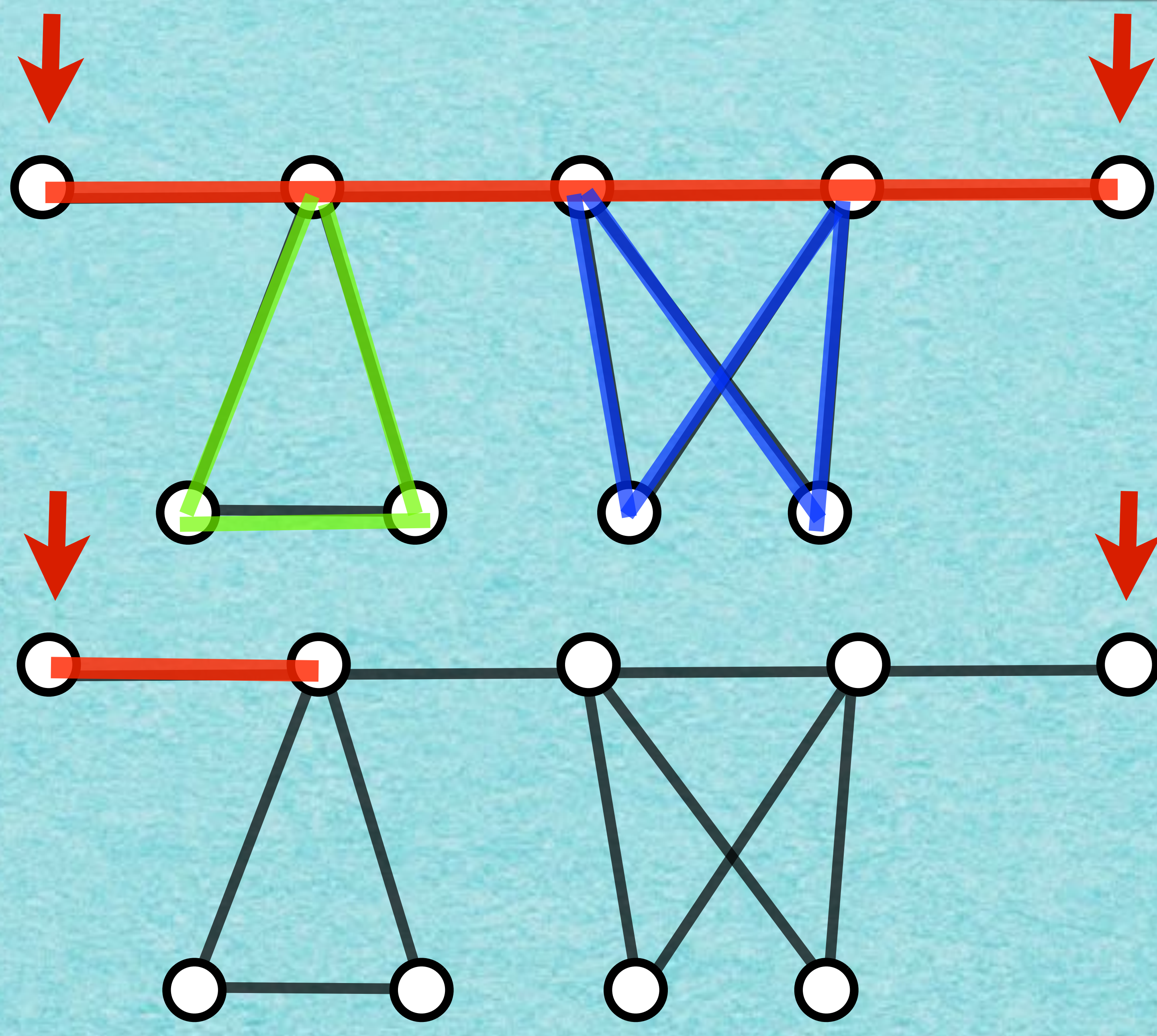
Wegebau



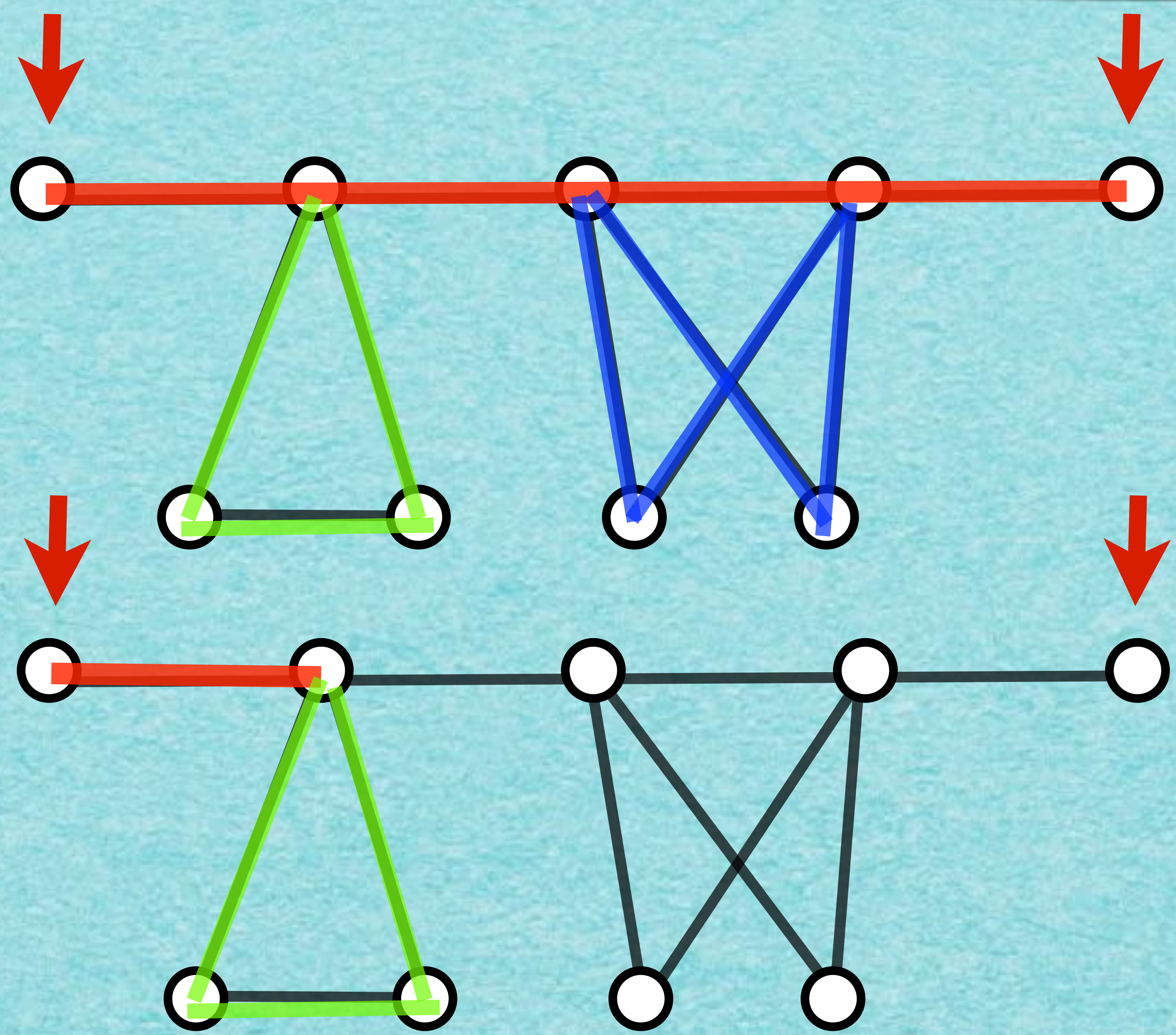
Wegebau



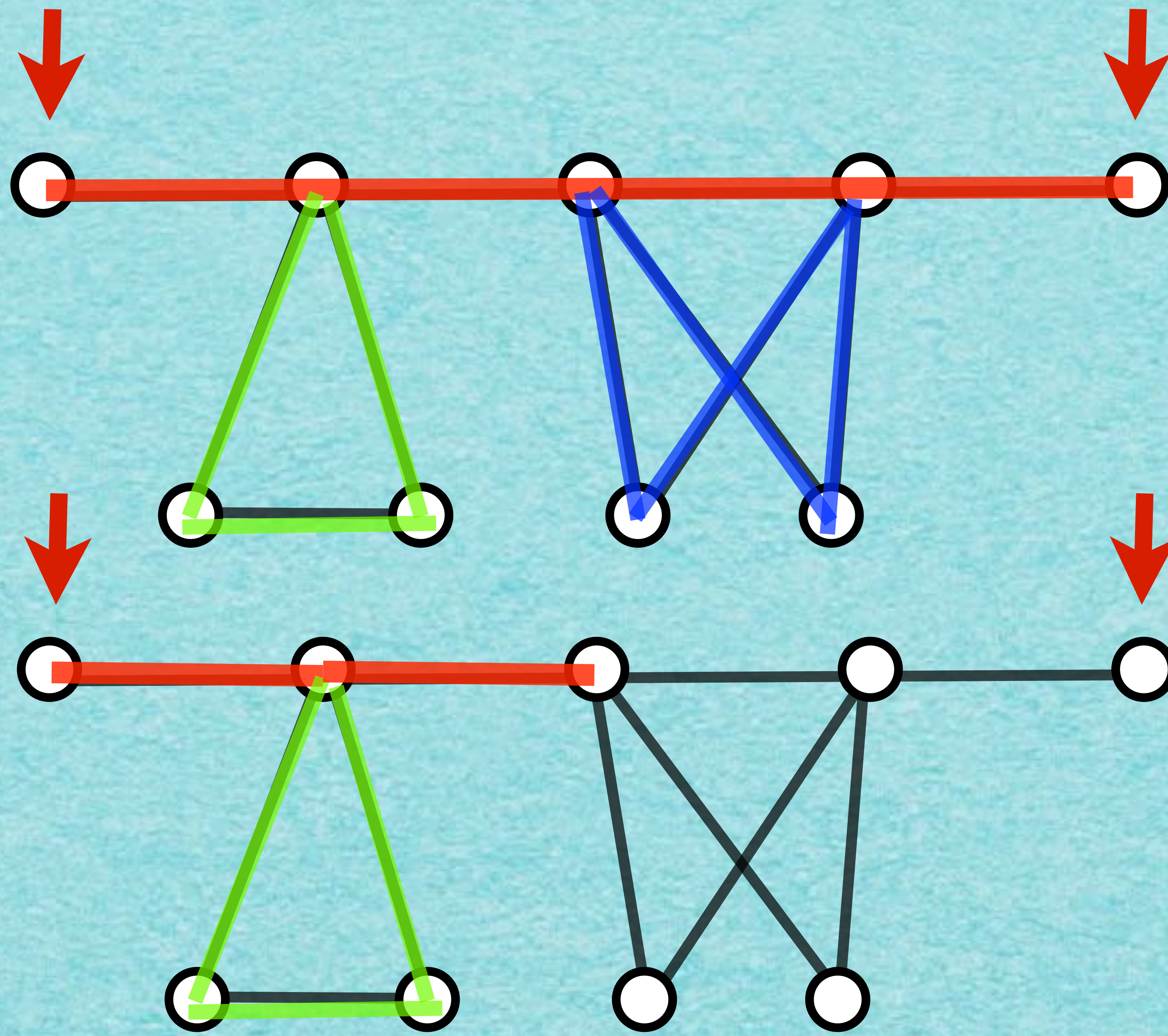
Wegebau



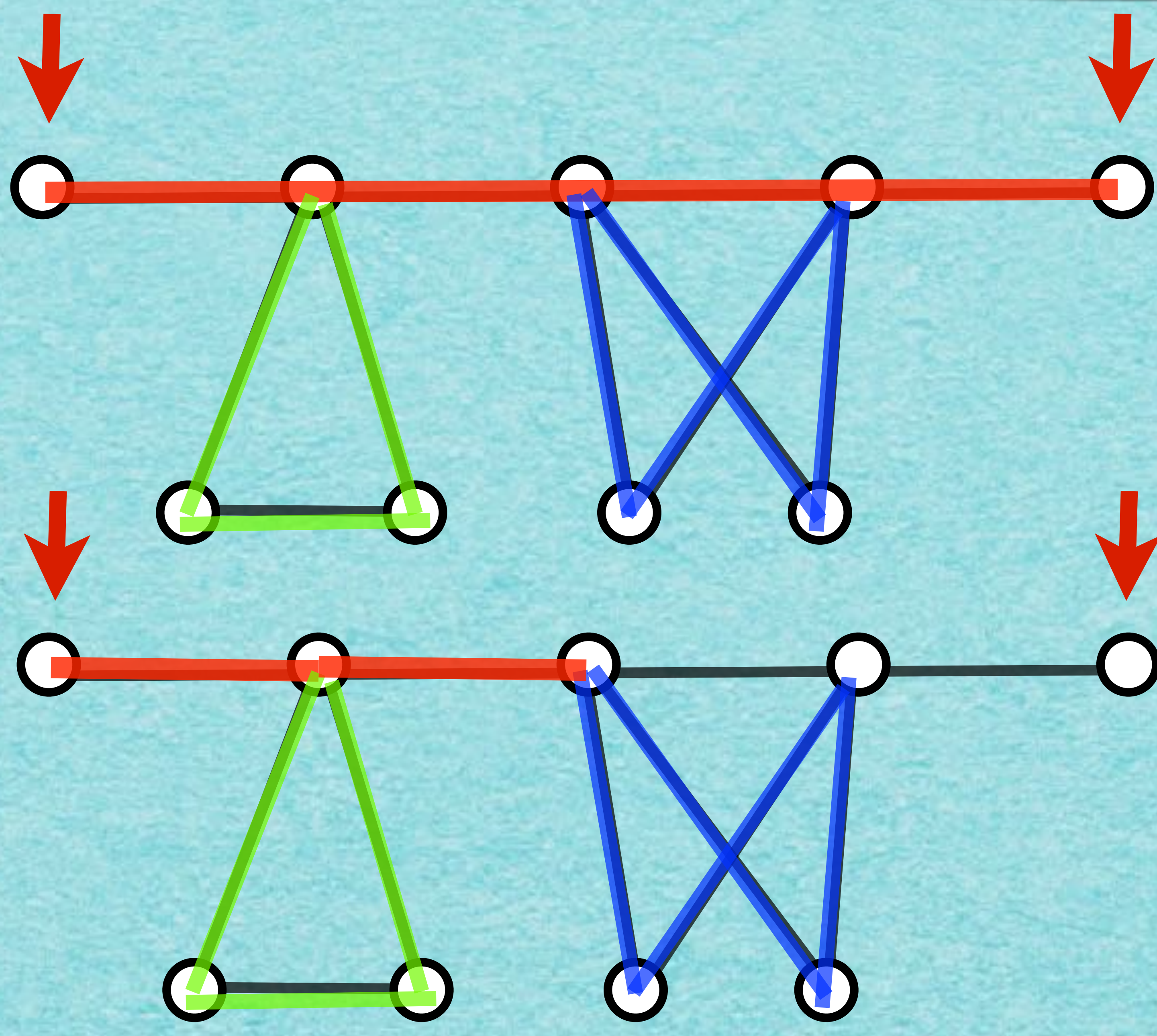
Wegebau



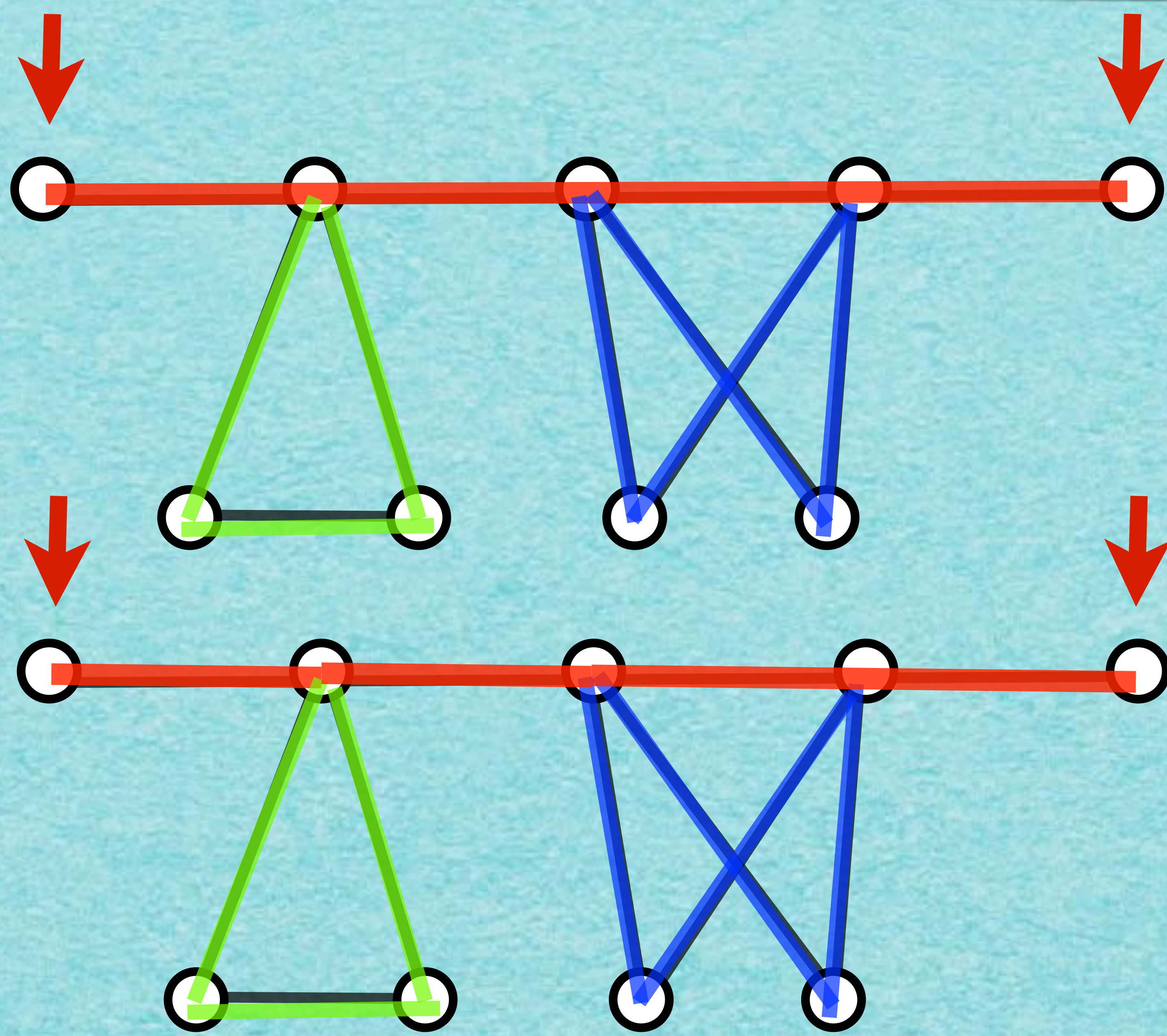
Wegebau

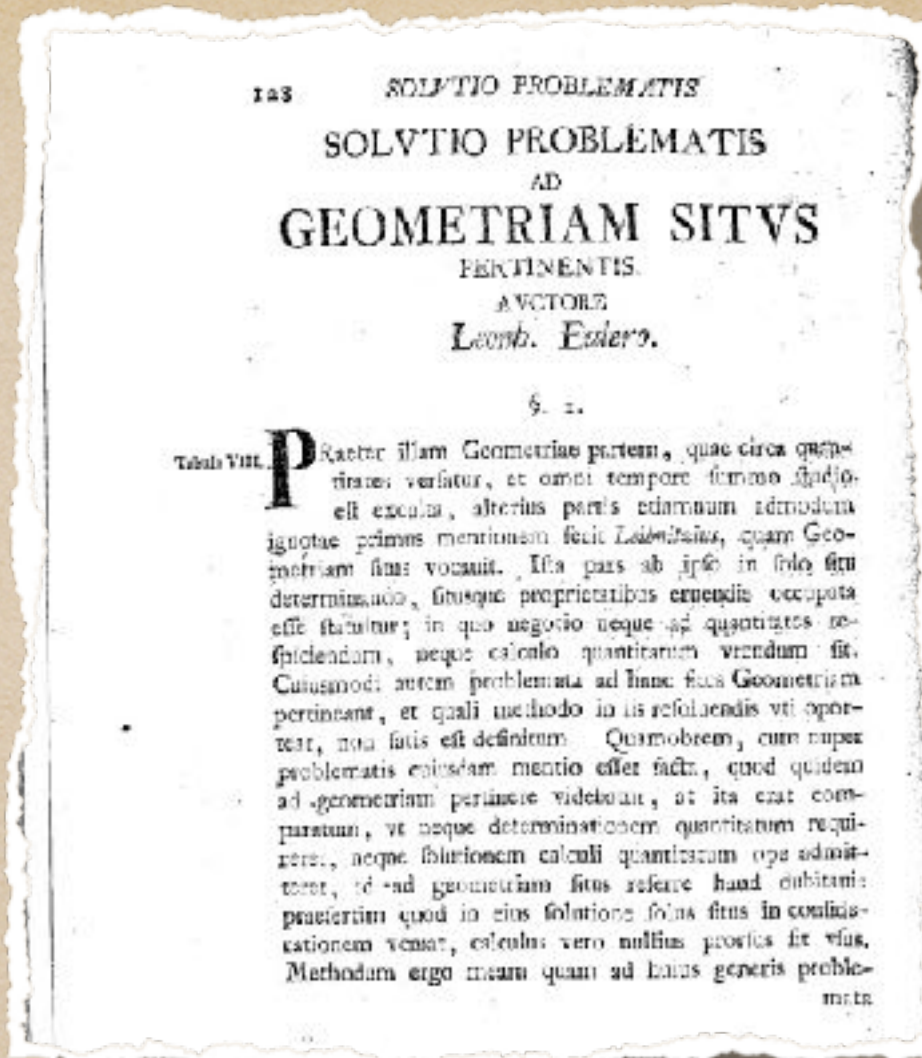


Wegebau



Wegebau





128 SOLVTIO PROBLEMATIS

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VIII. PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſitusque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque ſolutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam ſitus referre haud dubitaui: praeſertim quod in eius ſolutione ſolus ſitus in conſiderationem veniat, calculus vero nullius prorſus ſit vſus. Methodum ergo meam quam ad huius generis proble-
mata

Euler: (1) Das gilt für jede beliebige Instanz: Mit mehr als zwei ungeraden Knoten gibt es keinen solchen Weg.

(2) Man kann auch charakterisieren, unter welchen Bedingungen es einen Weg tatsächlich gibt.

Hierholzer proved that a graph has an Eulerian cycle if and only if it is connected and every vertex has an even degree (excluding the starting and terminal vertices). This result had been given, without proof, by Leonhard Euler in 1736. Hierholzer apparently explained his proof, just before his premature death in 1871, to a colleague who then arranged for its posthumous publication which appeared in 1873.[1]

Mathematische Annalen
March 1873, Volume 6, Issue 1, pp 30–32

Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren.

Von Carl Hierholzer.

Mitgetheilt von Chr. Wiener *).

In einem beliebig verschlungenen Linienzuge mögen *Zweige* eines Punktes diejenigen verschiedenen Theile des Zuges heissen, auf welchen man den fraglichen Punkt verlassen kann. Ein Punkt mit mehreren Zweigen heisse ein *Knotenpunkt*, der so vielfach genannt werde, als

*) Die folgende Untersuchung trug der leider so früh dem Dienste der Wissenschaft durch den Tod entrissene Privatdocent Dr. Hierholzer dahier (gest. 13. Sept. 1871) einem Kreise befreundeter Mathematiker vor. Um sie vor Vergessenheit zu bewahren, musste sie bei dem Mangel jeder schriftlichen Aufzeichnung aus dem Gedächtniss wieder hergestellt werden, was ich unter Beihilfe meines verehrten Collegen Lüroth durch das Folgende möglichst getreu auszuführen suchte.

Algorithmus 2.7

INPUT:	Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten
OUTPUT:	Ein Weg in G.

1. Starte in einem Knoten v_0 (ungerade, sonst beliebig);
2. Solange es eine zum gegenwärtigen Knoten v_i inzidente unbenutzte Kante $\{v_i, v_j\}$ gibt:

   2.1. Wähle eine dieser Kanten aus, $e_i = \{v_i, v_j\}$

   2.2. Laufe zum Nachbarknoten v_j

   2.3. Lösche die Kante aus der Liste der unbenutzten Kanten.

   2.4. Setze $v_{i+1} := v_j$

   2.5. Setze $i := i+1$
3. STOP

Algorithmus 2.8

Algorithmus von Hierholzer

INPUT:	Ein zusammenhängender Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten
OUTPUT:	Ein Eulerweg bzw. eine Eulertour in G

A. Wähle einen Startknoten v (ungerade falls vorhanden);

B. Verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W von v aus zu bestimmen;

C. Solange es noch unbenutzte Kanten gibt:

  C.1. Wähle einen von W besuchten Knoten w mit positivem Grad im Restgraphen;

  C.2. Verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W′ von w aus zu bestimmen;

  C.3. Verschmelze W und W′

D. STOP

Satz 2.9

(i) Das Verfahren 2.7 stoppt immer in endlicher Zeit, ist also ein Algorithmus.

(ii) Der Algorithmus liefert einen Weg.

(iii) Ist v_0 ungerade, stoppt der Algorithmus im zweiten ungeraden Knoten.

(iv) Ist G eulersch (d.h. haben alle Knoten gerade Grad), stoppt der Algorithmus in v_0, liefert also einen geschlossenen Weg.

Beweis:

(i)

Satz 2.9

(i) Das Verfahren 2.7 stoppt immer in endlicher Zeit, ist also ein Algorithmus.

(ii) Der Algorithmus liefert einen Weg.

(iii) Ist v_0 ungerade, stoppt der Algorithmus im zweiten ungeraden Knoten.

(iv) Ist G eulersch (d.h. haben alle Knoten gerade Grad), stoppt der Algorithmus in v_0, liefert also einen geschlossenen Weg.

Beweis:

(i)

Algorithmus 2.7

<u>INPUT:</u> Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten

<u>OUTPUT:</u> Ein Weg in G.

1. Starte in einem Knoten v_0 (ungerade, sonst beliebig);
2. Solange es eine zum gegenwärtigen Knoten v_i inzidente unbenutzte Kante $\{v_i, v_j\}$ gibt:
    2.1. Wähle eine dieser Kanten aus, $e_i = \{v_i, v_j\}$

    2.2. Laufe zum Nachbarknoten v_j

    2.3. Lösche die Kante aus der Liste der unbenutzten Kanten.

    2.4. Setze $v_{i+1} := v_j$

    2.5. Setze $i := i+1$
3. STOP

Satz 2.9

(i) Das Verfahren 2.7 stoppt immer in endlicher Zeit, ist also ein Algorithmus.

(ii) Der Algorithmus liefert einen Weg.

(iii) Ist v_0 ungerade, stoppt der Algorithmus im zweiten ungeraden Knoten.

(iv) Ist G eulersch (d.h. haben alle Knoten gerade Grad), stoppt der Algorithmus in v_0, liefert also einen geschlossenen Weg.

Beweis:

(i) Bei jedem Durchlauf der Schleifen 2.1-2.5 wird in 2.3 eine Kante entfernt. Das kann nur endlich oft passieren. Also muss das Verfahren irgendwann stoppen.

Satz 2.9

(i) Das Verfahren 2.7 stoppt immer in endlicher Zeit, ist also ein Algorithmus.

(ii) Der Algorithmus liefert einen Weg.

(iii) Ist v_0 ungerade, stoppt der Algorithmus im zweiten ungeraden Knoten.

(iv) Ist G eulersch (d.h. haben alle Knoten gerade Grad), stoppt der Algorithmus in v_0, liefert also einen geschlossenen Weg.

Satz 2.9

(i) Das Verfahren 2.7 stoppt immer in endlicher Zeit, ist also ein Algorithmus.

(ii) Der Algorithmus liefert einen Weg.

(iii) Ist v_0 ungerade, stoppt der Algorithmus im zweiten ungeraden Knoten.

(iv) Ist G eulersch (d.h. haben alle Knoten gerade Grad), stoppt der Algorithmus in v_0, liefert also einen geschlossenen Weg.

Beweis:

(ii)

Algorithmus 2.7

INPUT: Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten

OUTPUT: Ein Weg in G.

1. Starte in einem Knoten v_0 (ungerade, sonst beliebig);
2. Solange es eine zum gegenwärtigen Knoten v_i inzidente unbenutzte Kante $\{v_i, v_j\}$ gibt:

   2.1. Wähle eine dieser Kanten aus, $e_i = \{v_i, v_j\}$

   2.2. Laufe zum Nachbarknoten v_j

   2.3. Lösche die Kante aus der Liste der unbenutzten Kanten.

   2.4. Setze $v_{i+1} := v_j$

   2.5. Setze $i := i+1$
3. STOP

Satz 2.9

(i) Das Verfahren 2.7 stoppt immer in endlicher Zeit, ist also ein Algorithmus.

(ii) Der Algorithmus liefert einen Weg.

(iii) Ist v_0 ungerade, stoppt der Algorithmus im zweiten ungeraden Knoten.

(iv) Ist G eulersch (d.h. haben alle Knoten gerade Grad), stoppt der Algorithmus in v_0, liefert also einen geschlossenen Weg.

Beweis:

(ii) Nach Konstruktion erhalten wir eine Kantenfolge; keine Kante wird doppelt verwendet.

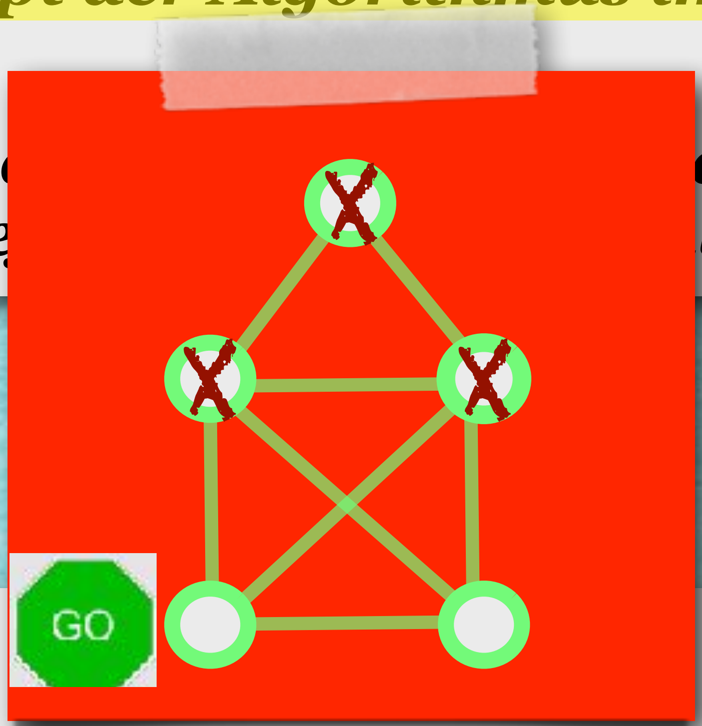
Satz 2.9

(i) Das Verfahren 2.7 stoppt immer in endlicher Zeit, ist also ein Algorithmus.

(ii) Der Algorithmus liefert einen Weg.

(iii) Ist v_0 ungerade, stoppt der Algorithmus im zweiten ungeraden Knoten.

(iv) Ist G eulersch (d.h. h… …ade Grad), stoppt der Algorithmus in v_0, lie… …lossenen Weg.



Beweis:

(iii) Ein gerader Knoten wird genauso oft verlassen wie betreten; also kann der Algorithmus in keinem davon stoppen,

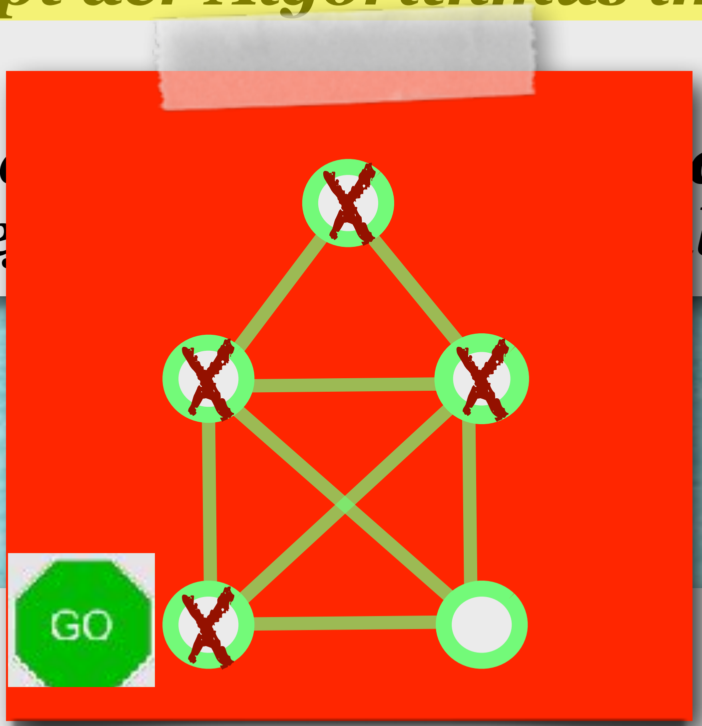
Satz 2.9

(i) Das Verfahren 2.7 stoppt immer in endlicher Zeit, ist also ein Algorithmus.

(ii) Der Algorithmus liefert einen Weg.

(iii) Ist v_0 ungerade, stoppt der Algorithmus im zweiten ungeraden Knoten.

(iv) Ist G eulersch (d.h. h… ade Grad), stoppt der Algorithmus in v_0, lie… lossenen Weg.



Beweis:

(iii) Ein gerader Knoten wird genauso oft verlassen wie betreten; also kann der Algorithmus in keinem davon stoppen, aber auch nicht im Startknoten, wenn dieser ungerade ist.

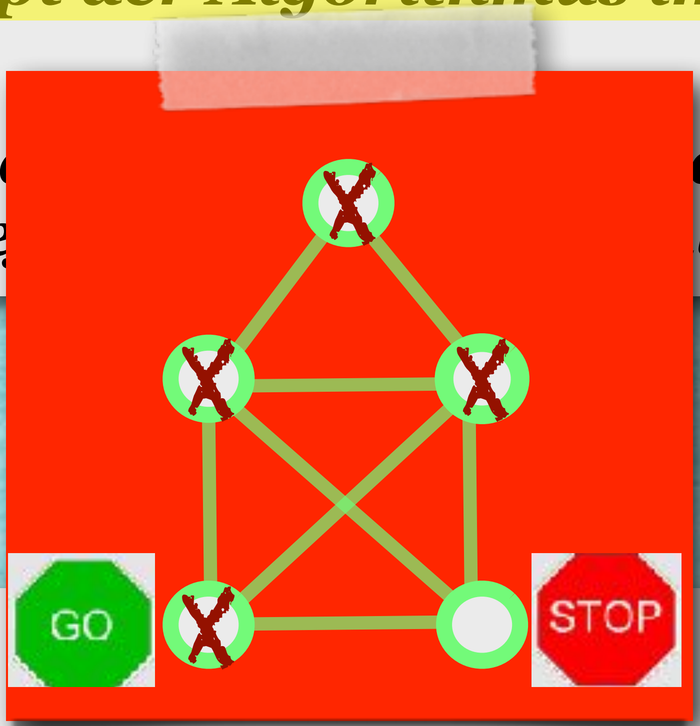
Satz 2.9

(i) Das Verfahren 2.7 stoppt immer in endlicher Zeit, ist also ein Algorithmus.

(ii) Der Algorithmus liefert einen Weg.

(iii) Ist v_0 ungerade, stoppt der Algorithmus im zweiten ungeraden Knoten.

(iv) Ist G eulersch (d.h. h ... ade Grad), stoppt der Algorithmus in v_0, lie ... lossenen Weg.



Beweis:

(iii) Ein gerader Knoten wird genauso oft verlassen wie betreten; also kann der Algorithmus in keinem davon stoppen, aber auch nicht im Startknoten, wenn dieser ungerade ist. Es bleibt nur der andere ungerade Knoten.

Satz 2.9

(i) Das Verfahren 2.7 stoppt immer in endlicher Zeit, ist also ein Algorithmus.

(ii) Der Algorithmus liefert einen Weg.

(iii) Ist v_0 ungerade, stoppt der Algorithmus im zweiten ungeraden Knoten.

(iv) Ist G eulersch (d.h. haben alle Knoten gerade Grad), stoppt der Algorithmus in v_0, liefert also einen geschlossenen Weg.

Beweis:

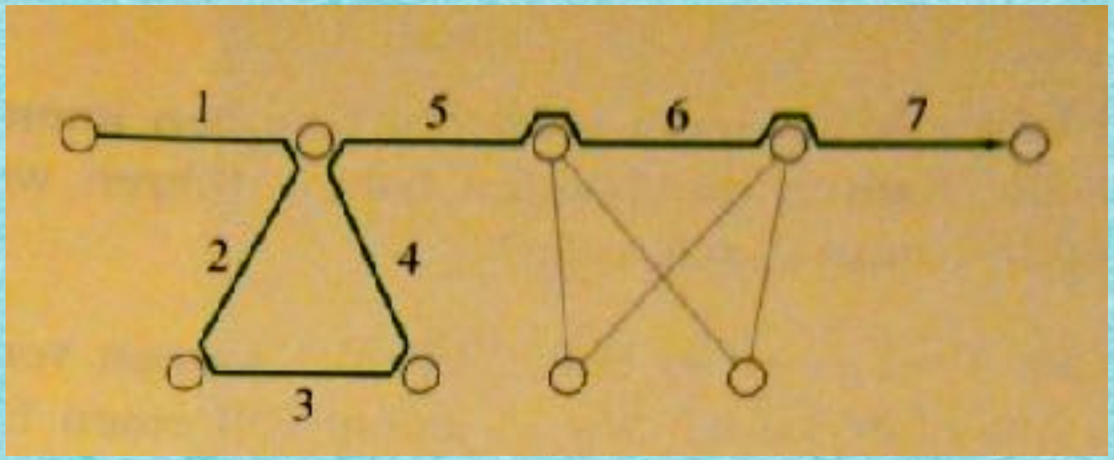
(iv) Wie in (iii) kann der Algorithmus in keinem geraden Knoten stoppen, der nicht der Startknoten ist.
Es bleibt nur der Startknoten.

Satz 2.10

Wenn Algorithmus 2.7 stoppt, bleibt ein eulerscher Graph zurück, also ein Graph mit lauter geraden Knoten.

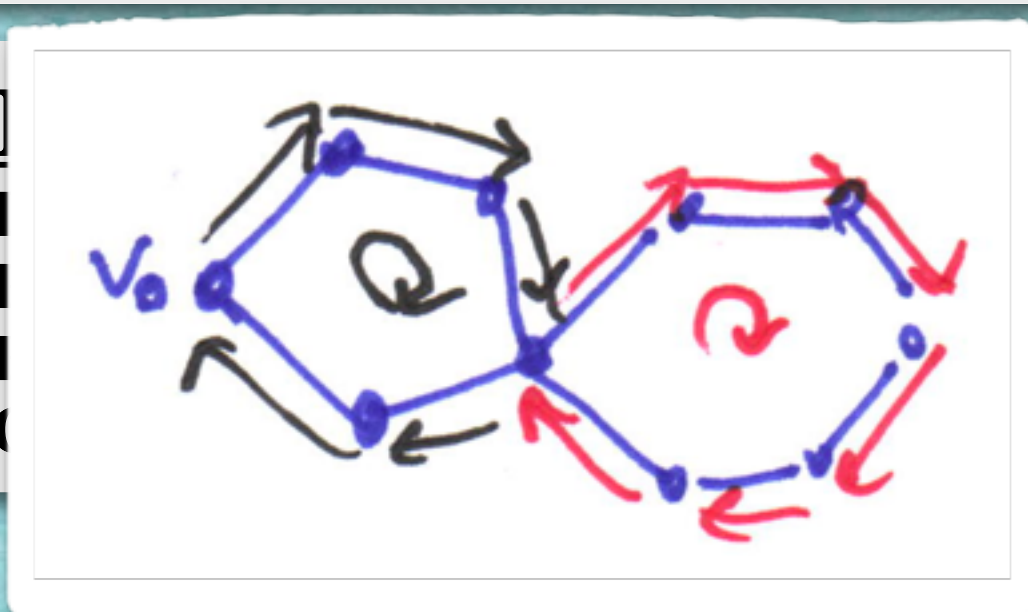
Beweis

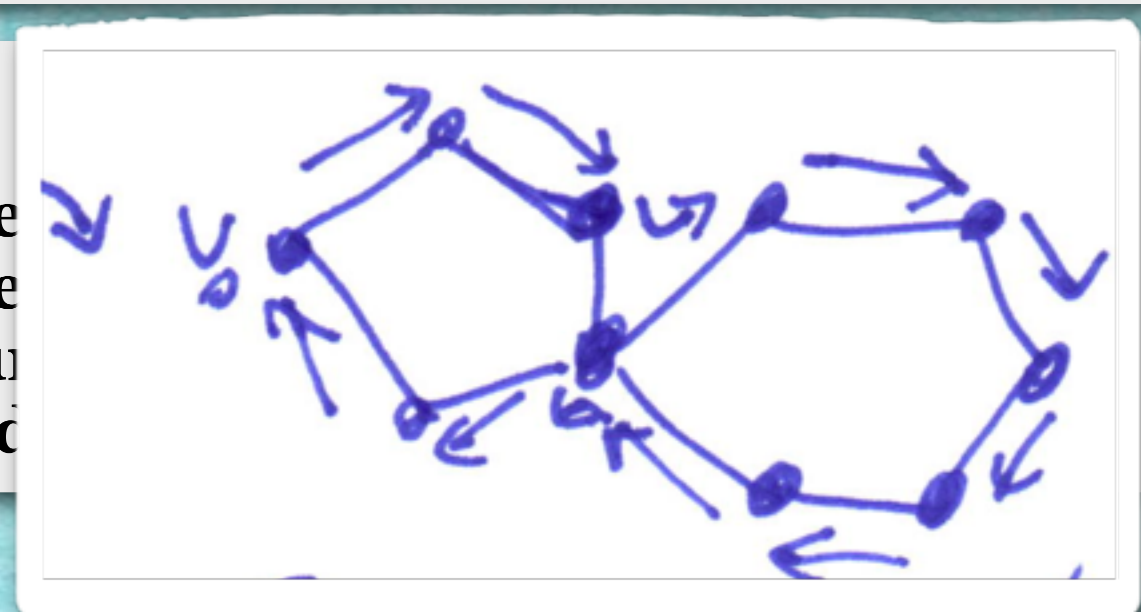
Durch Entfernen des konstruierten Weges wird für jeden geraden Knoten der Grad um einen gerade Zahl geändert, bleibt also gerade. Für einen der ggf. vorhandenen ungeraden Knoten ändert sich der Grad um eine ungerade Zahl, wird also auch gerade.



Satz 2.10

Wenn Algorithmus 2.7 stoppt, bleibt ein eulerscher Graph zurück, also ein Graph mit lauter geraden Knoten.





Beobachtung 2.11

(i) Zwei geschlossene Wege mit einem gemeinsamen Knoten kann man in einen geschlossenen Weg verwandeln.

(ii) Man kann aus allen Wegen einen Weg machen, wenn der Graph zusammenhängend ist.

Algorithmus 2.8

INPUT:	Ein zusammenhängender Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten
OUTPUT:	Ein Eulerweg bzw. eine Eulertour in G

A. Wähle einen Startknoten v (ungerade falls vorhanden);

B. Verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W von v aus zu bestimmen;

C. Solange es noch unbenutzte Kanten gibt:

  C.1. Wähle einen von W besuchten Knoten w mit positivem Grad im Restgraphen;

  C.2. Verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W′ von w aus zu bestimmen;

  C.3. Verschmelze W und W′

D. STOP

Satz 2.12

(i) Das Verfahren 2.8 ist endlich.

(ii) Alle Schritte lassen sich korrekt ausführen.

(iii) Algorithmus 2.8 liefert einen Eulerweg bzw. eine Eulertour.

Beweis:

(i) Wie gehabt: Es gibt nur endlich viele Kanten, also muss das Verfahren irgendwann stoppen.

Satz 2.12

(i) Das Verfahren 2.8 ist endlich.

(ii) Alle Schritte lassen sich korrekt ausführen.

(iii) Algorithmus 2.8 liefert einen Eulerweg bzw. eine Eulertour.

Beweis:

(i) **Wie gehabt: Es gibt nur endlich viele Kanten, also muss das Verfahren irgendwann stoppen.**

Algorithmus 2.8

INPUT:	Ein zusammenhängender Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten
OUTPUT:	Ein Eulerweg bzw. eine Eulertour in G

A. Wähle einen Startknoten v (ungerade falls vorhanden);

B. Verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W von v aus zu bestimmen;

C. Solange es noch unbenutzte Kanten gibt:

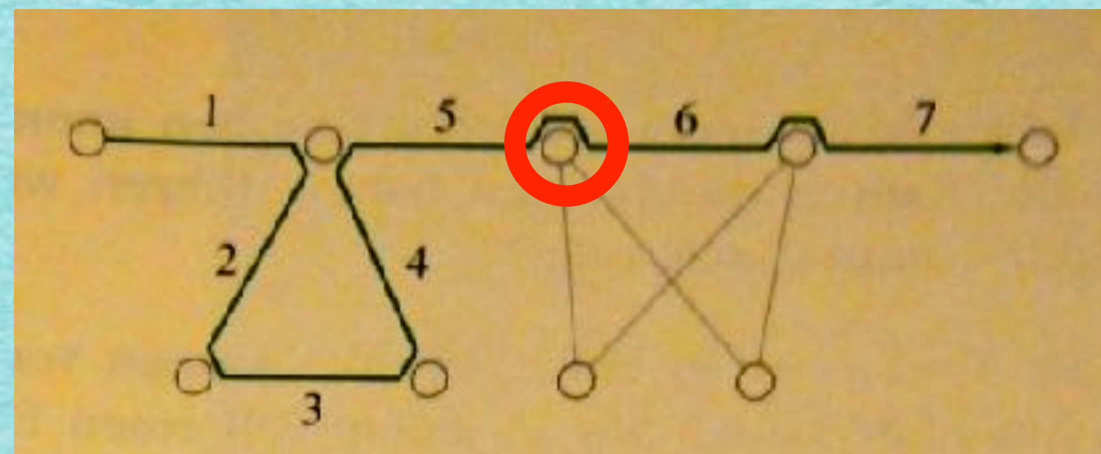
  C.1. Wähle einen von W besuchten Knoten w mit positivem Grad im Restgraphen;

  C.2. Verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W′ von w aus zu bestimmen;

  C.3. Verschmelze W und W′

D. STOP

(Beweis Satz 2.12, (ii))



(ii) **Solange es noch unbenutzte Kanten gibt, kann man diese auch von den benutzten Kanten aus besuchen:**
Weil G zusammenhängend ist, muss es einen Knoten geben, der sowohl zu einer benutzten als auch zu einer unbenutzten Kante inzident ist.

(Beweis Satz 2.12, (iii))

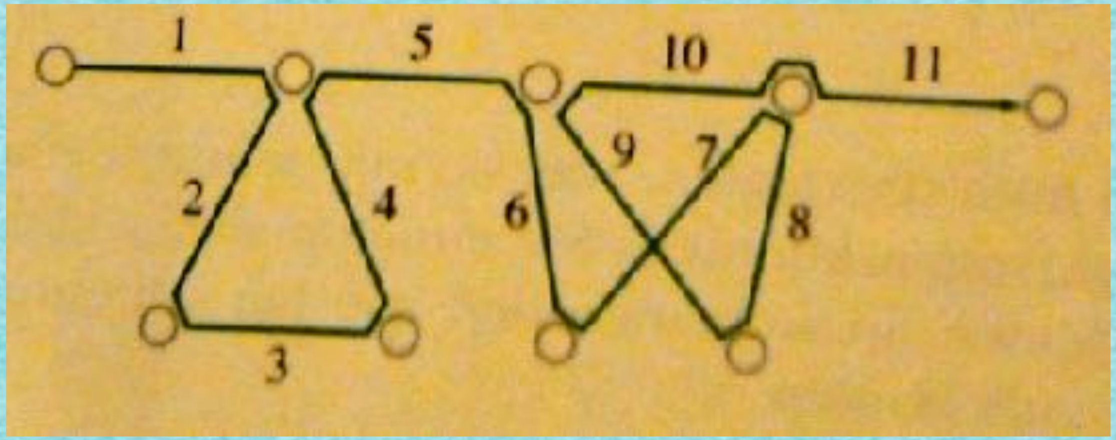
Satz 2.12

(i) Das Verfahren 2.8 ist endlich.

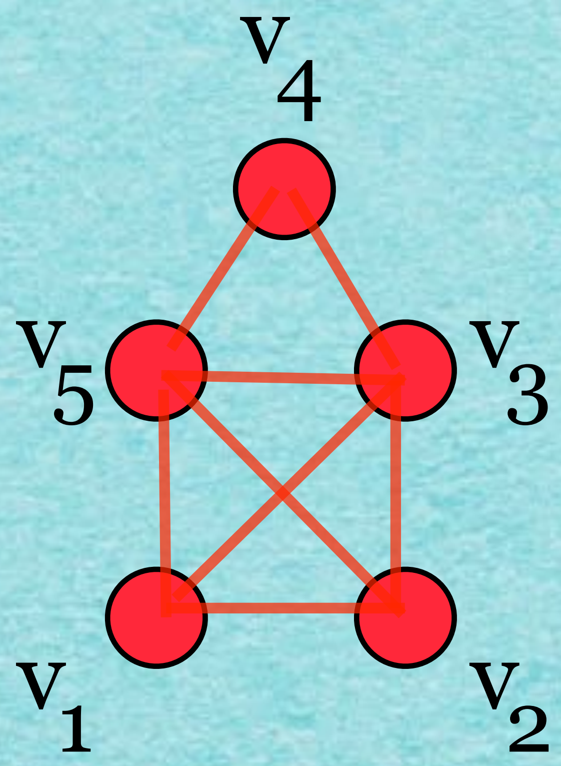
(ii) Alle Schritte lassen sich korrekt ausführen.

(iii) Algorithmus 2.8 liefert einen Eulerweg bzw. eine Eulertour.

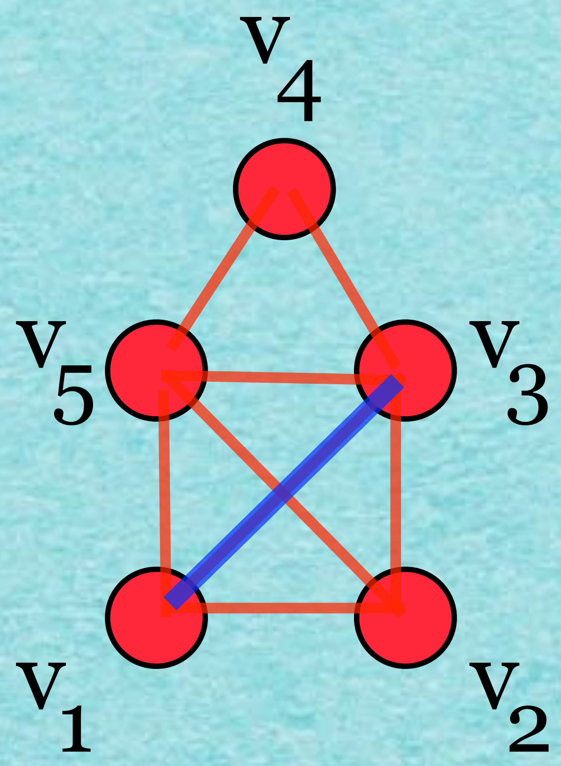
(iii) **Am Ende haben wir einen Weg und es gibt keine unbenutzten Kanten mehr!**



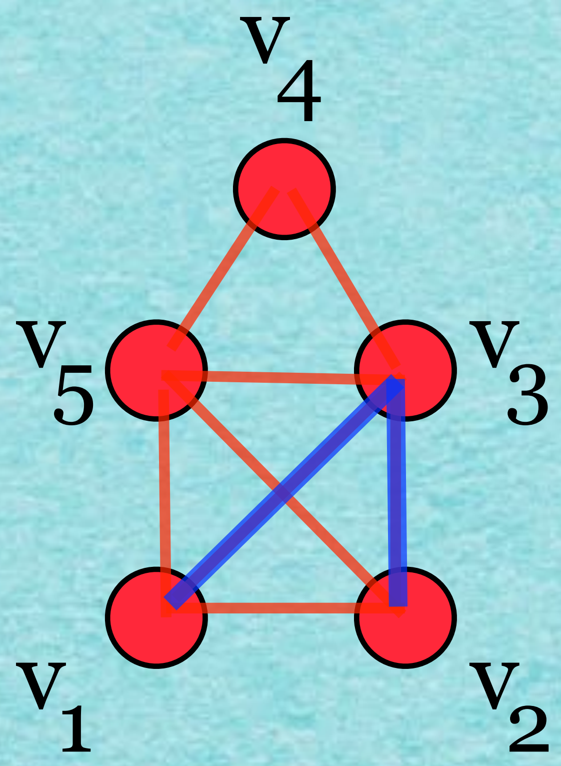
Es geht auch anders!



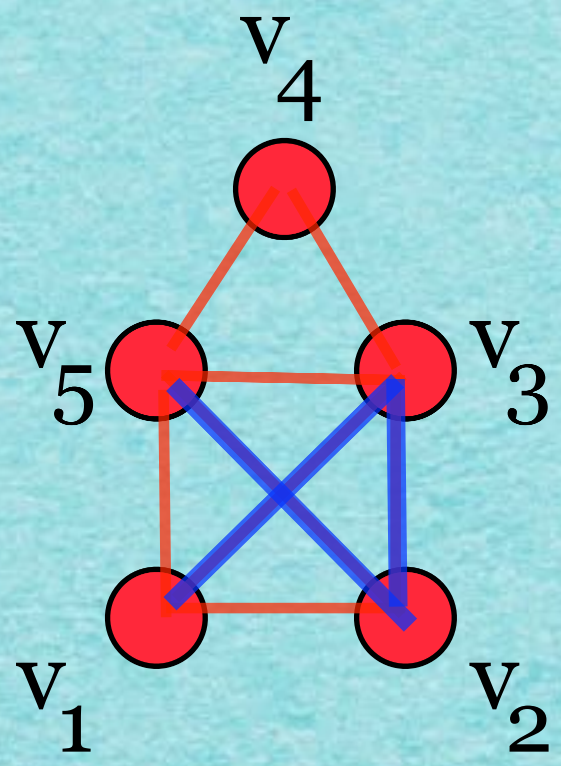
Es geht auch anders!



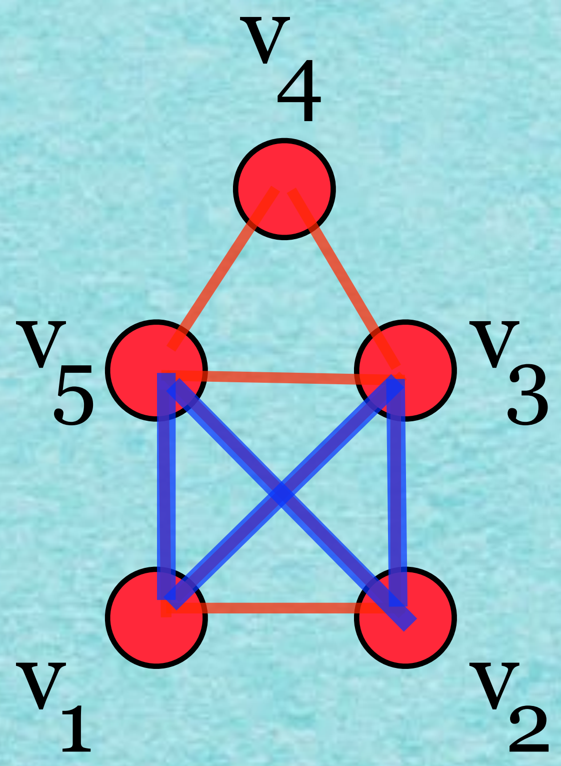
Es geht auch anders!



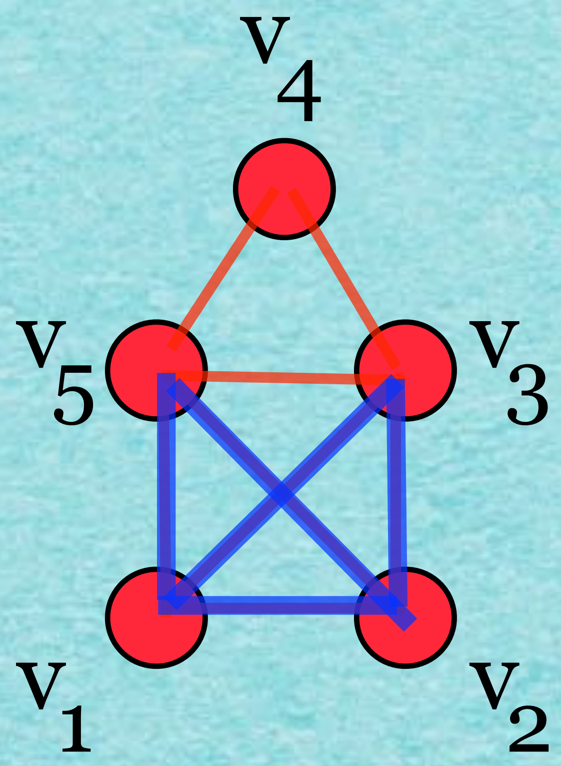
Es geht auch anders!



Es geht auch anders!



Es geht auch anders!

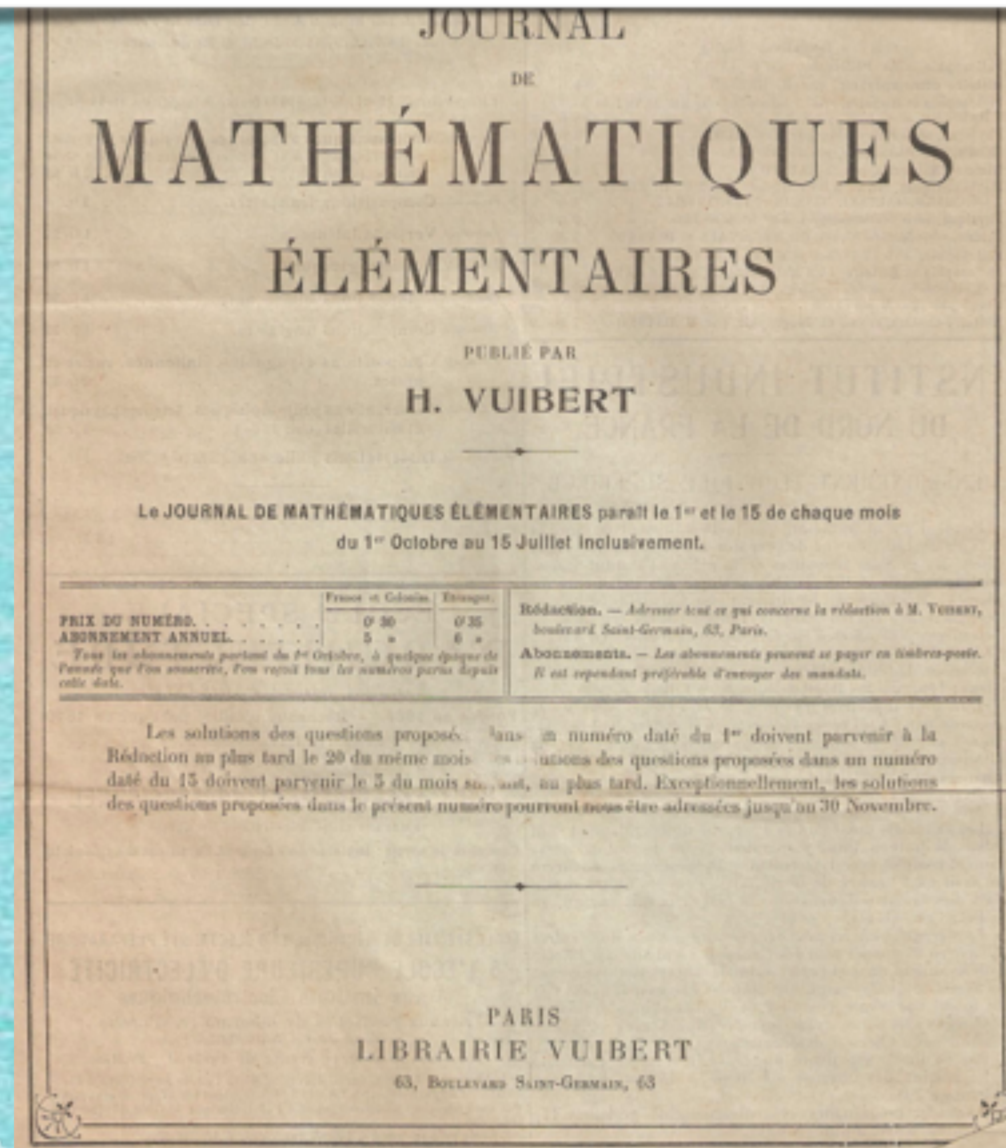


Wir hinterlassen Kanten?!

Algorithmus 2.13

Algorithmus von Fleury

^ Fleury, M. (1883), "Deux problèmes de Géométrie de situation", *Journal de mathématiques élémentaires*, 2nd ser. (in French), **2**: 257–261.


JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

PUBLIÉ PAR

H. VUIBERT

Le JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES paraît le 1er et le 15 de chaque mois du 1er Octobre au 15 Juillet inclusivement.

	France et Colonies	Étranger
PRIX DU NUMÉRO.	0f 30	0f 35
ABONNEMENT ANNUEL.	5 »	6 »

Tous les abonnements partent du 1er Octobre, à quelque époque de l'année que l'on souscrive, l'on reçoit tous les numéros parus depuis cette date.

Rédaction. — *Adresser tout ce qui concerne la rédaction à M. Vuibert, boulevard Saint-Germain, 63, Paris.*

Abonnements. — *Les abonnements peuvent se payer en timbres-poste. Il est cependant préférable d'envoyer des mandats.*

Les solutions des questions proposé[illegible] dans [illegible] numéro daté du 1er doivent parvenir à la Rédaction au plus tard le 20 du même mois [illegible] [illegible]utions des questions proposées dans un numéro daté du 15 doivent parvenir le 5 du mois su[illegible]nt, au plus tard. Exceptionnellement, les solutions des questions proposées dans le présent numéro pourront nous être adressées jusqu'au 30 Novembre.

PARIS

LIBRAIRIE VUIBERT

63, Boulevard Saint-Germain, 63

Algorithmus 2.13

Algorithmus von Fleury

<u>INPUT:</u> Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten

<u>OUTPUT:</u> Ein Weg in G.

1. Starte in einem Knoten v_0 (ungerade, sonst beliebig);

2. Solange es eine zum gegenwärtigen Knoten v_i inzidente unbenutzte Kante $\{v_i, v_j\}$ gibt:

   2.1. Wähle eine dieser Kanten aus, $e_i = \{v_i, v_j\}$ der den Restgraphen zshgd. lässt

   2.2. Laufe zum Nachbarknoten v_j

   2.3. Lösche die Kante aus der Liste der unbenutzten Kanten.

   2.4. Setze $v_{i+1} := v_j$

   2.5. Setze $i := i+1$

3. STOP

Satz 2.14

(i) Das Verfahren 2.13 ist endlich.

(ii) Alle Schritte lassen sich korrekt ausführen.

(iii) Algorithmus 2.13 liefert einen Eulerweg bzw. eine Eulertour.

Beweis:

(i) **Wie gehabt! Es gibt nur endlich viele Kanten, also muss das Verfahren irgendwann stoppen.**

Algorithmus 2.13

Algorithmus von Fleury

INPUT: Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten

OUTPUT: Ein Weg in G.

1. Starte in einem Knoten v_0 (ungerade, sonst beliebig);
2. Solange es eine zum gegenwärtigen Knoten v_i inzidente unbenutzte Kante $\{v_i, v_j\}$ gibt:

   2.1. Wähle eine dieser Kanten aus, $e_i = \{v_i, v_j\}$, der den Restgraphen zshgd. lässt

   2.2. Laufe zum Nachbarknoten v_j

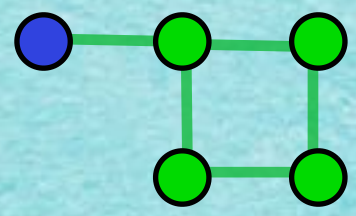
   2.3. Lösche die Kante aus der Liste der unbenutzten Kanten.

   2.4. Setze $v_{i+1} := v_j$

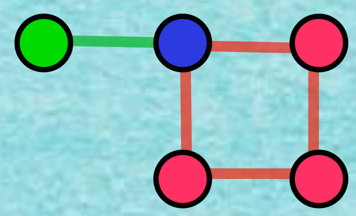
   2.5. Setze $i := i+1$
3. STOP

(Beweis Satz 2.14, (ii))

(ii) **Kritisch ist 2.1. Wenn es nur eine Kante gibt, um den aktuellen Knoten zu verlassen, bleibt der Restgraph nach deren Benutzung zusammenhängend.**



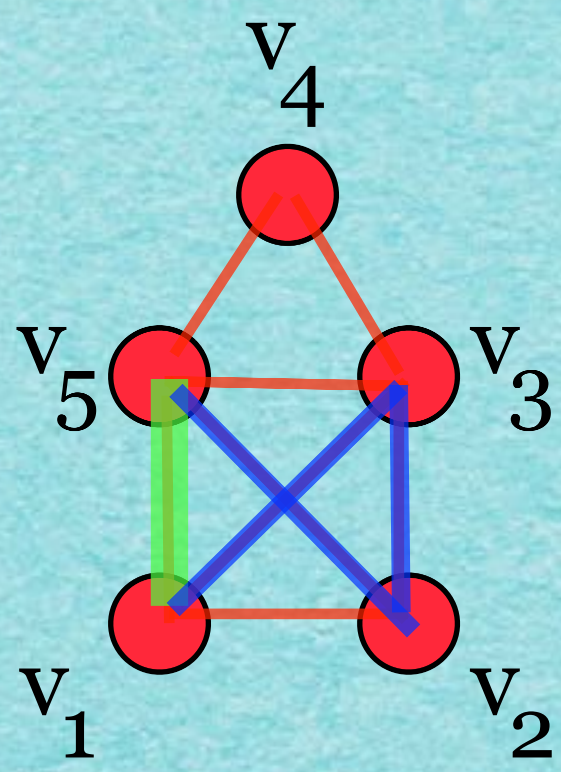
Wenn es mehr als eine Kante gibt, um den aktuellen Knoten zu verlassen, von denen eine bei Entfernen den Graphen unzusammenhängend macht, sind alle anderen Kanten in geschlossenenen Wegen enthalten.



Also wählt man eine der anderen.

(Beweis Satz 2.14, (iii))

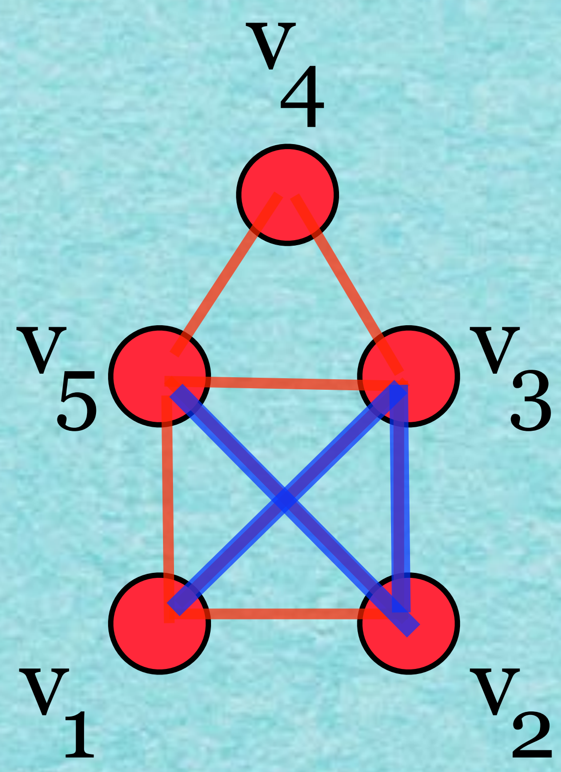
(iii) **Nach Konstruktion bekommen wir einen Weg. Man hat immer einen zusammenhängenden Graphen, kann also keine Kanten zurücklassen.**



Wir hinterlassen keine Kanten!

(Beweis Satz 2.14, (iii))

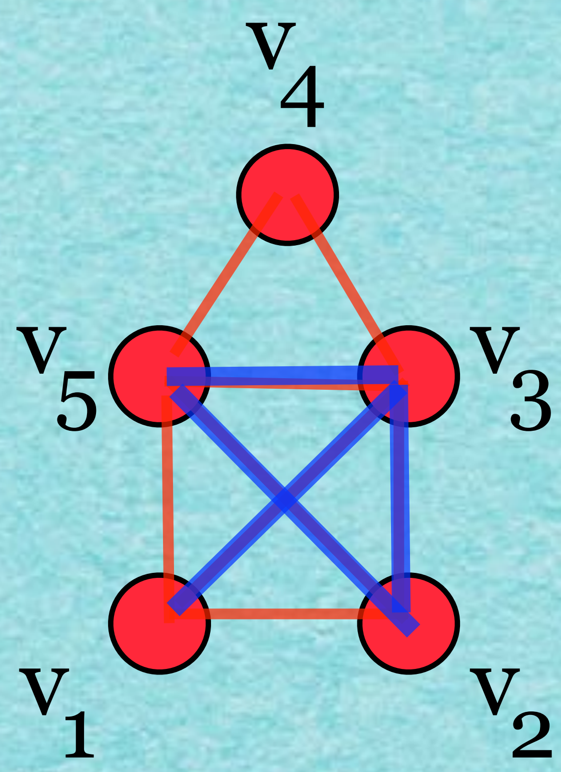
(iii) **Nach Konstruktion bekommen wir einen Weg. Man hat immer einen zusammenhängenden Graphen, kann also keine Kanten zurücklassen.**



Wir hinterlassen keine Kanten!

(Beweis Satz 2.14, (iii))

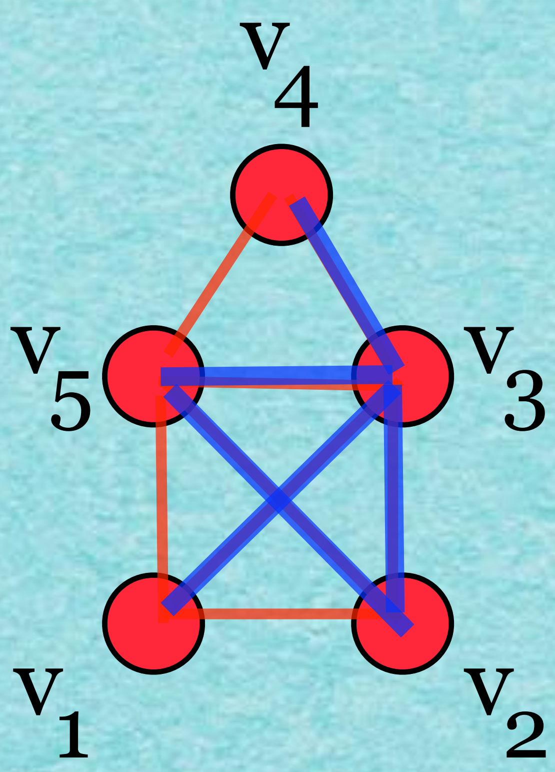
(iii) **Nach Konstruktion bekommen wir einen Weg. Man hat immer einen zusammenhängenden Graphen, kann also keine Kanten zurücklassen.**



Wir hinterlassen keine Kanten!

(Beweis Satz 2.14, (iii))

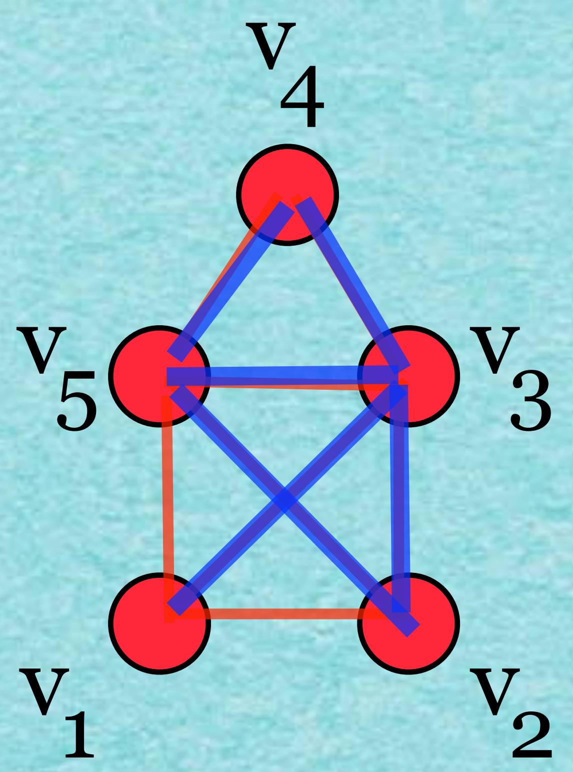
(iii) **Nach Konstruktion bekommen wir einen Weg. Man hat immer einen zusammenhängenden Graphen, kann also keine Kanten zurücklassen.**



Wir hinterlassen keine Kanten!

(Beweis Satz 2.14, (iii))

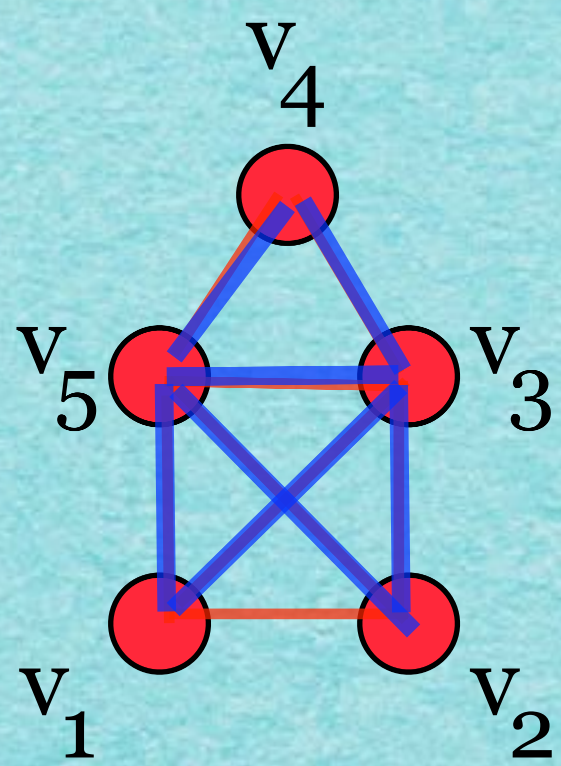
(iii) **Nach Konstruktion bekommen wir einen Weg. Man hat immer einen zusammenhängenden Graphen, kann also keine Kanten zurücklassen.**



Wir hinterlassen keine Kanten!

(Beweis Satz 2.14, (iii))

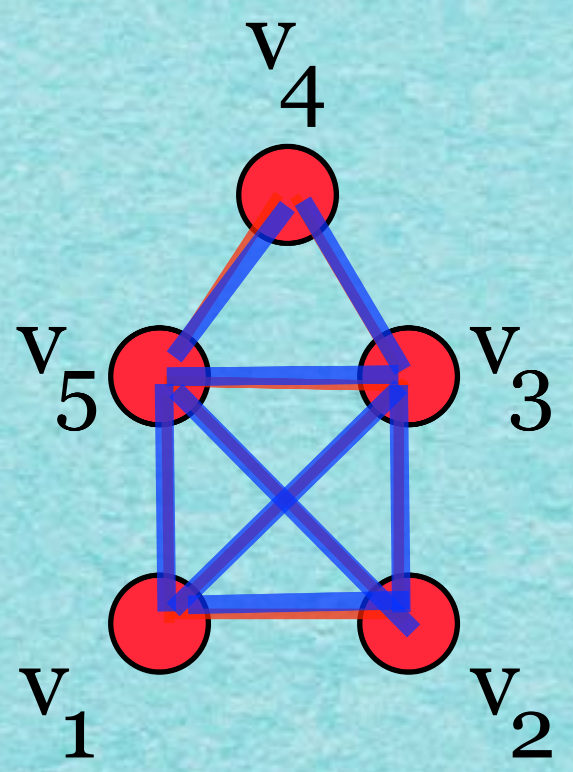
(iii) **Nach Konstruktion bekommen wir einen Weg. Man hat immer einen zusammenhängenden Graphen, kann also keine Kanten zurücklassen.**



Wir hinterlassen keine Kanten!

(Beweis Satz 2.14, (iii))

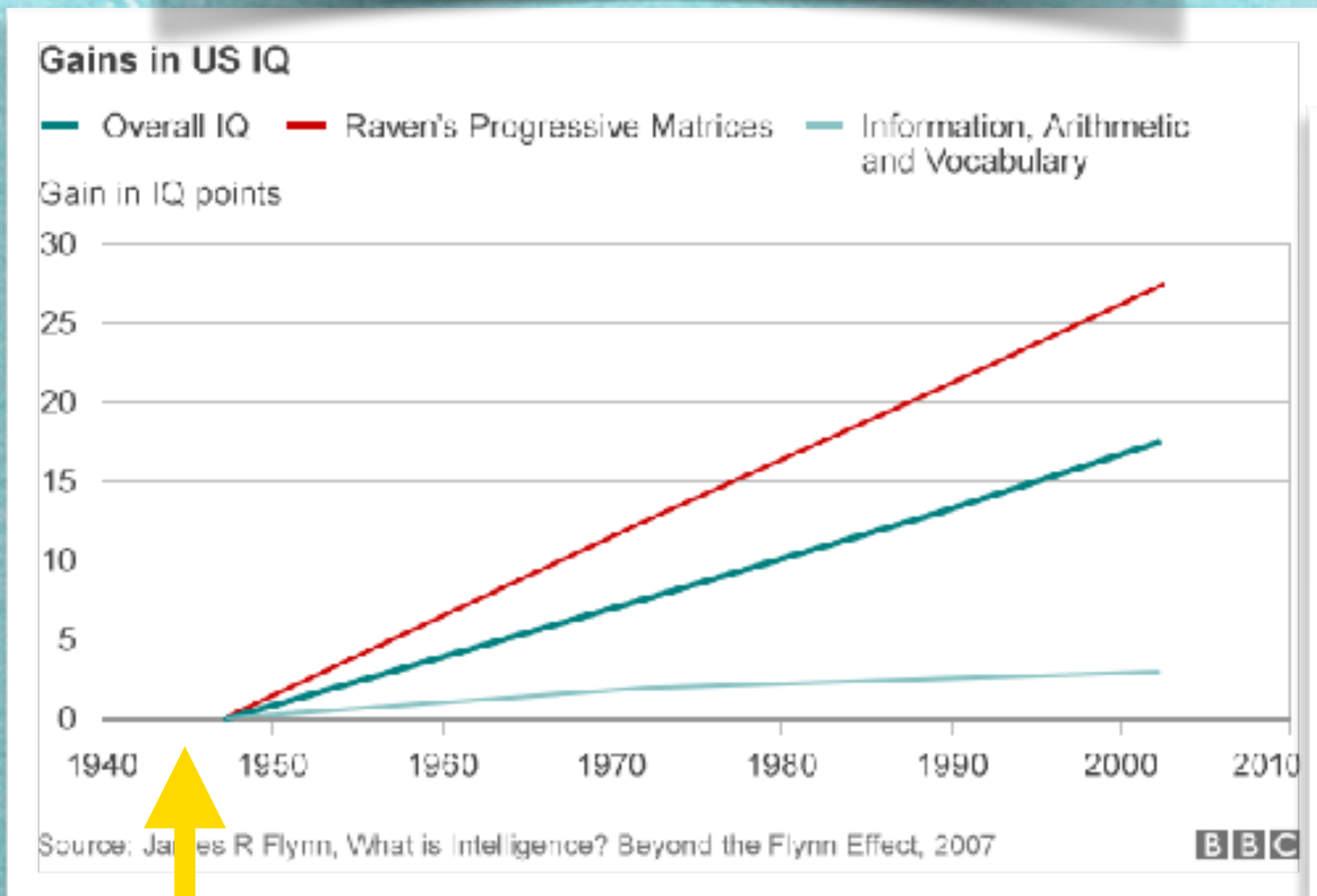
(iii) **Nach Konstruktion bekommen wir einen Weg. Man hat immer einen zusammenhängenden Graphen, kann also keine Kanten zurücklassen.**



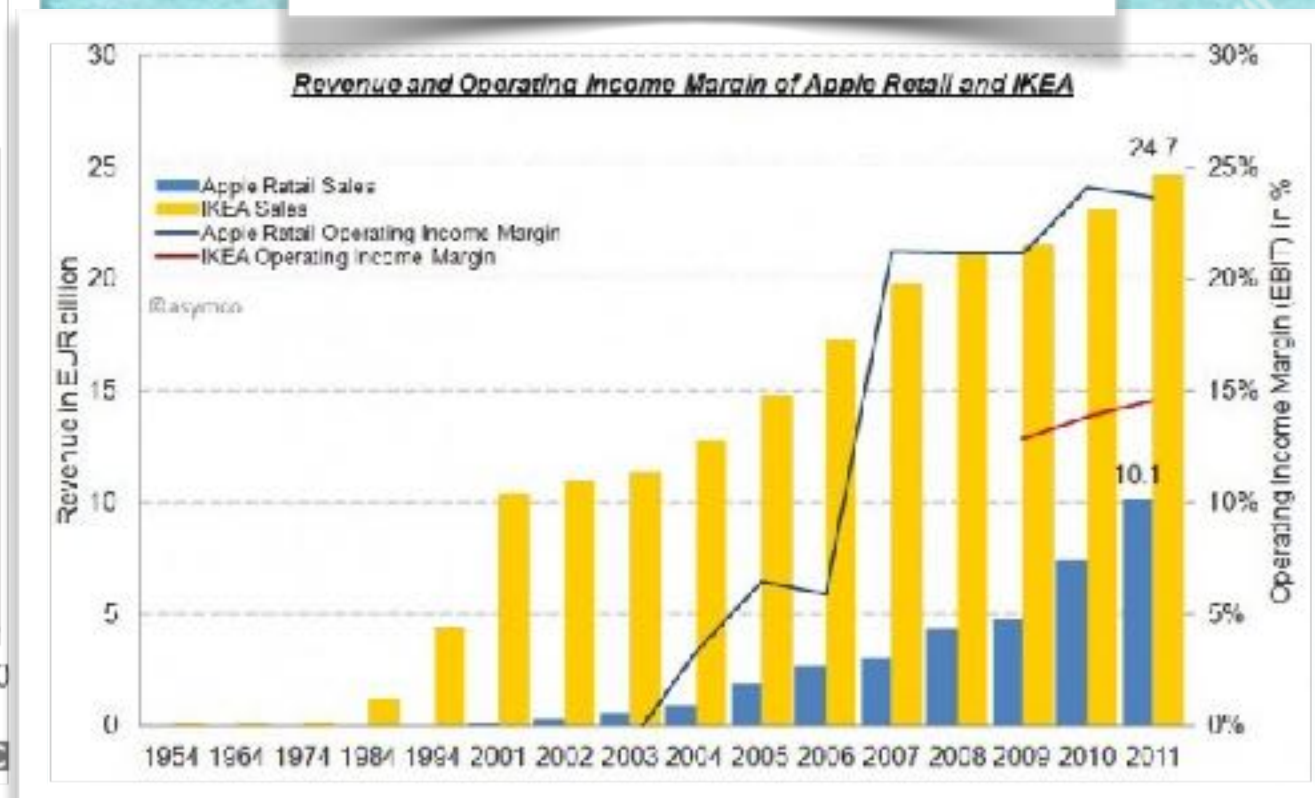
Wir hinterlassen keine Kanten!

Feeling smarter already?!

Intelligenz nimmt zu: „Flynn-Effekt“



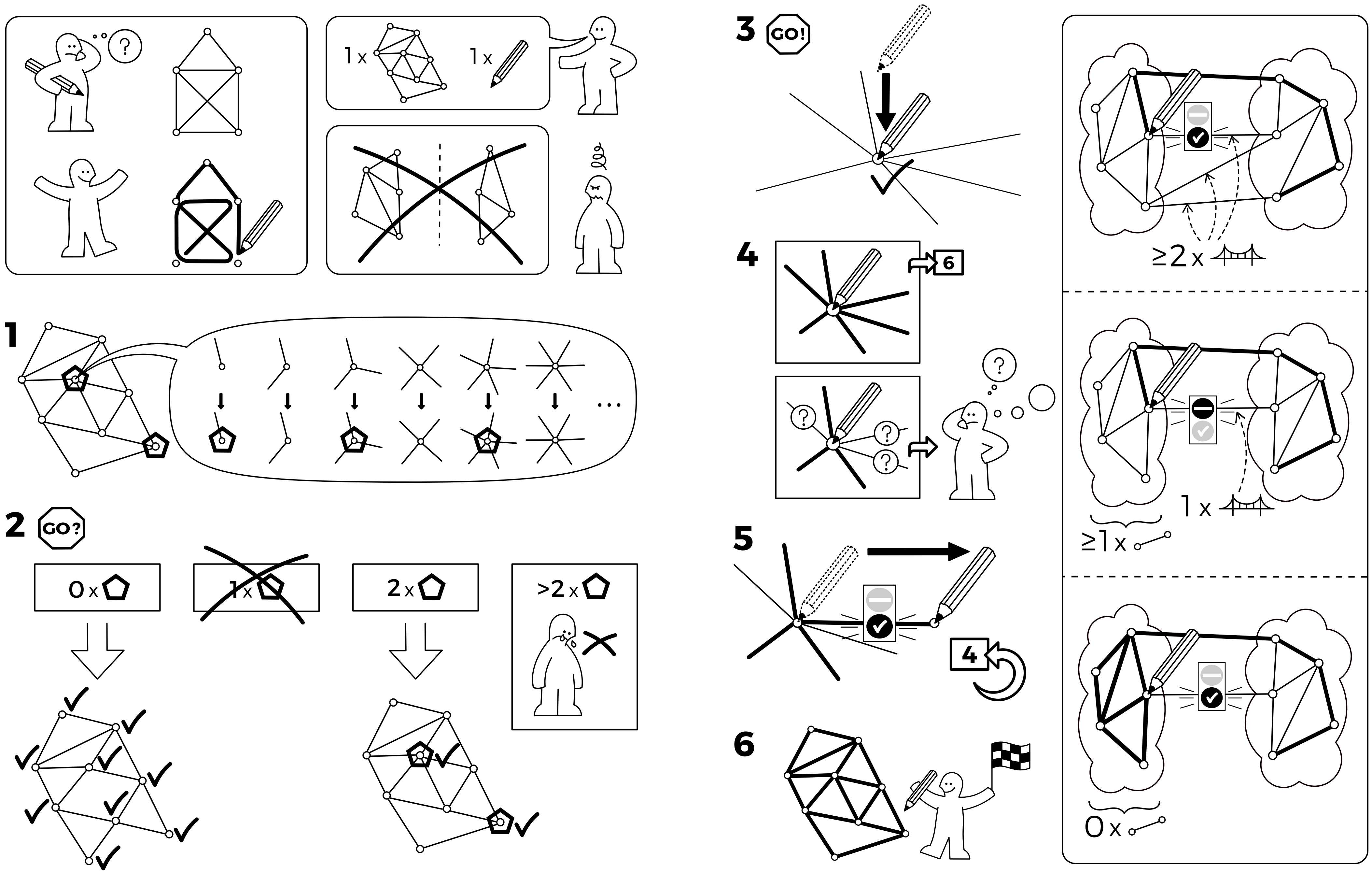
Type	Private
Industry	Retail
Founded	1943; 74 years ago Älmhult, Sweden[1][2]



ONE STRÖKE DRÅW

idea-instructions.com/euler-path/

IDEA



IDEA is a series of nonverbal algorithm assembly instructions by Sándor P. Fekete, Sebastian Morr, and Sebastian Stiller. They were originally created for Sándor's algorithms and datastructures lecture at TU Braunschweig, but we hope they will be useful in all sorts of context. We publish them here so that they can be used by teachers, students, and curious people alike. Visit the about page to learn more.

ZEIT ONLINE | Deutsche Mathematiker-Vereinigung | Bildung

lifehacker | boingboing | microsiervos

Technische Universität Braunschweig | c't magazin für computer technik | ScienceBlogs

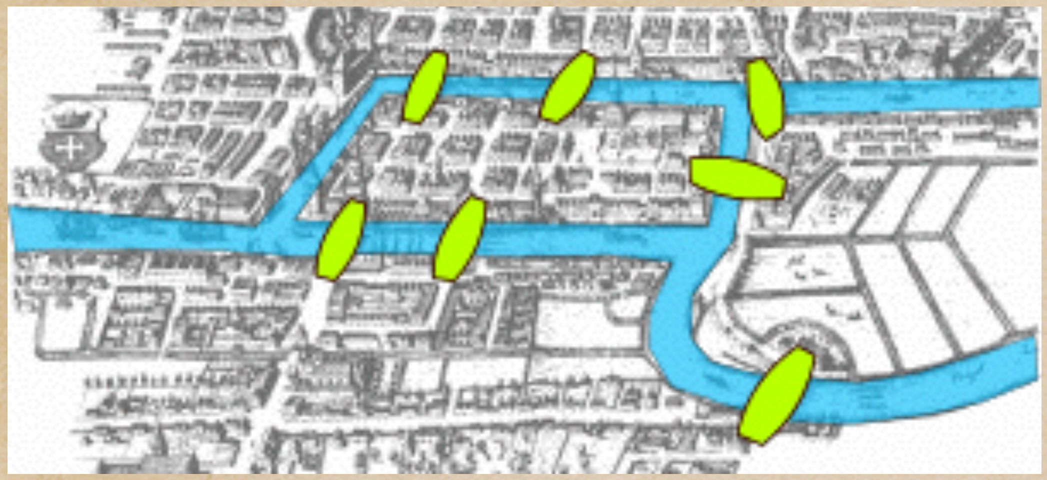
FLOWINGDATA | KOTTKE.ORG | Dice

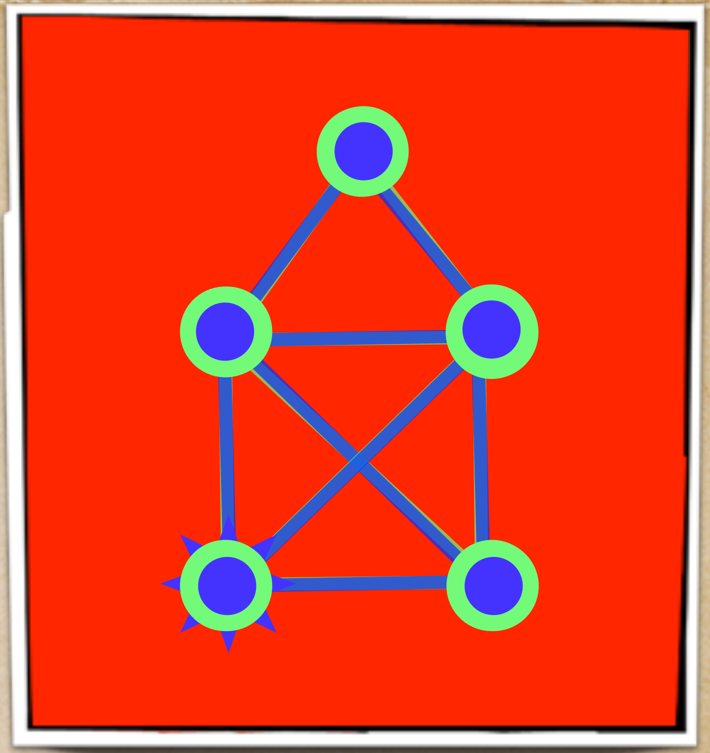
{EnthusiastiCon} | psfk | SoCG '18

Musik...

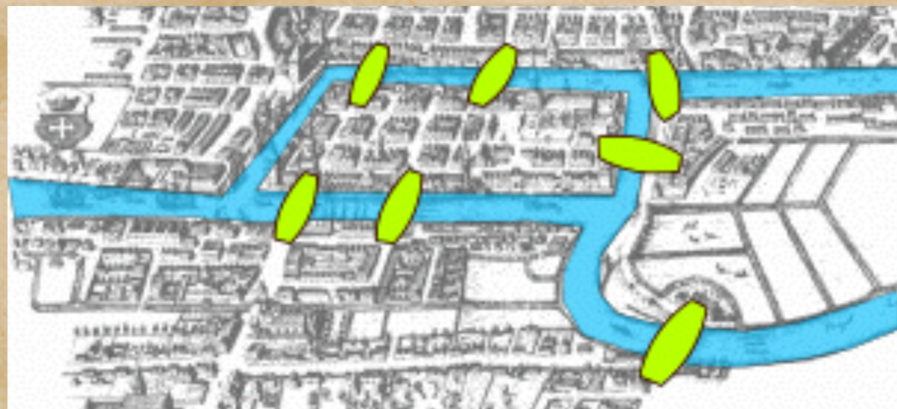
Euler Time!

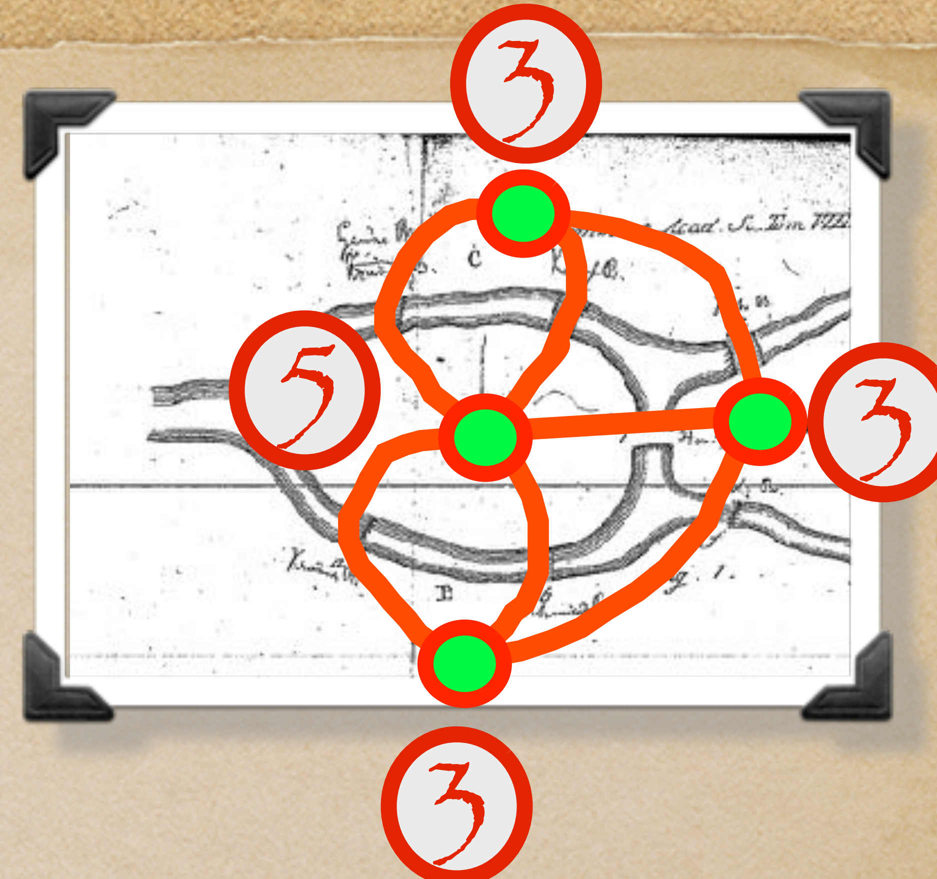
Some citizens of Königsberg
Were walking on the strand
Beside the river Pregel
With its seven bridges spanned





"Oh Euler, come and walk with us!"
Those burghers did beseech
"We'll walk the seven bridges o'er
And pass but once by each."





"It can't be done" then Euler cried.
"Here comes the Q. E. D.
Your islands are but vertices,
And all of odd degree!"

You can't walk this!


PROFS
@TUNRTABLES
Eure Profs legen auf!
18.11.2021


BONDI
THE ENDLESS SUMMER
"THE CROWN JEWEL"