Merkzettel ▷ Laufzeiten

Version – 18. Januar 2024

1 Definitionen

O-Notation Gibt eine obere Schranke für Funktionen. Gilt $f(n) \in O(g(n))$, so wächst $f(n)$ (asymptotisch) nicht schneller als $g(n)$ denn:

Es existieren zwei Konstanten $c \in \mathbb{R}^+$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$ gilt.

Ω-Notation Gibt eine untere Schranke für Funktionen. Gilt $f(n) \in \Omega(g(n))$, so wächst $f(n)$ (asymptotisch) nicht langsamer als $g(n)$ denn:

Es existieren zwei Konstanten $c \in \mathbb{R}^+$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$ gilt.

Θ-Notation Gibt eine obere und untere Schranke für Funktionen. Gilt $f(n) \in \Theta(g(n))$, so wächst $f(n)$ (asymptotisch) wie $g(n)$ denn:

Es existieren drei Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ gilt.

Achtung: Man muss beachten, dass $O(g(n)), \Omega(g(n))$ und $\Theta(g(n))$ jeweils Mengen sind. Dazu gleich mehr. Erst einmal ein paar Beispiele!

2 O-Notation

Tipps zum Abschätzen von Funktionen bei der O-Notation:

1. Bei Polynomen können Subtrahenden einfach ignoriert werden. Das Weglassen macht die Funktion nur größer.
2. Bei Polynomen können alle Exponenten von (positiven) Summanden auf den Grad des Polynoms hochgestuft werden. Das macht die Funktion größer.
3. Bei Funktionen die kein Polynom sind, können andere Methoden zum Abschätzen vorteilhaft sein, z.B. das Benutzen von monoton-wachsenden Funktionen (Logarithmieren, Potenzieren[1], Wurzelziehen, etc.).

2.1 Polynome

Betrachten wir zunächst folgendes Polynom 6. Grades: $f(n) := 4n^6 - 3n^5 + 2n^4 - 12n^3 - n^2 + 12n - 7$.

$f(n) \overset{\text{Tipp 1}}{\leq} 4n^6 + 2n^4 + 12n \overset{\text{Tipp 2}}{\leq} 4n^6 + 2n^6 + 12n^6 = 18n^6$ Also ist $f(n) \leq 18n^6$, d.h. $c = 18$ und $n_0 = 1$, womit $f(n) \in O(n^6)$ folgt.

[1] Vorsicht bei negativen Vorzeichen. Das verschwindet, wenn mit einer gerade Zahl potenziert wird!

2.2 Logarithmen

Komplizierter wird es folgende Aussage zu beweisen: Für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt $(\log n)^a \in O(n^b)$. Den Beweis, dass $\log n \in O(n)$ liegt, lassen wir hier weg (bietet aber eine gute Übung, das einmal zu beweisen). Etwas stärker: Man kann zeigen, dass die Konstante in der O-Notation beliebig wählbar ist!

Betrachten wir nun beliebige a und b. Nehmen wir zunächst an, dass die Aussage gilt, d.h. $(\log n)^a \leq n^b$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
(\log n)^a \leq n^b &\overset{\text{Tipp 3}}{\Leftrightarrow} \log((\log n)^a) \leq \log n^b \\
&\Leftrightarrow a \cdot \log\log n \leq b \cdot \log n \\
&\Leftrightarrow \log\log n \leq \frac{b}{a} \log n \\
&\Leftrightarrow \log m \leq \frac{b}{a} m
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile kommt durch Substitution von $\log n$ durch m zustande. Bei dieser untersten Zeile wissen wir, dass sie gilt, da $\log m \in O(m)$ gilt. Durch die gdw. Beziehungen zwischen den Umformungen kann nun gefolgert werden, dass die zu zeigen Aussage auch gilt.

2.3 Gegenbeispiele

Natürlich kann es passieren, dass eine Aussage zu widerlegen ist. Betrachte beispielsweise die zwei Funktionen 3^n und 2^n. Es gilt nicht $3^n \in O(2^n)$. Warum? Angenommen, diese Aussage gilt. Dann muss es ein $c \in \mathbb{R}^+$ geben, sodass $3^n \leq c \cdot 2^n$ ab einem bestimmten n_0 gilt. Stellen wir die Ungleichung um, erhalten wir $\frac{3^n}{2^n} = 1.5^n \leq c$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} 1.5^n = \infty$ gilt, kann es kein solches c geben.

3 Ω-Notation

Tipps zum Abschätzen von Funktionen bei der Ω-Notation:

1. Bei Polynomen können (positive) Summanden einfach ignoriert werden. Das Weglassen macht die Funktion nur kleiner.

2. Bei Polynomen können alle Exponenten von Subtrahenden **nicht** auf den Grad des Polynoms hochgestuft werden. Das würde die Funktion zwar kleiner machen, aber unter Umständen wird dadurch die Funktion negativ.

3. Bei Funktionen die kein Polynom sind, können andere Methoden zum Abschätzen vorteilhaft sein, z.B. das Benutzen von monoton-wachsenden Funktionen (Logarithmieren, Potenzieren, Wurzelziehen, etc.).

3.1 Polynome

Betrachten wir wieder die Funktion aus Abschnitt 2.1: $f(n) := 4n^6 - 3n^5 + 2n^4 - 12n^3 - n^2 + 12n - 7$.

Zunächst kann man sehen, dass $12n - 7$ für alle $n \geq 1$ größer als 0 ist. Lässt man diesen Term weg, so wird die Funktion kleiner. Gleiches Spiel haben wir mit $2n^4 - n^2$. Also ist $f(n) \geq 4n^6 - 3n^5 - 12n^3$. Nun wird es interessant: Durch geschicktes Wählen von n_0 und Koeffizienten in den Termen, können wir $f(n)$ auf eine Form wie $c \cdot n^6$ abschätzen. Unser Ziel: Schätze $-3n^5 - 12n^3$ so ab, dass es immer noch größer als $-4n^6$ ist. Was man schnell sehen kann: $-3n^5 \geq -n^6$ für $n \geq 3$ und $-12n^3 \geq -n^6$ für $n \geq 12^{\frac{1}{3}} > 2$. Also ist $-3n^5 - 12n^3 \geq -2n^6$ für $n \geq 3$.

Damit gilt also: $f(n) \geq 4n^6 - 2n^6 = 2n^6$ mit $n \geq 3$. Für die Ω-Notation wichtigen Konstanten sind also $c = 2$ und $n_0 = 3$

3.2 Logarithmen

Schauen wir uns folgende Funktion an: $f(n) := \log_2(n!)$. Wir wollen zeigen, dass $f(n) \in \Omega(n \log_2 n)$ gilt.

$$\begin{aligned}
\log_2(n!) = \log_2\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \log_2(i) \\
&\geq \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} \log_2(i) \\
&\geq \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} \log_2\left(\frac{n}{2}\right) \\
&= \frac{n}{2} \log_2\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}\left(\log_2(n) - 1\right) \in \Omega(n \log_2 n)
\end{aligned}$$

3.3 Gegenbeispiel

Genau wie bei der O-Notation gibt es auch hier Situationen, bei denen man ein Gegenbeispiel angeben muss. Sei zum Beispiel $f(n) = n^2$ und $g(n) = n^3$. Wir wollen zeigen, dass $n^2 \in \Omega(n^3)$ nicht gilt. Nehmen wir wieder an, dass es gilt. Dann gäbe es ein $c \in \mathbb{R}^+$ mit $n^2 \geq cn^3$. Auflösen nach c ergibt $\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \geq c$. Allerdings ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Somit kann es kein solches c geben.

4 Θ-Notation

Um zu zeigen, dass eine Funktion $f(n)$ in $\Theta(g(n))$ liegt, kann man den Beweis in zwei Teile zerlegen: Man zeigt (1) $f(n) \in O(g(n))$ und (2) $f(n) \in \Omega(g(n))$.

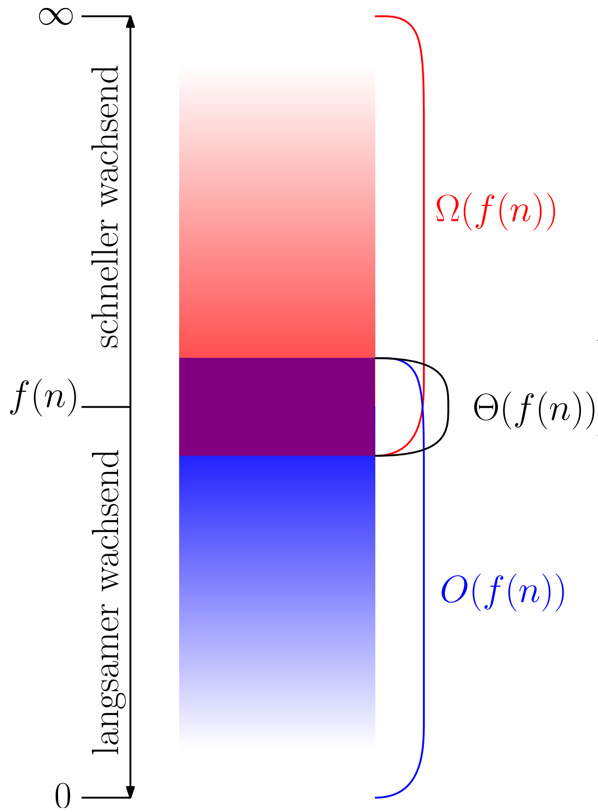
Möchte man zeigen, dass $f(n)$ nicht in $\Theta(g(n))$ liegt, muss man zeigen, dass $f(n)$ entweder nicht in $O(g(n))$ oder nicht in $\Omega(g(n))$ liegt.

5 Mengenbeziehungen

Wie bereits erwähnt, ist $O(g(n))$ eine Menge von Funktionen $f(n)$ für die gilt $f(n) \in O(g(n))$ (analog für Ω und Θ). Nun kann man sich überlegen, wie zwei Klassen zueinander stehen können. Seien A und B zwei solche Klassen. Wir wollen vier Beziehungen unterscheiden:

- $A \subsetneq B$, wenn jede Funktion aus A auch in B enthalten ist.
- $A \supsetneq B$, wenn jede Funktion aus B auch in A enthalten ist.
- $A = B$, wenn jede Funktion aus A in B enthalten ist und andersherum.
- Keine der oben genannten.

Um einfach zu entscheiden, welche Beziehung zwei Klassen miteinander haben, schauen wir uns folgende Grafik an:



Die Grafik links zeigt uns an, welchen Bereich $\Omega(f(n))$, $\Theta(f(n))$ und $O(f(n))$ für eine fest gewählte Funktion $f(n)$ ausmachen.
Man erkennt, dass $\Omega(f(n))$ alle Funktionen enthält, die schneller wachsen (roter Bereich nach oben) und $O(f(n))$ alle Funktionen, die langsamer wachsen (blauer Bereich nach unten). Der purpurne Bereich (Schnitt vom O- und Ω-Bereich) enthält alle Funktionen, die wie $f(n)$ wachsen.
Nun kann man $f(n)$ entweder schneller oder langsamer wachsen lassen, wodurch sich die Bereiche verändern.

$f(n)$ **wird kleiner** Der rote Bereich wird größer, der blaue Bereich wird kleiner.

$f(n)$ **wird größer** Der rote Bereich wird kleiner, der blaue Bereich wird größer.

Es gilt also beispielsweise für zwei Funktionen $f(n)$ und $g(n)$ mit $f(n) \in O(g(n))$:

1. $O(f(n)) \subsetneq O(g(n))$, falls $f(n) \notin \Omega(g(n))$
2. $O(f(n)) = O(g(n))$, falls $f(n) \in \Omega(g(n))$.

Beispiel

Schauen wir uns ein konkretes Beispiel an: Sei $f(n) := 5n^2 + 2n + 3$ und $g(n) = 12n + 4$. Da $f(n) \in \Theta(n^2)$ und $g(n) \in \Theta(n)$ gilt, können wir auch $f'(n) = n^2$ und $g'(n) = n$ betrachten.

Klassen	$O(n)$	$\Theta(n)$	$\Omega(n)$
$O(n^2)$	$\supsetneq$	$\supsetneq$	X
$\Theta(n^2)$	X	X	$\subsetneq$
$\Omega(n^2)$	X	X	$\subsetneq$

Wie in der Tabelle zu sehen ist, kann es passieren, dass weder die eine Klasse in der anderen enthalten ist noch umgekehrt. In solchen Fällen kann man sich die Schnittmenge der beiden Klassen anschauen. Man kann zeigen, dass die folgende Aussage wahr ist:

$$O(f(n)) \cap \Omega(g(n)) \neq \emptyset \Longleftrightarrow g(n) \in O(f(n))$$