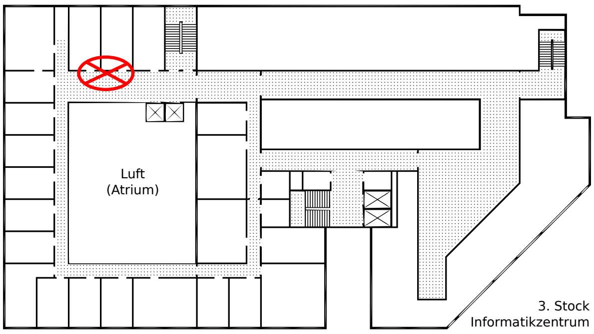
Algorithmen und Datenstrukturen II | **SoSe 2019**
Dr. Linda Kleist | **Abgabe:** 27.06.19
Arne Schmidt | **Rückgabe:** 03./05.07.19

Übungsblatt 4

Abgabe der Lösungen bis zum 27.06.19 um 13:15 Uhr im Hausaufgabenschrank bei Raum IZ 337 (siehe Skizze rechts). Es werden nur mit einem dokumentenechten Stift (kein Rot!) geschriebene Lösungen gewertet. **Bitte die Blätter zusammenheften und vorne deutlich mit eigenem Namen, Matrikel- und Gruppennummer, sowie Studiengang versehen!**



Dieses Blatt besteht aus einer Präsenzaufgabe, die in der kleinen Übung besprochen wird, sowie aus drei Hausaufgaben, die abgegeben werden müssen und bewertet werden.

Präsenzaufgabe:
In dieser Aufgabe betrachten wir Partition und wollen analysieren, wie schwer das Problem ist.

a) Zeige: Partition $\leq_p$ Subset Sum

b) Zeige: Partition ist NP-vollständig.

c) Welche Folge(n) hat es, falls es einen Polynomialzeit-Algorithmus für Partition gibt? – Dann gibt es einen Polynomialzeit-Algorithmus für...

...jedes Problem in NP. ☐

...jedes NP-vollständige Problem. ☐

...jedes NP-schwere Problem. ☐

Kreuze die richtige(n) Antwort(en) an und begründe deine Wahl.

Hausaufgabe 1 (GREEDY$_k$): (8 Punkte)
In dieser Aufgabe betrachten wir den Algorithmsu GREEDY$_k$ aus der Vorlesung. Wende GREEDY$_k$ auf die folgende Instanz an.

i	1	2	3	4
z_i	18	20	22	19
p_i	19	20	21	16

mit $Z = 41$ und $k = 2$

Gib dazu die folgenden Mengen bzw. Werte in jeder Iteration tabellarisch an:

- $M := \{i \mid v_i = 1\}$
- $\sum_{i \in M} z_i$
- $Z - \sum_{i \in M} z_i$
- $G :=$ Wert von GREEDY$_0((1-v_1)z_1, \ldots, (1-v_n)z_n, Z - \sum_{i \in M} z_i, p_1, \ldots, p_n)$
- G_k
- $S := \{i \mid x_i = 1\}$

Achte darauf, dass M mit einer kleinsten Menge anfängt und mit einer größten endet. Zusätzlich soll M lexikographisch sortiert sein: für zwei gleichgroße Mengen M_1 und M_2 kommt M_1 vor M_2, falls das kleinste Element $x \in M_1 \setminus M_2$ kleiner ist als das kleinste Element $y \in M_2 \setminus M_1$.
(Hinweis: Die Menge $X \setminus Y$ enthält Elemente aus X, die nicht in Y vorkommen.)

Hausaufgabe 2 (Approximation für Hörsaalbelegungsproblem): (4 Punkte)
Betrachte die folgende Strategie für das Hörsaalbelegungsproblem: Sei I ein Intervall, dass die kleinste Anzahl an Überlappungen mit anderen Intervallen besitzt. Nimm I in die Lösung auf, lösche alle Intervalle, die I schneiden, und wiederhole den Vorgang auf den restlichen Intervallen.
Zeige: Diese Strategie für das Hörsaalbelegungsproblem liefert eine 2-Approximation.
(Hinweis: Mit wie vielen Intervallen einer optimalen Lösung kann sich ein Intervall der erhaltenen Lösung überlappen?)

Hausaufgabe 3 (Approximation mit GREEDY$_0$): (5+3 Punkte)
Wir betrachten den Algorithmus GREEDY$_0$ für Instanzen mit besonderen Eigenschaften:
(i) jedes Objekt besitzt ein Gewicht von höchstens $\frac{Z}{\alpha}$ für ein festes $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$,
(ii) die Summe aller z_i überschreitet die Kapazität Z. O.B.d.A. nehmen wir an, dass die Objekte bereits nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend sortiert sind.

a) Zeige: GREEDY$_0$ liefert auf Instanzen mit Eigenschaften (i) und (ii) eine $(1 - \frac{1}{\alpha})$-Approximation.[1]
(Hinweis: Zeige zunächst, dass folgende Ungleichung gilt: Sei das $(k+1)$-ste Objekt das erste Objekt, welches GREEDY$_0$ nicht aufnimmt, und sei OPT der optimale Lösungswert. Dann gilt: $(\alpha - 1)p_{k+1} \leq \sum_{i=1}^{k} p_i \leq \text{OPT} \leq \sum_{i=1}^{k+1} p_i$.)

b) Zeige: Der Approximationsfaktor ist bestmöglich. D.h., für jedes α und für jedes c mit $1 - \frac{1}{\alpha} < c \leq 1$ ist GREEDY$_0$ auf diesen Instanzen keine c-Approximation.

[1] Falls es Schwierigkeiten gibt, diese Aufgabe zu lösen, nimm an, dass $z_i = p_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt. Ein Beweis dieser Aufgabe unter dieser zusätzlichen Annahme bringt allerdings weniger Punkte!