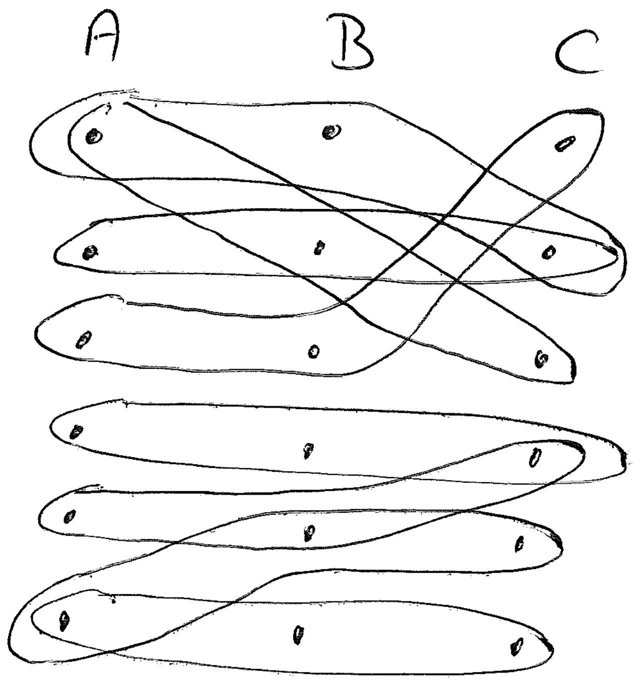
3D-Matching.

Situation:

Der Kurs "Tierpflege I" startet ein Experiment.
Die Studierenden sollen sich in Paaren zusammenfinden und dann für einige Zeit ein Tier aus einem Pflegeheim aufnehmen. Damit es spannend wird, teilt der Dozent alle studierende in zwei Gruppen auf: A und B.
Nun soll jeder in A eine Person in B finden und ein Tier aussuchen.
Problem: Nicht jedes Pärchen mag sich gegenseitig und beide müssen sich auf ein Tier enigen!



Gibt es eine Aufteilung in dijunkte Tupel (a,b,c) mit $a \in A$, $b \in B$ und $c \in C$, sodass jeder ~~ein(e)~~ einer/einem PartnerIn ~~_~~ und einem Tier zugewiesen werden konnte?

3D-Matching (3DM)

Formal:

Gegeben: Mengen A, B, C ~~und~~ mit $|A|=|B|=|C|$ und

Menge $E \subseteq \{(a,b,c) \mid a \in A, b \in B \text{ und } c \in C\}$

(E wird auch (Hyper-)Kantenmenge genannt)

Gesucht: Gibt es eine Menge $M \subseteq E$, sodass

(1) für je zwei Elemente (a_1,b_1,c_1) und (a_2,b_2,c_2) aus M gilt: $a_1 \neq a_2$, $b_1 \neq b_2$, $c_1 \neq c_2$

(2) Jedes Elemen aus A (bzw B oder C) in M enthalten ist?

(Ein M, dass (1) und (2) erfüllt, heißt auch "perfekt")

1. <u>3D-Matching liegt in NP:</u>

Für eine gegebene Lösung M müssen wir nur auf Disjunktheit prüfen und schauen, ob jedes Element gematcht wurde.

2. <u>Wenn $3DM \in P$, dann ist $3SAT \in P$:</u>

Wir transformieren eine Instanz I_{3SAT} von 3SAT in eine Instanz I_{3DM} von 3DM, sodass I_{3SAT} erfüllbar $\Leftrightarrow$ I_{3DM} besitzt perf. Matching

$\Rightarrow$ Wir haben eine Instanz I_{3SAT} von 3SAT gegeben mit Variablen $x_1, \dots, x_n$

und Klauseln $c_1 = (l_{1,1} \vee l_{1,2} \vee l_{1,3}), \dots, c_m = (l_{m,1} \vee l_{m,2} \vee l_{m,3})$

Wie macht man daraus eine Instanz I_{3DM} von 3DM?

Idee: Gadgets für Variablen und Klauseln

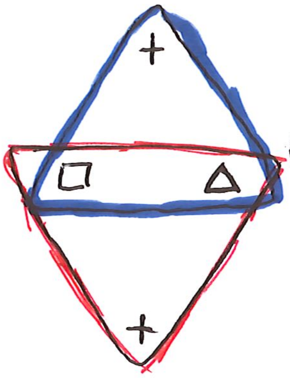
Zunächst Variablen:

1) Wie kann ich ein true/false codieren?

2) Wie kann ich sicherstellen, dass nur true/false genutzt wird?

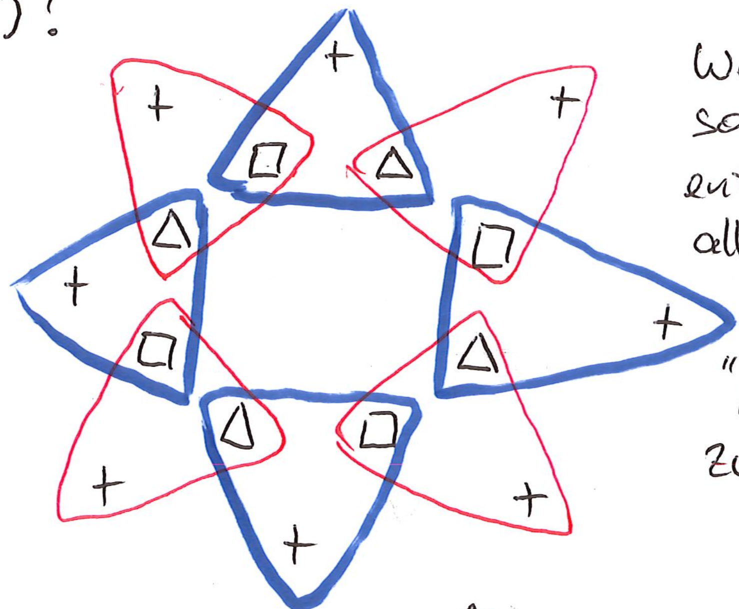
3) Was muss ich tun, wenn es mehr als ein Literal von x gibt?

Zu 1) und 2)



Entweder blau (true) oder rot (false) kann gewählt werden. Nicht beide gleichzeitig!

Mit 3)?



Wenn □ und Δ nur so existieren müssen entweder alle roten oder alle blauen Dreiecke gewählt werden, um ein "perfektes Matching" zu bekommen.

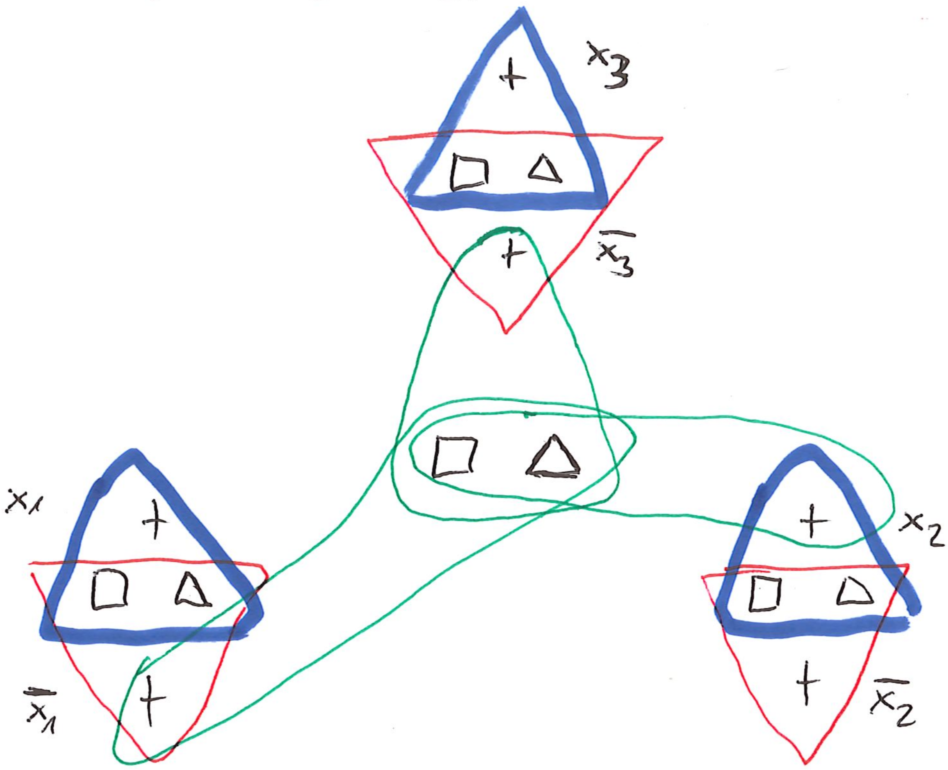
Dieser Kreis kann beliebig vergrößert bzw verkleinert werden!

Klauseln:

Einfach □ △

Verbinde diese beiden mit dem + in der Variablen bzgl des negativen literals.

Bsp für $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$



Wenn $x_1 = 1$ oder $x_2 = 0$ oder $x_3 = 1$, dann können wir □ und △ der Klausel mit einem + verbinden.

Reicht das?

Nein, : I_{3SAT} kann erfüllbar sein, aber I_{3DM} muss kein perfektes Matching besitzen!

Problematisch sind die +.

Ausweg: Füge "Filler" ein.

Sei p die Anzahl an $+$.

Die Hälfte wird von den Variablen Gadgets abgedeckt, weitere m (bei Erfüllbarkeit von I_{3SAT}) durch Klauseln.

Füge also ~~...~~ $\frac{p}{2} - m$ weitere $\square$ und $\triangle$ ein und verbinde die $(\square, \triangle)$ Pärchen mit <u>jedem</u> $+$.

Nun bleibt noch zu zeigen:

(1) I_{3SAT} erfüllbar $\Longleftrightarrow$ I_{3DM} besitzt perf. Matching

(2) Transformation besitzt polynomielle Laufzeit.

<u>Beweis (1):</u>

"$\Longrightarrow$": Sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ eine erfüllende Belegung für I_{3SAT}.

~~Setze~~ Wähle für das x_i-Gadget die blauen Dreiecke falls $x_i = 1$, und die roten falls $x_i = 0$.

Dann können wir jedem Klausel-Gadget ein $+$ zuweisen und die restlichen $+$ mit den Fillern abdecken.

I_{3DM} hat also ein perf. Matching

"$\Longleftarrow$": Sei M ein pefektes Matching für I_{3DM}.

Dann blockiert jedes Klausel-Gadget eine Variablen-belegung. Wenn rot blockiert wird, setze entsprechende Variable auf 1; wird blau blockiert, setze Variable auf 0. {In jedem Variablen-Gadget kann ~~auch~~ nur eine Farbe gewählt werden}, d.h. Jede Variable ist entweder 0 oder 1, aber nie beides.

$\Rightarrow I_{3SAT}$ muss erfüllbar sein ■

(2) Laufzeit:

Jede Variable kann in maximal m Klauseln auftreten, d.h. $p \in O(n \cdot m)$. Damit gibt es auch höchstens $O(n^2 m^2)$ Kanten

$\Rightarrow$ polynomielle Laufzeit zum Erstellen

Rückübersetzen der Lösung von I_{3DM} für I_{3SAT} funktioniert in $O(1)$, denn uns interessiert nur, ob I_{3SAT} erfüllbar ist. □

Satz: Es gibt eine $\frac{1}{3}$-Approximation für Max-3DM

Optimierungs-variante

Beweis: Sei M ein beliebiges, nicht-erweiterbares Matching, und OPT das größtmögliche. Sei $(a,b,c) \in M$. Wie viele Kanten in OPT kann (a,b,c) blockieren? Antwort: 3, denn (a,b,c) kann höchstens eine Kante blockieren, die a benutzt, höchstens eine, die b benutzt und höchstens eine, die c benutzt.

$\Rightarrow |M| \geq \frac{1}{3}$ OPT □