Technische
Universität
Braunschweig

Algorithmen und Datenstrukturen II

7. Vorlesung

Linda Kleist, 05.06.2019

Komplexität – Einstieg

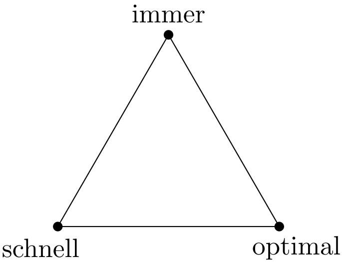
Wir haben verschiedene algorithmische Methoden für Maximum Knapsack kennen gelernt:

i) heuristisch: einfache Algorithmen, die oft, aber nicht immer, ganz ordentliche Lösungen liefern
→ $\textsc{Greedy}_0$

ii) approximativ: Algorithmen, die in polynomieller Zeit Lösungen finden, die nicht unbedingt optimal, aber gut sind
→ $\textsc{Greedy}_k$

iii) exakt: Algorithmen, die immer optimale Lösungen finden, aber manchmal lange dafür brauchen
→ Dynamic-Programming
→ Branch-and-Bound

Komplexität – Einstieg



Problem 7

Gibt es einen Algorithmus für Maximum Knapsack, der

- für jede Instanz
- schnell (polynomiell in der Kodierung der Eingabe)
- eine optimale Lösung

findet?

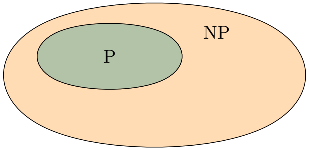
Komplexitätsklassen I

Ein Problem gehört zur Klasse P, wenn ein Algorithmus existiert, der
- für jede Instanz
- in polynomieller Zeit
- eine korrekte Lösung liefert.

- FRACTIONAL KNAPSACK $\in$ P
- HÖRSAAL-AUSLASTUNG $\in$ P

Ein Problem gehört zur Klasse NP, wenn ein Algorithmus existiert, der
- für jede Instanz
- in polynomieller Zeit
- eine Lösung verifiziert.

- 01-KNAPSACK $\in$ NP
- SUBSETSUM $\in$ NP



Es gilt: $P \subseteq NP$

Millennium-Problem

$P = NP$?

Komplexitätsklassen I

Ein Problem gehört zur Klasse P,

ABOUT PROGRAMS MILLENNIUM PROBLEMS PEOPLE PUBLICATIONS EVENTS EUCLID

CMI

1 Mio. US $

Millennium Problems

Yang–Mills and Mass Gap

Experiment and computer simulations suggest the existence of a "mass gap" in the solution to the quantum versions of the Yang-Mills equations. But no proof of this property is known.

Riemann Hypothesis

The prime number theorem determines the average distribution of the primes. The Riemann hypothesis tells us about the deviation from the average. Formulated in Riemann's 1859 paper, it asserts that all the 'non-obvious' zeros of the zeta function are complex numbers with real part 1/2.

P vs NP Problem

If it is easy to check that a solution to a problem is correct, is it also easy to solve the problem? This is the essence of the P vs NP question. Typical of the NP problems is that of the Hamiltonian Path Problem: given N cities to visit, how can one do this without visiting a city twice? If you give me a solution, I can easily check that it is correct. But I cannot so easily find a solution.

Komplexitätsklassen I

Startseite » Lösung für P-NP-Problem?

News
16.08.2017
Lesedauer ca. 5 Minuten
Drucken
Teilen

P-NP-PROBLEM

Neuer Angriff auf das größte Rätsel der Informatik

Seit Jahrzehnten streiten Informatiker, ob die Komplexitätsklassen P und NP in Wahrheit identisch sind. Ein deutscher Forscher will die Frage beantwortet haben. Nun diskutieren Computerwissenschaftler in aller Welt über seine Arbeit.

Das berühmte «P versus NP»-Problem ist doch nicht geknackt

Vor einigen Wochen hat ein deutscher Mathematiker behauptet, er habe eines der sieben Millennium-Probleme gelöst. Jetzt räumt er ein, dass sein Beweis einen Fehler enthält. Der Fehlschlag ist nicht der erste.

Komplexitätsklassen I

Ein Problem gehört zur Klasse P, wenn ein Algorithmus existiert, der

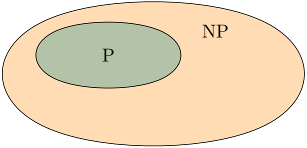
- für jede Instanz
- in polynomieller Zeit
- eine korrekte Lösung liefert.

- FRACTIONAL KNAPSACK $\in$ P
- HÖRSAAL-AUSLASTUNG $\in$ P

Ein Problem gehört zur Klasse NP, wenn ein Algorithmus existiert, der

- für jede Instanz
- in polynomieller Zeit
- eine Lösung verifiziert.

- 01-KNAPSACK $\in$ NP
- SUBSETSUM $\in$ NP



Es gilt: $P \subseteq NP$

Millennium-Problem

$P = NP$?

01-KNAPSACK $\in$ P?

SUBSETSUM $\in$ P?

Ein Beispiel mit Logik

Beispiel

Sei $Z = 111444$ und

$$
\begin{array}{rl|r}
z_1 &= p_1 & 100110 \\
z_2 &= p_2 & 100001 \\
z_3 &= p_3 & 10101 \\
z_4 &= p_4 & 10010 \\
z_5 &= p_5 & 1001 \\
z_6 &= p_6 & 1110 \\
z_7 &= p_7 & 200 \\
z_8 &= p_8 & 100 \\
z_9 &= p_9 & 20 \\
z_{10} &= p_{10} & 10 \\
z_{11} &= p_{11} & 2 \\
z_{12} &= p_{12} & 1
\end{array}
$$

Gibt es $S \subseteq \{1, \ldots 12\}$ mit $\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in S} p_i = Z$?

$\rightarrow$ Entscheidungsproblem SubsetSum.

Ein Beispiel mit Logik

Beispiel

Sei $Z = 111444$ und

$$
\begin{array}{rl|r}
z_1 &= p_1 & 100110 \\
z_2 &= p_2 & 100001 \\
z_3 &= p_3 & 10101 \\
z_4 &= p_4 & 10010 \\
z_5 &= p_5 & 1001 \\
z_6 &= p_6 & 1110 \\
z_7 &= p_7 & 200 \\
z_8 &= p_8 & 100 \\
z_9 &= p_9 & 20 \\
z_{10} &= p_{10} & 10 \\
z_{11} &= p_{11} & 2 \\
z_{12} &= p_{12} & 1
\end{array}
$$

Umformulierung mit den Boolesche Variablen:

$$x_1 := \begin{cases} 1, & O_1 \text{ gewählt} \\ 0, & O_1 \text{ nicht gewählt, also } O_2. \end{cases}$$

$$x_3 := \begin{cases} 1, & O_3 \text{ gewählt} \\ 0, & O_3 \text{ nicht gewählt, also } O_4. \end{cases}$$

$$x_5 := \begin{cases} 1, & O_5 \text{ gewählt} \\ 0, & O_5 \text{ nicht gewählt, also } O_6. \end{cases}$$

Es gibt ein $S \subseteq \{1, \ldots, 12\}$ mit $\sum_{i \in S} p_i = Z$ $\iff$ Es gibt eine Belegung der Variablen, die die folgende Formel erfüllt:
$(x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_5}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_5)$

3-SAT

Problem 8 (3-SATISFIABILITY [3-SAT])

Gegeben: Boolesche Formel
- n Boolesche Variablen $x_1, \ldots, x_n$ (bzw. Literale der Form x_i oder $\overline{x_i}$)
- m Klauseln, mit je genau drei Literalen $C_j = (l_{j,1} \vee l_{j,2} \vee l_{j,3})$ mit $1 \leq j \leq m$
- der Form $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$

Gesucht: Eine Belegung der Variablen mit 0 (falsch) oder 1 (wahr), die die Boolesche Formel erfüllt (engl: satisfying).

Beobachtungen:
- Eine Wahrheitsbelegung einer 3-SAT-Instanz lässt sich leicht verifizieren. $\implies$ 3-SAT $\in$ NP
- Gibt es keine Wahrheitsbelegung, so ist das nicht so leicht nachzuweisen.

3-SAT

Problem 9

3-SAT $\in$ P?

Satz 10

Wenn 01-KNAPSACK $\in P$ ist, dann ist auch 3-SAT $\in P$.

Beweis.

Tafel... □