Technische
Universität
Braunschweig

Algorithmen und Datenstrukturen II

9. Vorlesung

Linda Kleist, 26.06.2019

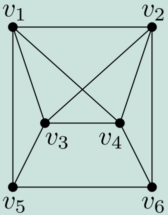
Graphen - Wiederholung / Einführung

Graph $G = (V, E)$

- Knotenmenge V
- Kantenmenge $E \subseteq \binom{V}{2}$

Beispiel

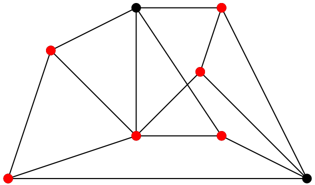
$$
\begin{aligned}
V &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \\
E &= \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \\
&\quad \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_6\}, \\
&\quad \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \\
&\quad \{v_5, v_6\}\}
\end{aligned}
$$



Vertex Cover

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Ein Vertex Cover von G ist eine Knotenteilmenge $S \subseteq V$, so dass für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt: $u \in S$ oder $v \in S$.



Problem 11 (Min Vertex Cover) Minimierungsproblem

Gegeben: Graph $G = (V, E)$

Gesucht: Kleinste Menge $S \subseteq V$, so dass S ein Vertex Cover ist.

Problem 12 (Vertex Cover) Entscheidungsproblem

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$

Gesucht: Gibt es ein Vertex Cover $S \subseteq V$, so dass $|S| \leq k$.

Vertex Cover

Problem 12 (Vertex Cover)

Entscheidungsproblem

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$

Gesucht: Gibt es ein Vertex Cover $S \subseteq V$, so dass $|S| \leq k$.

Satz 12

Vertex Cover ist NP-vollständig.

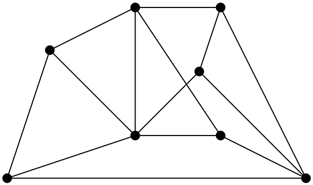
Beweis.

Tafel... $\square$

Approximation von Vertex Cover

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

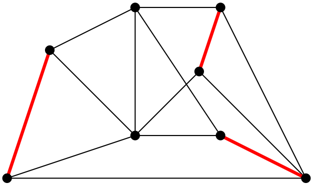
- Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ ist ein Matching, wenn keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Knoten besitzen.



Approximation von Vertex Cover

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

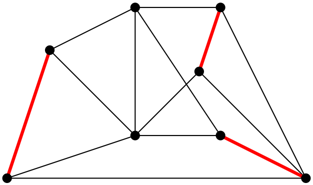
- Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ ist ein Matching, wenn keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Knoten besitzen.



Approximation von Vertex Cover

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

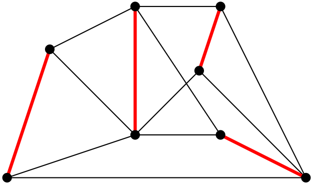
- Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ ist ein Matching, wenn keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Knoten besitzen.
- Ein Matching M ist inklusions-maximal, wenn für jedes Matching M' mit $M \subseteq M'$ gilt $M' = M$.



Approximation von Vertex Cover

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ ist ein Matching, wenn keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Knoten besitzen.
- Ein Matching M ist inklusions-maximal, wenn für jedes Matching M' mit $M \subseteq M'$ gilt $M' = M$.



Approximation von Vertex Cover

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ ist ein Matching, wenn keine zwei Kanten aus M einen gemeinsamen Knoten besitzen.
- Ein Matching M ist inklusions-maximal, wenn für jedes Matching M' mit $M \subseteq M'$ gilt $M' = M$.

Satz 13

Sei G ein Graph, M ein inklusions-maximales Matching und S ein kleinstes Vertex Cover von G. Dann gilt: $|M| \leq |S| \leq 2|M|$.

Beweis.

Tafel... $\square$

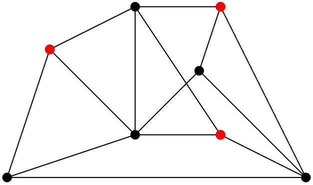
Satz 14

Es existiert eine 2-Approximation für Vertex Cover.

Zusammenhang zwischen Graphen-Problemen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $S \subseteq V$ ist eine

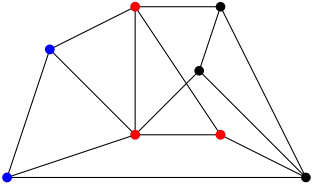
- unabhängige Menge, wenn für alle $u, v \in S$ gilt: $\{u, v\} \notin E$.
- Clique, wenn für alle $u, v \in S$ gilt: $\{u, v\} \in E$.



Zusammenhang zwischen Graphen-Problemen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $S \subseteq V$ ist eine

- unabhängige Menge, wenn für alle $u, v \in S$ gilt: $\{u, v\} \notin E$.
- Clique, wenn für alle $u, v \in S$ gilt: $\{u, v\} \in E$.



Zusammenhang zwischen Graphen-Problemen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. $S \subseteq V$ ist eine

- unabhängige Menge, wenn für alle $u, v \in S$ gilt: $\{u, v\} \notin E$.
- Clique, wenn für alle $u, v \in S$ gilt: $\{u, v\} \in E$.

Satz 15

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $S \subseteq V$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$V \setminus S$ ist ein (kleinstes) Vertex Cover in G

$\iff$ S ist eine (größte) unabhängige Menge in G

$\iff$ S ist eine (größte) Clique im Komplementgraph $\overline{G} := (V, \binom{V}{2} \setminus E)$

Beweis.

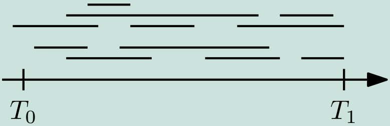
Tafel ... □

Zusammenhang zu Packungsproblemen

Beispiel: Hörsaal-Belegung

Gegeben:
- Zeitspanne (T_0, T_1)
- Veranstaltungen mit Start- und Endzeiten (s_i, e_i), $i \in \{1, \ldots, n\}$

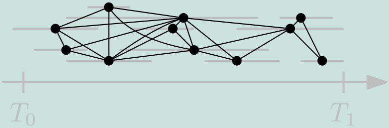
Gesucht: Auswahl möglichst vieler Veranstaltungen mit disjunkten Zeitspannen



äquivalente Formulierung

Gegeben: (Intervall-)Graph

Gesucht: größte unabhängige Menge

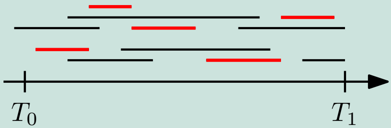


Zusammenhang zu Packungsproblemen

Beispiel: Hörsaal-Belegung

Gegeben:
- Zeitspanne (T_0, T_1)
- Veranstaltungen mit Start- und Endzeiten (s_i, e_i), $i \in \{1, \ldots, n\}$

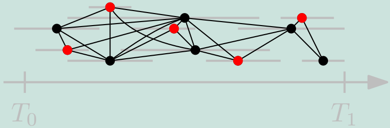
Gesucht: Auswahl möglichst vieler Veranstaltungen mit disjunkten Zeitspannen



äquivalente Formulierung

Gegeben: (Intervall-)Graph

Gesucht: größte unabhängige Menge



Zusammenhang zu Packungsproblemen

Beispiel: Hörsaal-Belegung

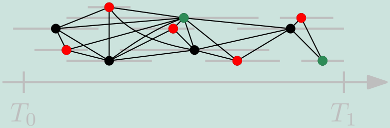
Gegeben:
- Zeitspanne (T_0, T_1)
- Veranstaltungen mit Start- und Endzeiten (s_i, e_i), $i \in \{1, \dots, n\}$

Gesucht: Auswahl möglichst vieler Veranstaltungen mit disjunkten Zeitspannen

äquivalente Formulierung

Gegeben: (Intervall-)Graph

Gesucht: größte unabhängige Menge

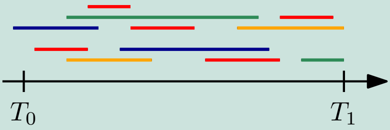


Zusammenhang zu Packungsproblemen

Beispiel: Hörsaal-Belegung

Gegeben:
- Zeitspanne (T_0, T_1)
- Veranstaltungen mit Start- und Endzeiten (s_i, e_i), $i \in \{1, \ldots, n\}$

Gesucht: Auswahl möglichst vieler Veranstaltungen mit disjunkten Zeitspannen



äquivalente Formulierung

Gegeben: (Intervall-)Graph

Gesucht: größte unabhängige Menge