Netzwerkalgorithmen **Sommersemester 2021**

Dr. Arne Schmidt
Christian Rieck

Abgabe: 16. Mai 2021
Rückgabe: 21. Mai 2021

Übungsblatt 1

Bitte schickt eure Lösungen in einer einzigen PDF Datei (Name der Datei und Betreff: „blatt[nr]_[name]_[matrikelnr]") per Mail an euren jeweiligen Tutor. Bitte beachtet auch den Hausaufgaben-Merkzettel[1]!

Hausaufgabe 1: **(4+3 Punkte)**

Sei $G = (V, E)$ ein Baum mit n Knoten und sei $n \geq 2$.

a) Zeige: G besitzt $n - 1$ Kanten.

b) Zeige: G besitzt mindestens zwei Blätter.

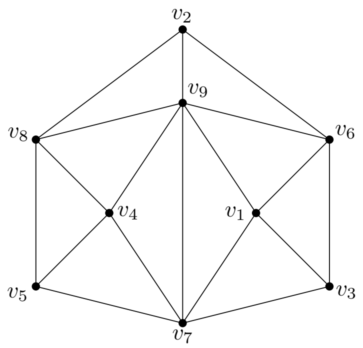
Hausaufgabe 2: **(5+5 Punkte)**

Sei $G = (V, E)$ der Graph der in Abbildung 1 dargestellt ist. Die Kante zwischen den Knoten v_i und v_j $(i < j)$ ist mit $e_{i,j}$ und das Gewicht mit $c(e_{i,j})$ bezeichnet.

a) Bestimme einen MST in G mit dem Algorithmus von Kruskal.

b) Bestimme einen MST in G mit dem Algorithmus von Prim und dem Startknoten v_6.

Gib die Reihenfolge der eingefügten Kanten an und zeichne den MST. Kommen in einem Schritt des Algorithmus mehrere Kanten infrage, wähle die Kante in lexikographischer Ordnung aus (also z.B. $e_{a,b}$ vor $e_{c,d}$, wenn $a < c$ bzw. $a = c$ und $b < d$).



$c(e_{1,3}) = 1$	$c(e_{4,5}) = 2$
$c(e_{1,6}) = 3$	$c(e_{4,7}) = 6$
$c(e_{1,7}) = 6$	$c(e_{4,8}) = 3$
$c(e_{1,9}) = 7$	$c(e_{4,9}) = 4$
$c(e_{2,6}) = 9$	$c(e_{5,7}) = 7$
$c(e_{2,8}) = 9$	$c(e_{5,8}) = 1$
$c(e_{2,9}) = 8$	$c(e_{6,9}) = 5$
$c(e_{3,6}) = 2$	$c(e_{7,9}) = 5$
$c(e_{3,7}) = 7$	$c(e_{8,9}) = 3$

Abbildung 1: Eine Zeichnung des Graphen G und die Gewichte der jeweiligen Kanten.

Hausaufgabe 3: **(3 Punkte)**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und T der von Kruskals Algorithmus konstruierte aufspannende Baum von G. Zeige, dass T die Optimalitätsbedingung (b) aus Satz 2.9 (der VL) erfüllt.

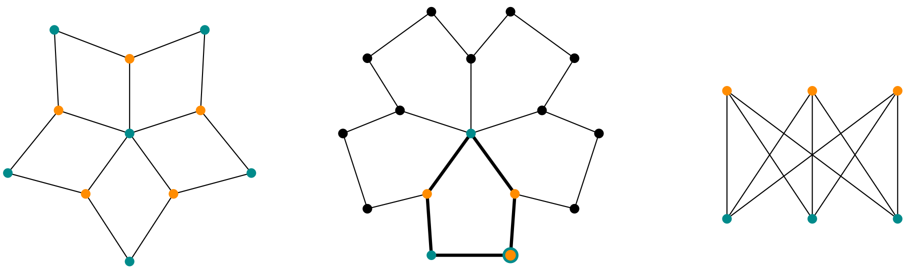
[1] `https://www.ibr.cs.tu-bs.de/alg/Merkzettel/homework-booklet.pdf`

Präsenzaufgabe:
Ein Graph heißt *bipartit*, wenn die Knotenmenge des Graphen in zwei disjunkte Mengen V_1 und V_2 zerlegt werden kann, sodass jede Kante je einen Knoten aus V_1 und V_2 enthält, siehe Abbildung 2.

Sei $K_{m,n} = (V_1 \dot{\cup} V_2, E)$ der vollständig bipartite Graph mit $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ und $E := \{\{u, v\} \mid u \in V_1 \text{ und } v \in V_2\}$.

a) Zeige, dass der $K_{2,n}$ genau $n \cdot 2^{n-1}$ aufspannende Bäume besitzt.

b) Zeige, dass der $K_{3,n}$ genau $n^2 \cdot 3^{n-1}$ aufspannende Bäume besitzt.



(a) (b) (c)

Abbildung 2: (a) Eine Darstellung eines bipartiten Graphen. Die Mengen V_1 und V_2 sind über die Knotenfarben gegeben. (b) Eine Darstellung eines Graphen der nicht bipartit ist. Die Knoten des markierten Kreises können nicht in zwei disjunkte Mengen unterteilt werden, sodass die Eigenschaft eines bipartiten Graphen nicht erfüllt ist. (c) Eine Darstellung des vollständig bipartiten Graphen $K_{3,3}$.

Präsenzaufgabe:
In einer Stadt benötigt jedes Haus einen Wasseranschluss. Es kostet c_i Euro, einen Brunnen an Haus i zu graben und $c_{i,j}$ Euro eine Leitung zwischen den Häusern i und j zu verlegen. Ein Haus bekommt Wasser wenn es einen Brunnen besitzt, oder es einen Pfad aus Leitungen gibt, der zu einem Brunnen führt.

Konstruiere einen Graphen G und zeige, dass ein Wassernetzwerk minimaler Kosten einem minimal aufspannenden Baum in G entspricht.