Netzwerkalgorithmen **Sommersemester 2021**

Dr. Arne Schmidt
Christian Rieck

Abgabe: 06. Juni 2021
Rückgabe: 11. Juni 2021

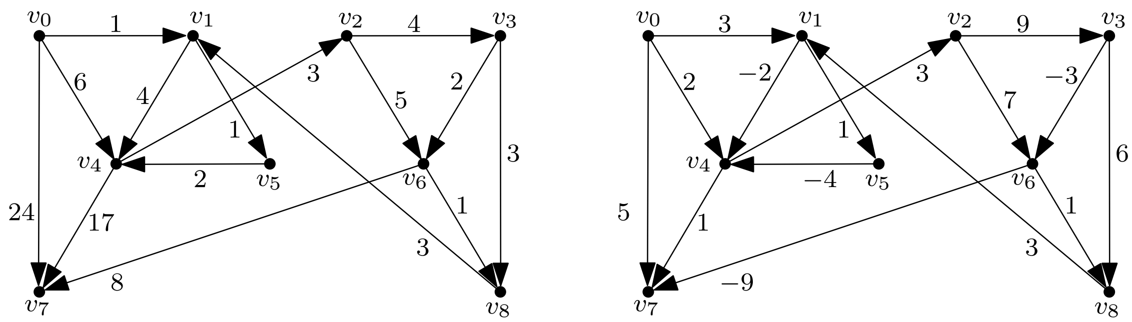
Übungsblatt 2

Bitte schickt eure Lösungen in einer einzigen PDF Datei (Name der Datei und Betreff: „blatt[nr]_[name]_[matrikelnr]") per Mail an euren jeweiligen Tutor. Bitte beachtet auch den Hausaufgaben-Merkzettel[1]!

Hausaufgabe 1: **(5+5 Punkte)**

a) Bestimme mit dem Algorithmus von Dijkstra kürzeste Wege vom Knoten v_0 zu allen anderen Knoten im Graphen G, der in Abbildung 1a dargestellt ist. Kommen während einer Iteration mehrere Knoten in Frage, wähle den mit dem kleinsten Index. Nutze für die Durchführung des Algorithmus die Tabelle 1.

b) Bestimme mit dem Algorithmus von Moore-Bellman-Ford kürzeste Wege vom Knoten v_0 zu allen anderen Knoten im Graphen H aus Abbildung 1b. Die Kanten sollen in jeder Iteration in lexikographisch aufsteigender Reihenfolge, vom kleinsten zum größten Index (z.B. $e_{0,1} = (v_0, v_1) < e_{2,3} = (v_2, v_3) < e_{2,6} = (v_2, v_6)$), betrachtet werden. Nutze für die Durchführung des Algorithmus die Tabelle 2.



(a) Darstellung von G. **(b)** Darstellung von H.

Abbildung 1

Hausaufgabe 2: **(5 Punkte)**

Sei $D = (V, A)$ ein (beliebig aber fester) azyklischer Digraph (d.h. ein gerichteter Graph ohne gerichtete Kreise).

Entwirf einen Algorithmus, der den längsten Pfad von D in polynomieller Zeit berechnet. Die Länge eines Pfades wird in der Anzahl Kanten gemessen, jeder Kante kann also das Gewicht 1 gegeben werden.

(Hinweis: Im Allgemeinen ist das Finden eines längsten Pfades NP-schwer (siehe Hamiltonpfad-Problem). Betrachte für diesen Spezialfall topologische Sortierungen oder überlege alternativ, wie sich Kreise negativen Gewichts auf die Bestimmung eines *kürzesten* Pfades auswirken.)

[1] `https://www.ibr.cs.tu-bs.de/alg/Merkzettel/homework-booklet.pdf`

Hausaufgabe 3: **(5 Punkte)**

Ted und Marshall machen einen Roadtrip von New York nach Vancouver. Da die beiden Städte über 40 Autostunden voneinander entfernt sind und die beiden keine Zeit für Übernachtungen haben, entscheiden sie sich, bei jedem Rasthof den Fahrer zu wechseln. Da sich Ted in den Städten besser auskennt, soll er die erste und die letzte Strecke fahren.

Konstruiere einen Graphen $G = (V, E)$ mit einer Kostenfunktion $c : E \to \mathbb{R}^+$ und argumentiere, wie in G ein Pfad gefunden werden kann, der einem gültigen kürzesten Weg (wenn möglich) zwischen New York und Vancouver entspricht. Dabei gilt ein Weg als gültig, wenn Ted und Marshall abwechselnd fahren und Ted sowohl die erste, als auch die letzte Strecke fährt.

(Hinweis: Knoten in G entsprechen Raststätten; Kanten entsprechen kürzeste Pfade zwischen Raststätten.)

Präsenzaufgabe:

Sei $D = (V, E)$ ein Digraph mit Kostenfunktion $c : E \to \mathbb{R}^+$. Wir suchen einen Pfad P zwischen zwei Knoten $s, t \in V$ von D, sodass die *längste* Kante $e \in P$ so *kurz* ist wie möglich. (In Anlehnung an Hausaufgabe 3, stelle man sich zum Beispiel vor, dass in der gesuchten Route die längste Schicht von Marshall und Ted möglichst kurz ist.)

Modifiziere den Algorithmus von Dijkstra so, dass das genannte Problem gelöst wird.

Präsenzaufgabe:

Für eine *Orientierung* eines Graphen erhält jede Kante $\{u, v\}$ eine Richtung, d.h. es wird genau eine der beiden gerichteten Kanten (u, v) oder (v, u) gewählt. Ein Beispiel ist in Abbildung 2 gegeben.

Zeige, dass jede Orientierung des vollständigen Graphen K_n einen gerichteten Hamiltonpfad besitzt, also einen gerichteten Pfad, der alle Knoten besucht.

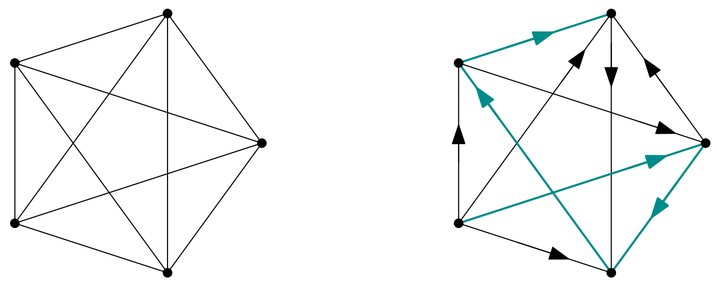


Abbildung 2: Zeichnungen des K_5 (links) und ein Hamiltonpfad in einer Orientierung des K_5 (rechts).

i	v_0		v_1		v_2		v_3		v_4		v_5		v_6		v_7		v_8		R
	$\ell(v_0)$	$p(v_0)$	$\ell(v_1)$	$p(v_1)$	$\ell(v_2)$	$p(v_2)$	$\ell(v_3)$	$p(v_3)$	$\ell(v_4)$	$p(v_4)$	$\ell(v_5)$	$p(v_5)$	$\ell(v_6)$	$p(v_6)$	$\ell(v_7)$	$p(v_7)$	$\ell(v_8)$	$p(v_8)$	
0	0	–	∞	–	∞	–	∞	–	∞	–	∞	–	∞	–	∞	–	∞	–	$\emptyset$
1																			
2																			
3																			
4																			
5																			
6																			
7																			
8																			
9																			

Tabelle 1: Tabelle zur Bearbeitung von Aufgabe 1a). $p(v_i)$ bezeichnet den aktuellen Vorgänger von v_i, $\ell(v_i)$ die aktuell kürzeste Distanz von v_0 zu v_i. R bezeichnet die Menge der Knoten für die kürzeste Wege bekannt sind.

i	v_0		v_1		v_2		v_3		v_4		v_5		v_6		v_7		v_8	
	$\ell(v_0)$	$p(v_0)$	$\ell(v_1)$	$p(v_1)$	$\ell(v_2)$	$p(v_2)$	$\ell(v_3)$	$p(v_3)$	$\ell(v_4)$	$p(v_4)$	$\ell(v_5)$	$p(v_5)$	$\ell(v_6)$	$p(v_6)$	$\ell(v_7)$	$p(v_7)$	$\ell(v_8)$	$p(v_8)$
0	0	–	∞	–	∞	–	∞	–	∞	–	∞	–	∞	–	∞	–	∞	–
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		
8																		
9																		

Tabelle 2: Tabelle zur Bearbeitung von Aufgabe 1b). $p(v_i)$ bezeichnet den aktuellen Vorgänger von v_i, $\ell(v_i)$ die aktuell kürzeste Distanz von v_0 zu v_i.