Netzwerkalgorithmen **Sommersemester 2021**

Dr. Arne Schmidt
Christian Rieck

Abgabe: 20. Juni 2021
Rückgabe: 25. Juni 2021

Übungsblatt 3

Bitte schickt eure Lösungen in einer einzigen PDF Datei (Name der Datei und Betreff: „blatt[nr]_[name]_[matrikelnr]“) per Mail an euren jeweiligen Tutor. Bitte beachtet auch den Hausaufgaben-Merkzettel[1]!

Hausaufgabe 1: **(5 Punkte)**
Wende den Algorithmus von Johnson auf den Graphen $D = (V, E)$ mit konservativer Gewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{R}$, der in Abbildung 1 dargestellt ist, an. Gib dabei die folgenden Dinge an:

- den modifizierten Graphen D',
- die Knotenlabel nach Durchführung von Moore-Bellman-Ford auf D',
- zeichne den neu-gewichteten Graphen, d.h. D mit Gewichtsfunktion c',
- die resultierende Distanz-Matrix bzgl. der Gewichtsfunktion c',
- die resultierende Distanz-Matrix bzgl. der Gewichtsfunktion c.

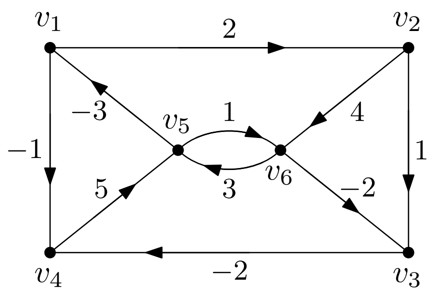

Abbildung 1: Eine Darstellung des Graphen D.

Hausaufgabe 2: **(3 Punkte)**
Zeige, dass die im Algorithmus von Johnson berechnete Kostenfunktion c' nicht negativ ist, d.h. für alle $e \in E$ ist $c'(e) \geq 0$.

[1] `https://www.ibr.cs.tu-bs.de/alg/Merkzettel/homework-booklet.pdf`

Hausaufgabe 3: **(5 Punkte)**

Berechne einen maximalen Fluss mit dem Algorithmus von Ford-Fulkerson im Netzwerk (D, u, s, t), welches in Abbildung 2 dargestellt ist. Gib in jedem Schritt den augmentierenden Pfad und den Residualgraph an. Gib einen minimalen Schnitt an um zu zeigen, dass der berechnete Fluss maximal ist.

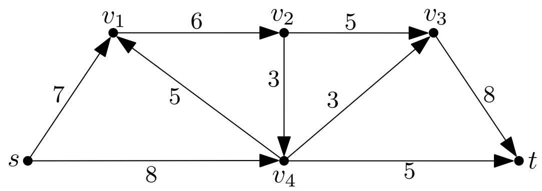

Abbildung 2: Eine Darstellung des Netzwerks (D, u, s, t).

Hausaufgabe 4: **(7 Punkte)**

Ein Gittergraph besteht aus Knoten auf ganzzahligen Koordinaten in der Ebene und Kanten, die je zwei Knoten mit einem Abstand von 1 verbinden.

Sei nun eine Stadtkarte in Form eines solchen (endlichen) Gittergraphen gegeben. Auf einigen Knoten haben Einwohner ihre Häuser gebaut. Da sich die Einwohner nicht mögen, wollen sie Straßen zum Rand der Stadt bauen und zwar so, dass sich die Straßen dabei nicht kreuzen (also insbesondere keine gemeinsamen Knoten besitzen). Die Straßen können nur auf den Kanten des Gittergraphen gebaut werden.

Reduziere dieses Problem auf ein Flussproblem, so dass eine Lösung für das Problem in polynomieller Zeit (bezüglich der Größe des Gittergraphen) berechnet wird, oder der Hinweis erfolgt, dass die betrachtete Instanz keine Lösung besitzt.

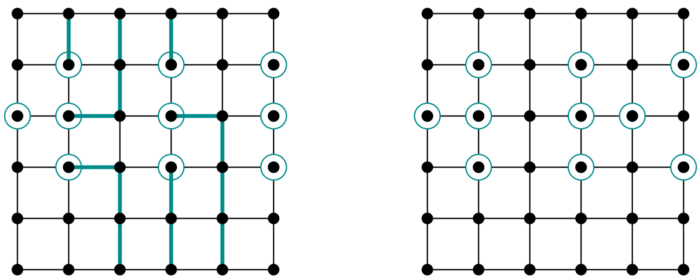

Abbildung 3: Eine Instanz mit einer gültigen Lösung (links) und eine Instanz, die keine gültige Lösung besitzt (rechts). Die in cyan umrandeten Knoten repräsentieren die Häuser der Einwohner, die cyanfarbenen Kanten (in der linken Instanz) die Straßen.

Präsenzaufgabe:

Wir betrachten nun eine Variante des Ford-Fulkerson-Algorithmus, bei der nur vorwärtsgerichtete Kanten des Residualgraphen für weitere Augmentierungen des Flusses benutzt werden dürfen.

Sei D ein Netzwerk. Sei $F_{\text{alg}}(D)$ der Wert des Flusses, den die vorgeschlagene Variante des Ford-Fulkerson-Algorithmus berechnet hat und sei $F_{\max}(D)$ der tatsächliche Wert eines maximalen Flusses in D.

Zeige, dass es keine Konstante $c \in \mathbb{Q}$ mit $c > 1$ gibt, sodass $c \cdot F_{\text{alg}}(D) \geq F_{\max}(D)$ gilt.