

ÜBUNGSBLATT 5

Bitte schickt eure Lösungen in einer einzigen PDF Datei (Name der Datei und Betreff: „blatt[nr]_[name]_[matrikelnr]“) per Mail an euren jeweiligen Tutor. Bitte beachtet auch den Hausaufgaben-Merkzettel¹!

Hausaufgabe 1:**(6 Punkte)**

Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ und das Matching $M \subset E$, beides dargestellt in Abbildung 1. Verwende Edmonds' Algorithmus, um ein Maximum Matching von G zu berechnen. Beachte dabei folgende Punkte:

- Gib T jeweils vor Schrumpfen einer Blüte bzw. vor Augmentieren des Matchings an.
- Gib die geschrumpften Blüten an.
- Markiere in T schwarze und weiße Knoten.
- Gib die augmentierten Matchings nach Auflösen jeder Blüte an.

Stehen zu einem Zeitpunkt mehrere Knoten zur Auswahl, fahre mit dem Knoten mit dem kleinsten Index fort. Des Weiteren übernimmt eine Blüte beim Schrumpfen den Index ihrer Basis.

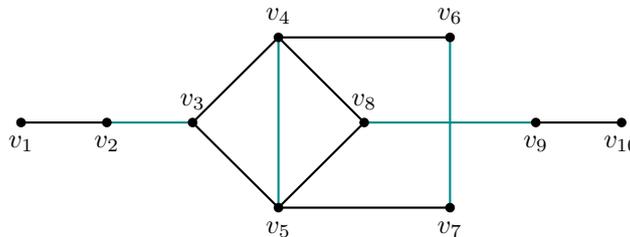


Abbildung 1: Darstellung eines Graphen $G = (V, E)$ für Aufgabe 1. Das initiale Matching ist $M = \{\{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}, \{v_8, v_9\}\}$.

Hausaufgabe 2:**(4+5 Punkte)**

Ein Graph heißt k -regulär, wenn jeder Knoten den Grad k besitzt.

- a) Zeige, dass der k -reguläre *bipartite* Graph $G = (X \cup Y, E)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, ein perfektes Matching besitzt.
- b) Zeige, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, einen k -regulären Graphen $G = (V, E)$ gibt, sodass G kein perfektes Matching besitzt.

¹<https://www.ibr.cs.tu-bs.de/alg/Merkzettel/homework-booklet.pdf>

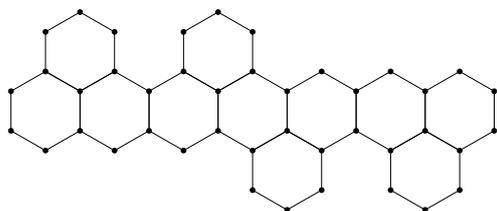
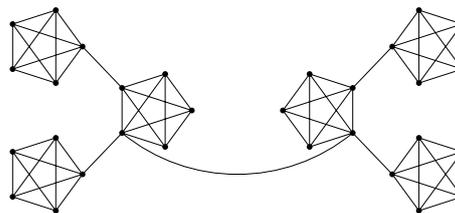
Hausaufgabe 3:**(5 Punkte)**

Seien $c_1, \dots, c_n, B \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $c_i > B/3$ für alle $c_i, i \in \{1, \dots, n\}$ gilt, gegeben. Wir suchen eine Partition der Zahlen c_1, \dots, c_n in Container, sodass die Summe der $c_i, i \in \{1, \dots, n\}$ in jedem Container höchstens B ist und so wenig Container wie möglich verwendet werden.

Modelliere dieses Problem als Matching-Problem.

Präsenzaufgabe:

Zeige oder widerlege, dass die Graphen, die in den Abbildungen 2a und 2b dargestellt sind, ein perfektes Matching besitzen. Nutze dafür geeignete Sätze aus der Vorlesung.

**(a)** Ein Graph mit $|V| = 42$ Knoten.**(b)** Ein Graph mit $|V| = 30$ Knoten.**Abbildung 2:** Darstellungen der Graphen für Aufgabe 5.**Präsenzaufgabe:**

In dieser Aufgabe betrachten wir stabile Matchings, wie in der Übung² thematisiert.

- Zeige, dass das Matching $M = \{\{A,X\}, \{B,Y\}, \{C,Z\}\}$ für die Präferenzlisten aus Abbildung 3 nicht stabil ist.
- Bestimme mit dem Algorithmus von Gale-Shapley ein stabiles Matching für die Präferenzlisten aus Abbildung 3.

| | A | B | C |
|----|---|---|---|
| 1. | Z | Y | Z |
| 2. | Y | Z | Y |
| 3. | X | X | X |

| | X | Y | Z |
|----|---|---|---|
| 1. | A | A | B |
| 2. | B | B | C |
| 3. | C | C | A |

Abbildung 3: Die Präferenzlisten der Elemente $\{A, B, C, X, Y, Z\}$ in absteigender Reihenfolge.

²Wir sprechen über stabile Matchings in der Übung am 15.07.2021.