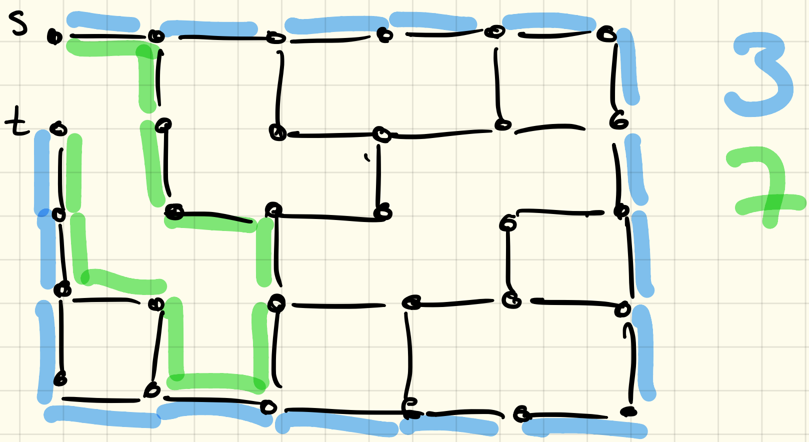
Problem: Minimiere Anzahl Abbiegungen!



Gegeben: Teilgraph des vollständigen Gitters
jede Kante geht in Richtung
N, O, S, W ; Startrichtung d

Gesucht: Pfad von s zu t mit
minimaler Anzahl Abbiegungen

Input → Black Magic Box kürzeste Wege → Output

Ziel: Input Graph $G=(V,E)$

→ erstelle neuen Graph $G'=(V',E')$
so dass kürzester Weg in G'
entspricht min-turn Pfad in G

Algo:
(i) Baue G' aus G
(ii) Nutze Dijkstra für kürzeste Wege in G'
(iii) Nutze kürzeste Wege in G' für min-turn Pfad in G

Beobachtung: Jeder Knoten ist eine mögliche Position innerhalb eines kürzesten Weges

→ wir haben zusätzlich vier Richtungen

→ neuer Graph hat Knoten für jede Kombination

⇒ Für jeden Knoten $v \in V$ → v_N, v_O, v_S, v_W in V'

⇒ Für jede Kante $(u,v) \in E$ in Richtung d

→ $(u_N, v_d), \ldots, (u_W, v_d) \in E'$

⇒ Kosten für Kanten in E'

$$c(u_{d_1}, v_{d_2}) = 0 \quad \text{wenn } d_1 = d_2$$

$$c(u_{d_1}, v_{d_2}) = 1 \quad \text{wenn } d_1 \neq d_2$$

⇒ G' hat $4n$ Knoten und $4m$ Kanten

⇒ Suche: kürzester Weg von s_d zu t_N, t_S, t_O, t_W

Noch zu zeigen dass dies alles funktioniert:

Lemma 1: Es existiert ein Pfad in G' von s_{d_1} zu t_{d_2} genau dann wenn es einen Pfad in G von s zu t gibt der in d_1 beginnt und in d_2 endet.

Lemma 2: Wie Lemma 1 aber mit Pfadlänge k in G $\Leftrightarrow$ k Knicke in G'

→ Beweis: Übung!