Technische Universität Braunschweig

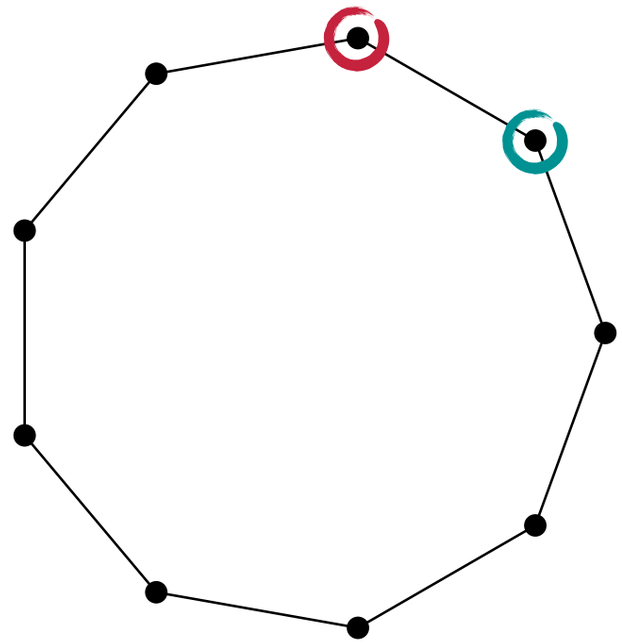
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
Algorithmik

Netzwerkalgorithmen

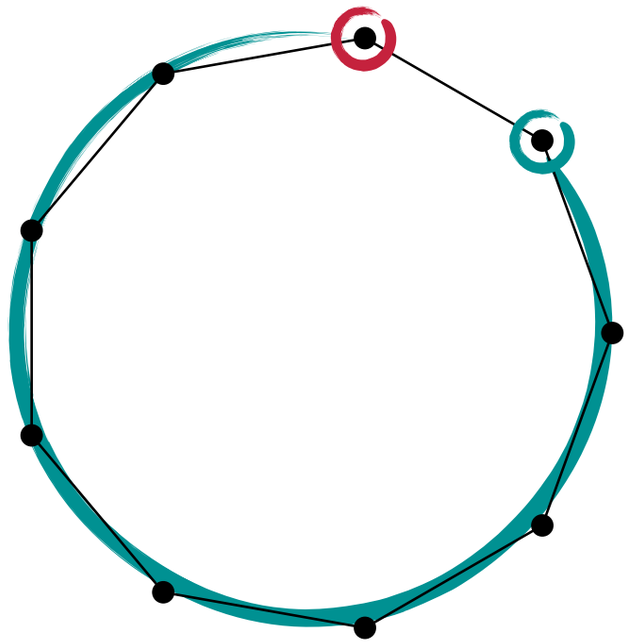
Übung 2: Wege, Pfade und Zusammenhang

Christian Rieck, 20. Mai 2021

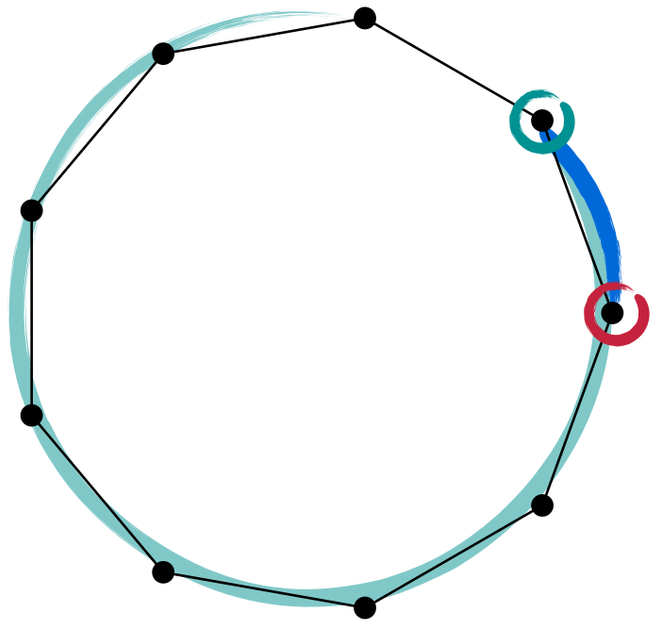
Teilpfade von längsten Pfaden sind längste Pfade?



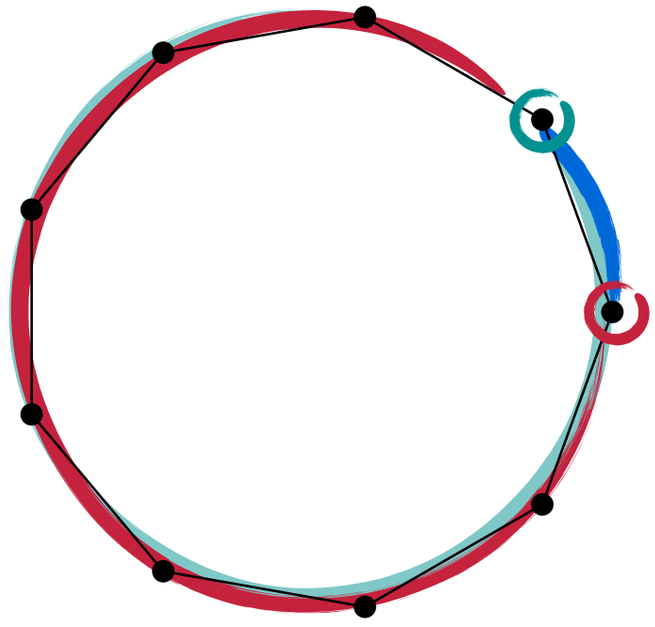
Teilpfade von längsten Pfaden sind längste Pfade?



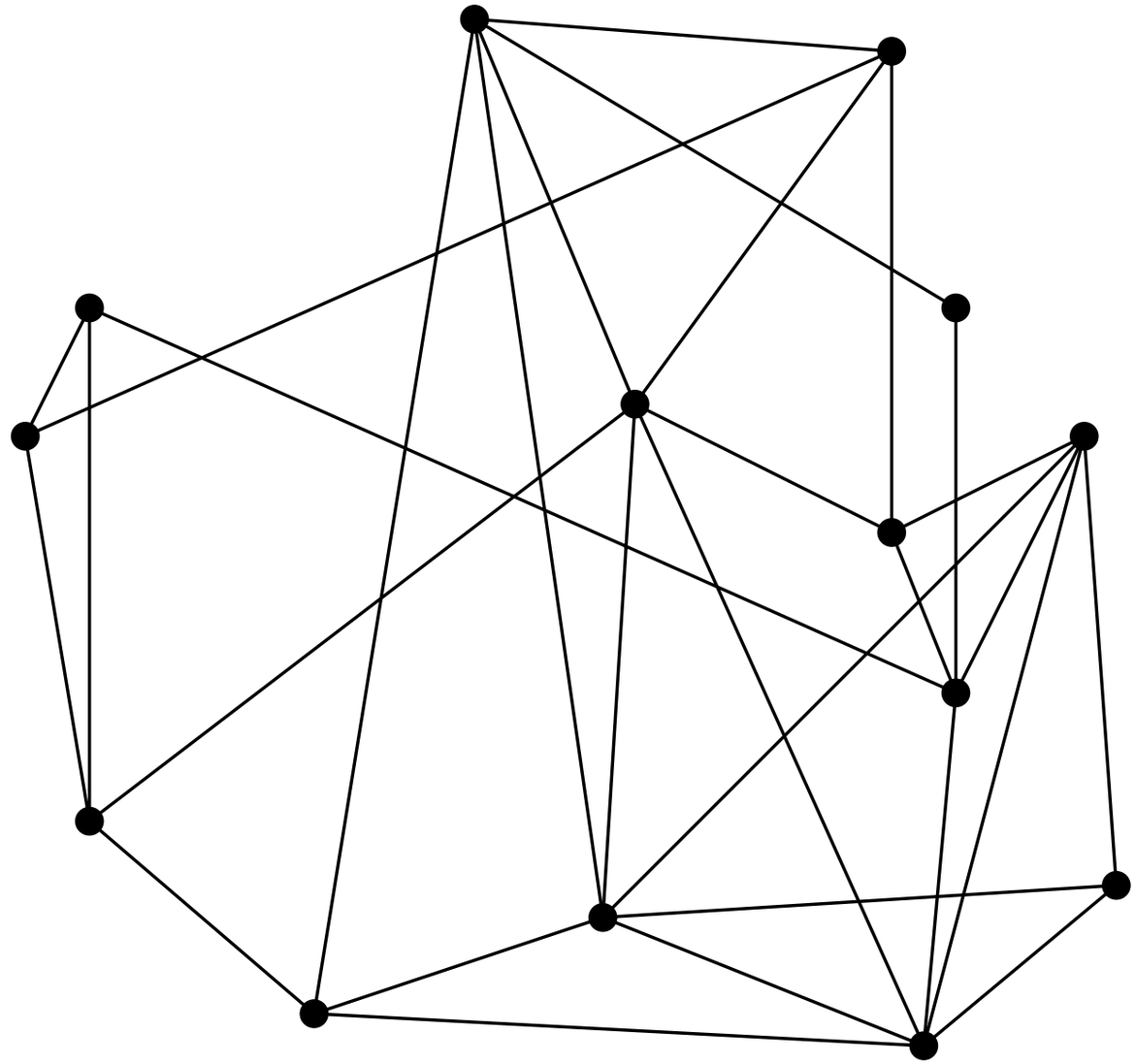
Teilpfade von längsten Pfaden sind längste Pfade?



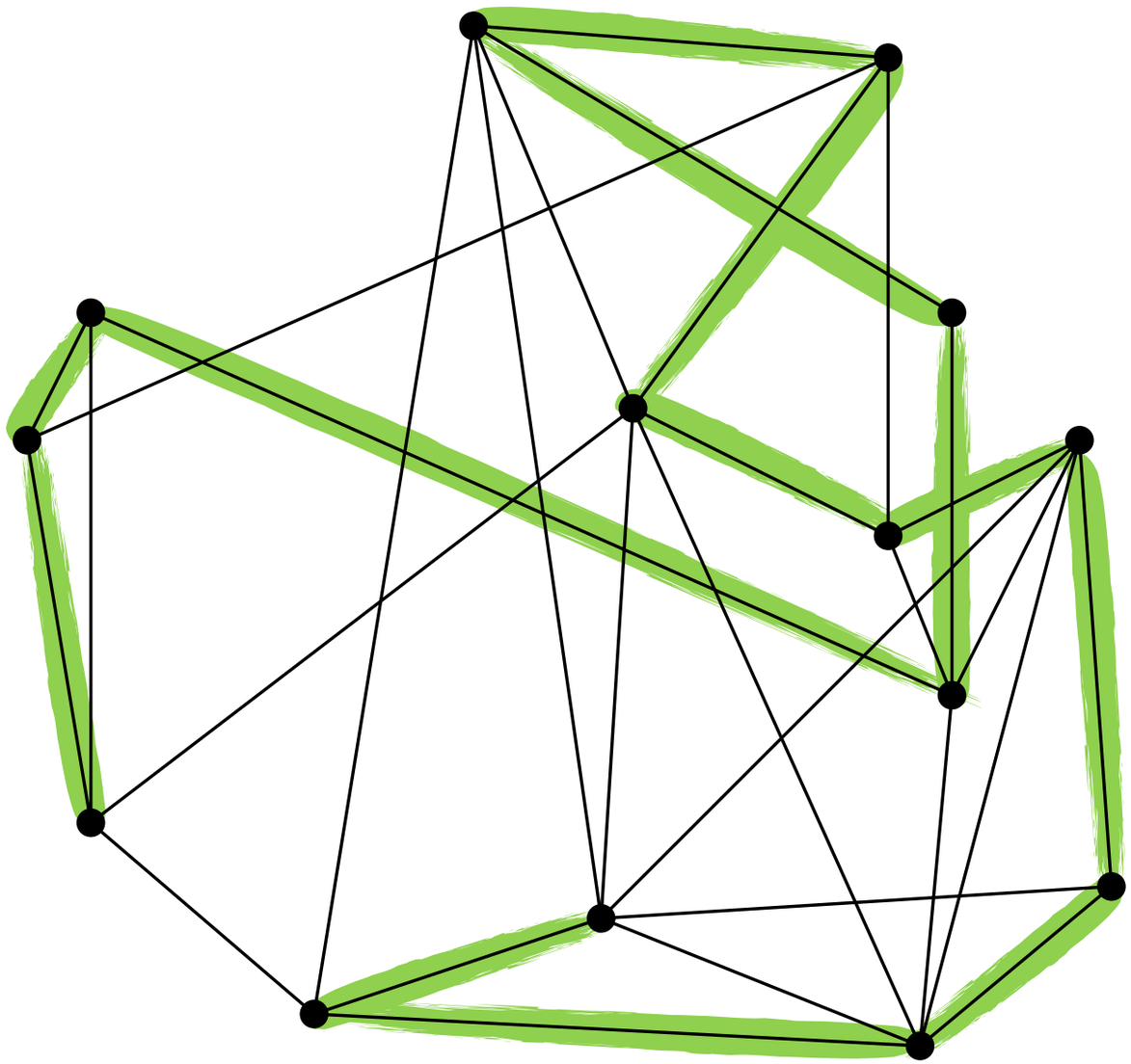
Teilpfade von längsten Pfaden sind längste Pfade?



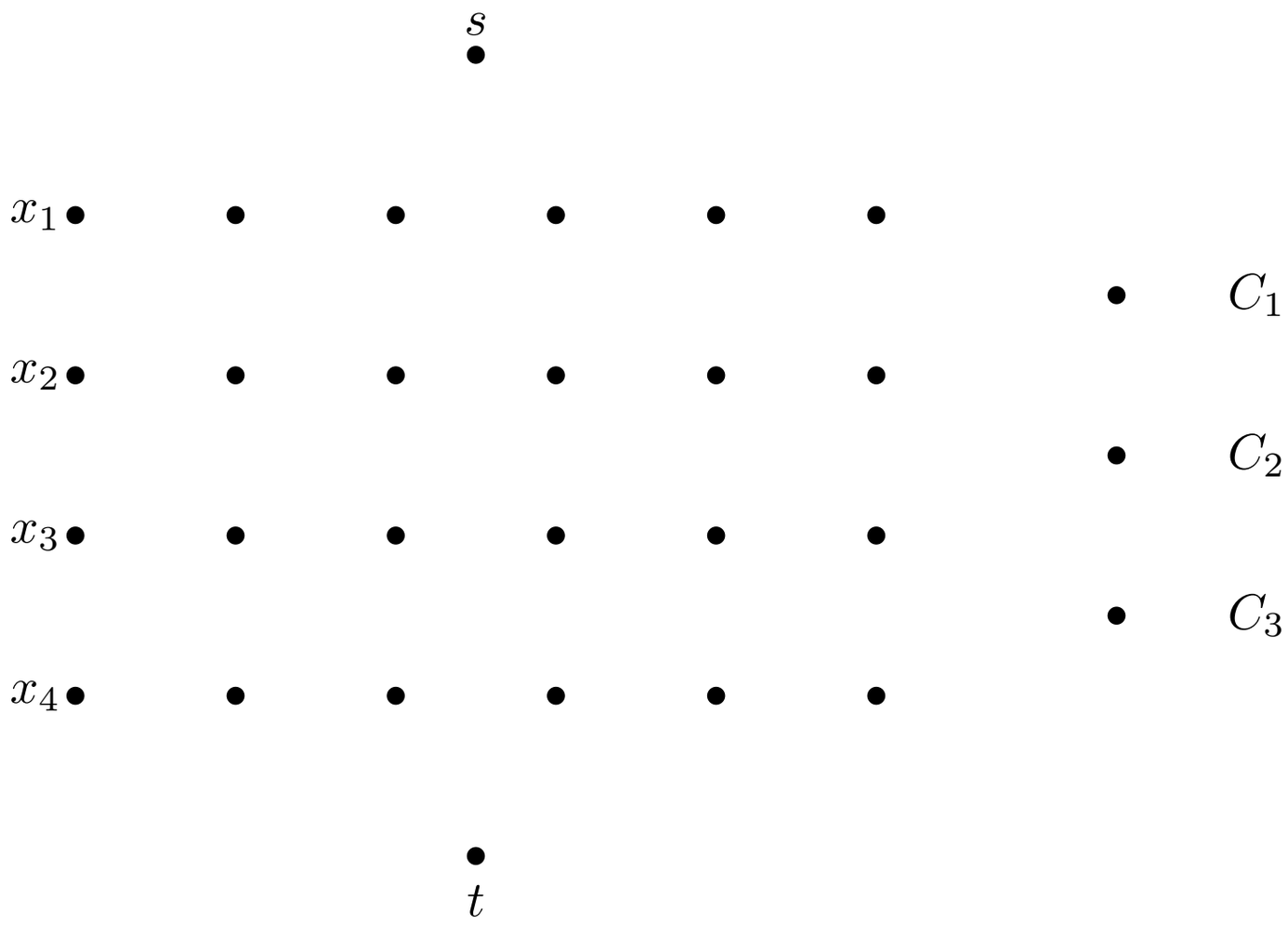
Und der längste Pfad in dem Graphen?



Und der längste Pfad in dem Graphen?

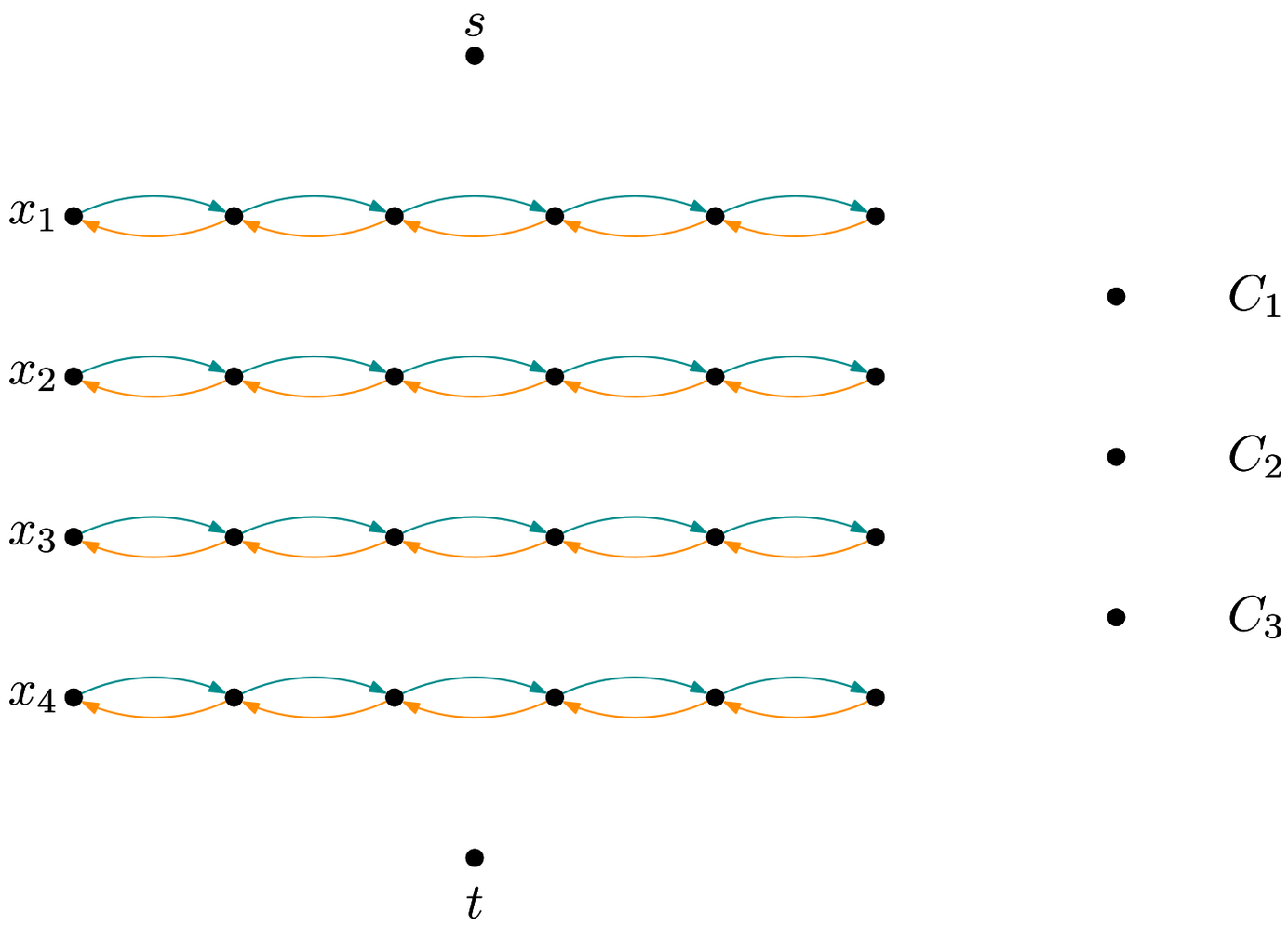


Der längste Pfad ist schwer!



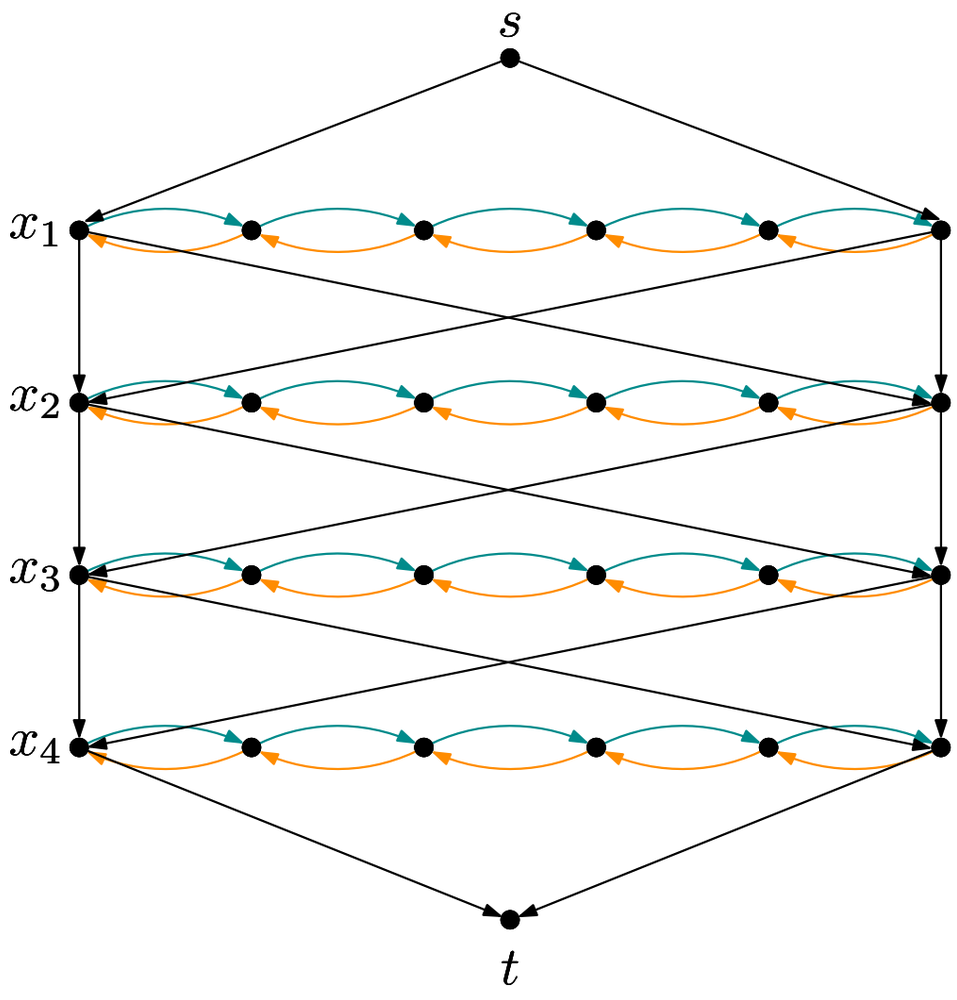
$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$

Der längste Pfad ist schwer!



$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$

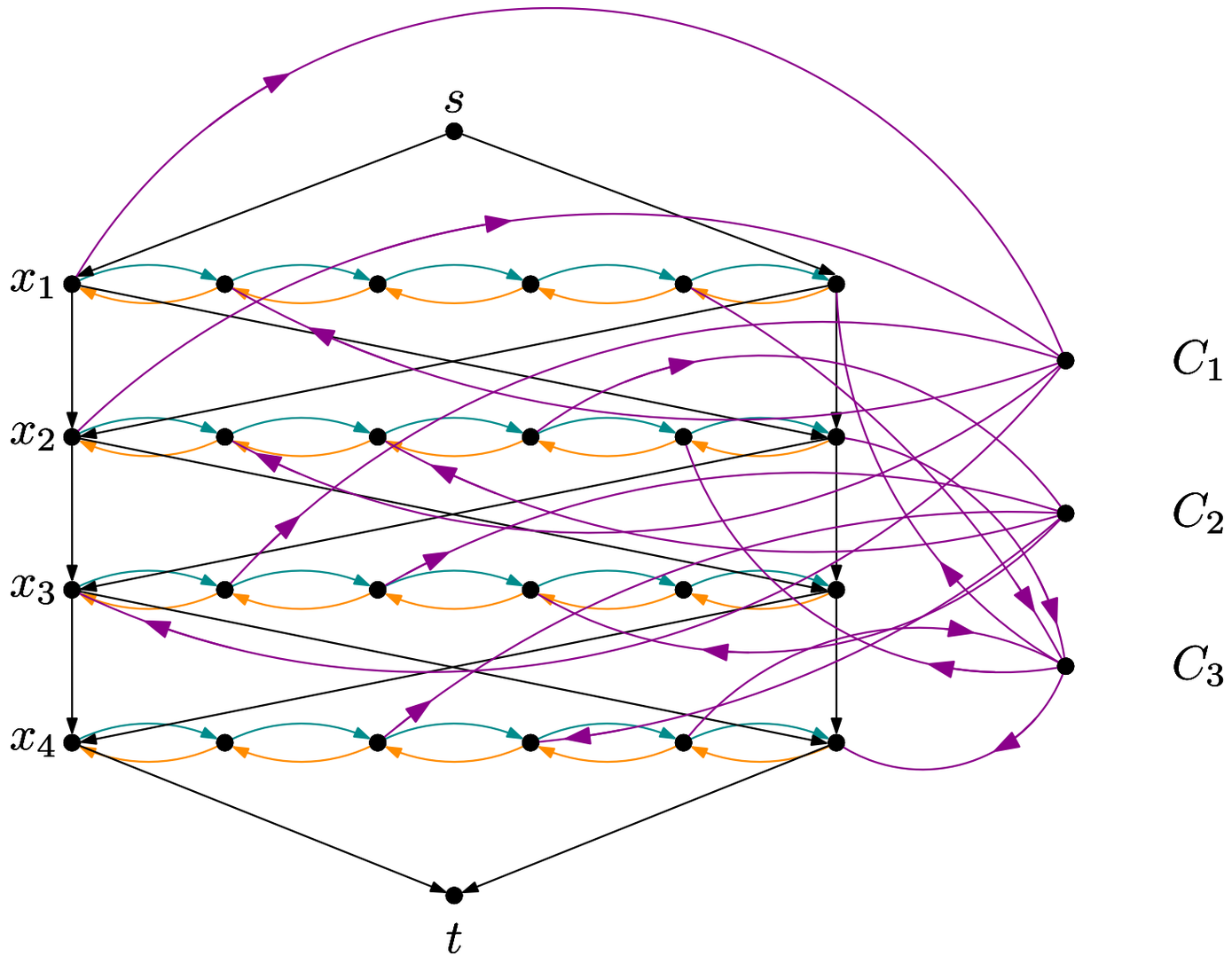
Der längste Pfad ist schwer!



- C_1
- C_2
- C_3

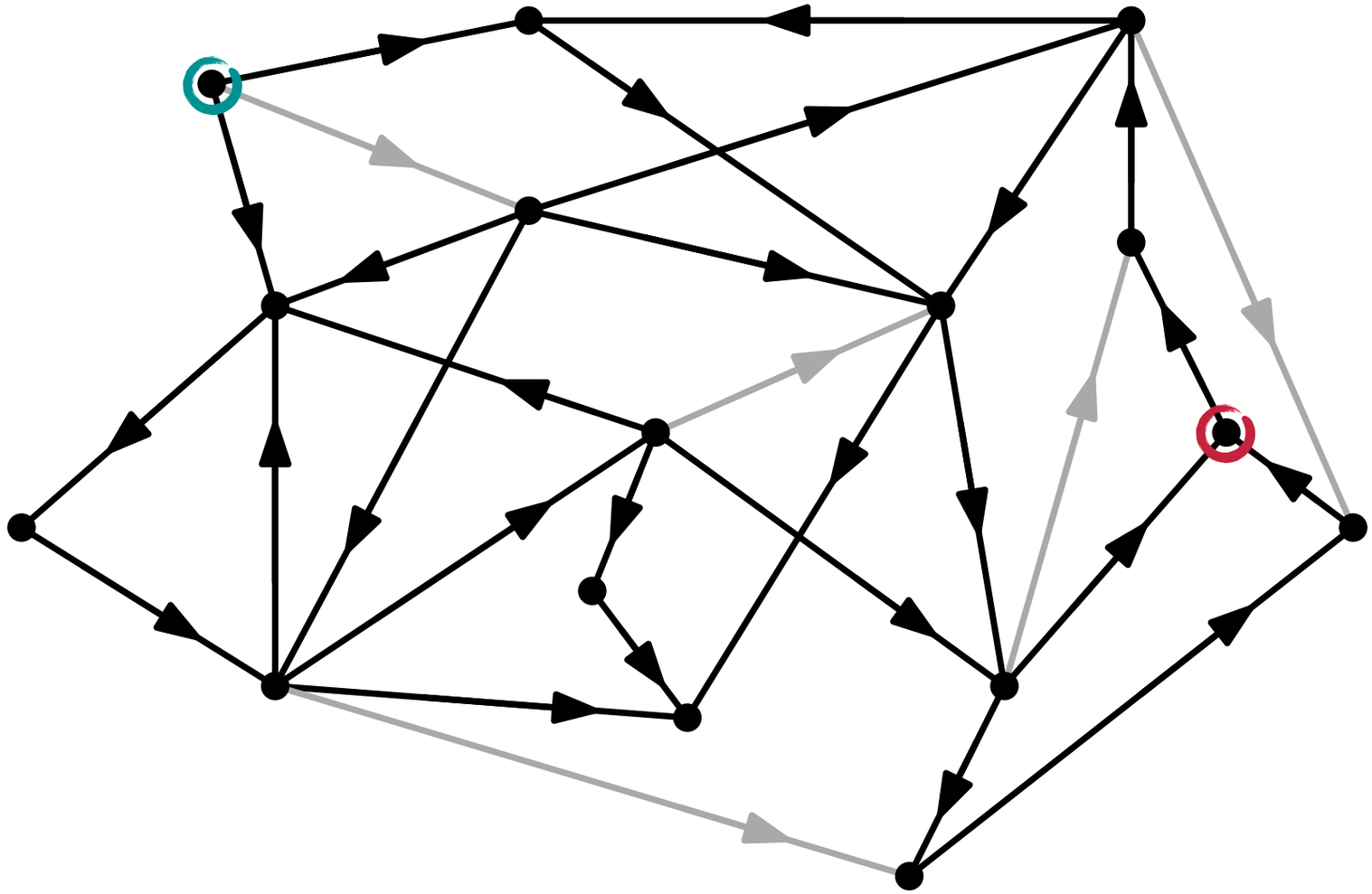
$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$

Der längste Pfad ist schwer!

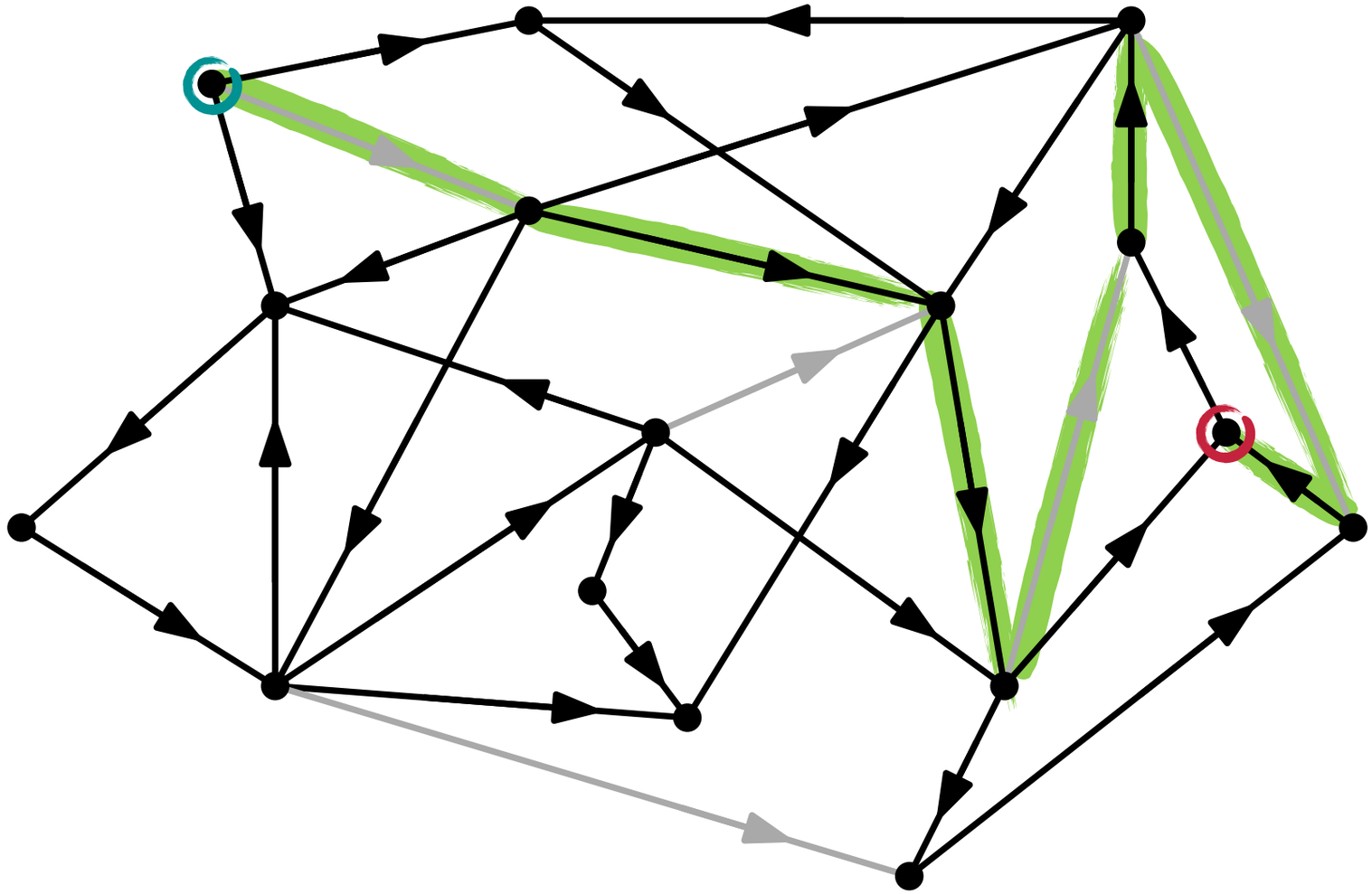


$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$

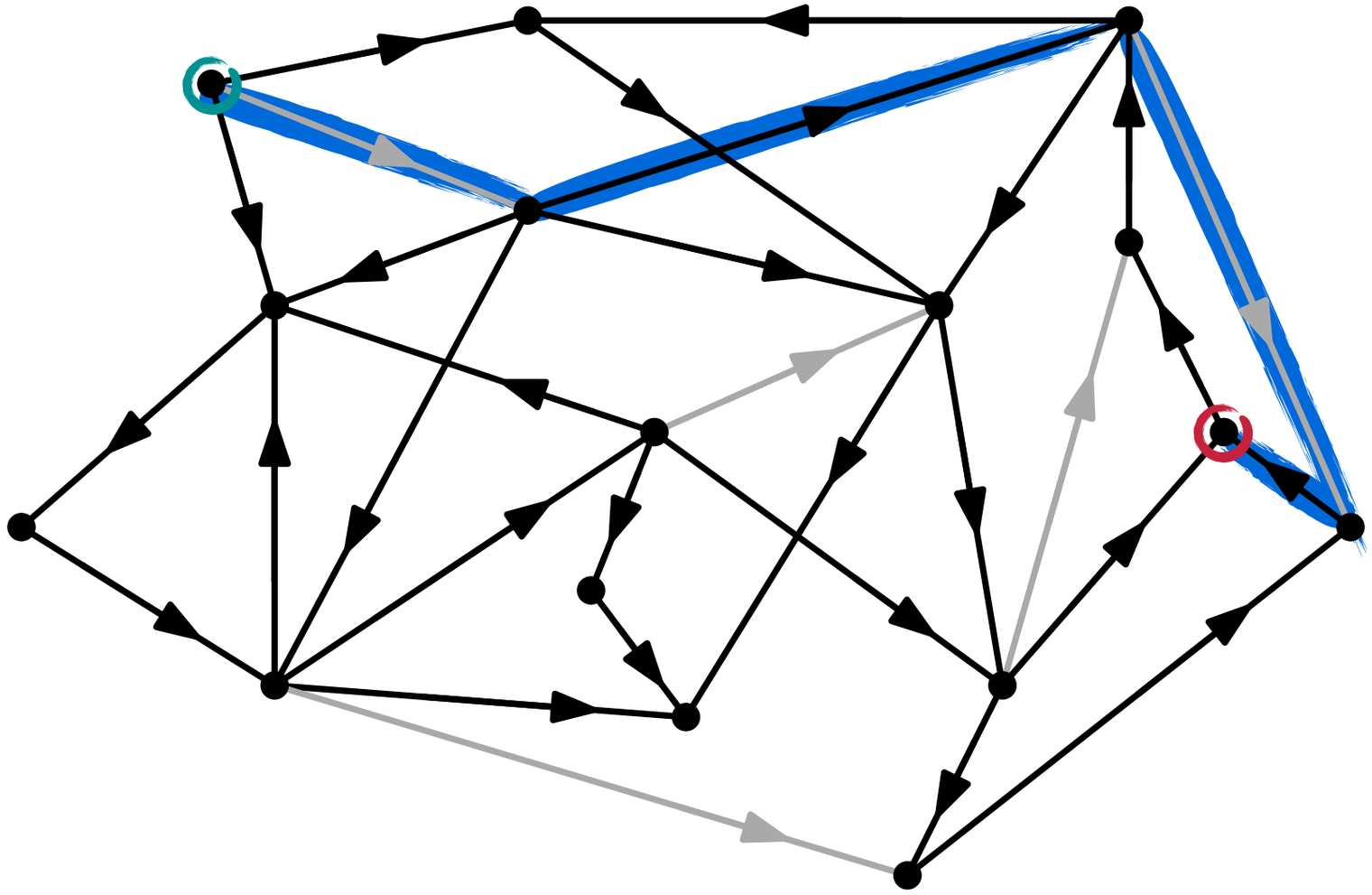
Wurmlöcher!



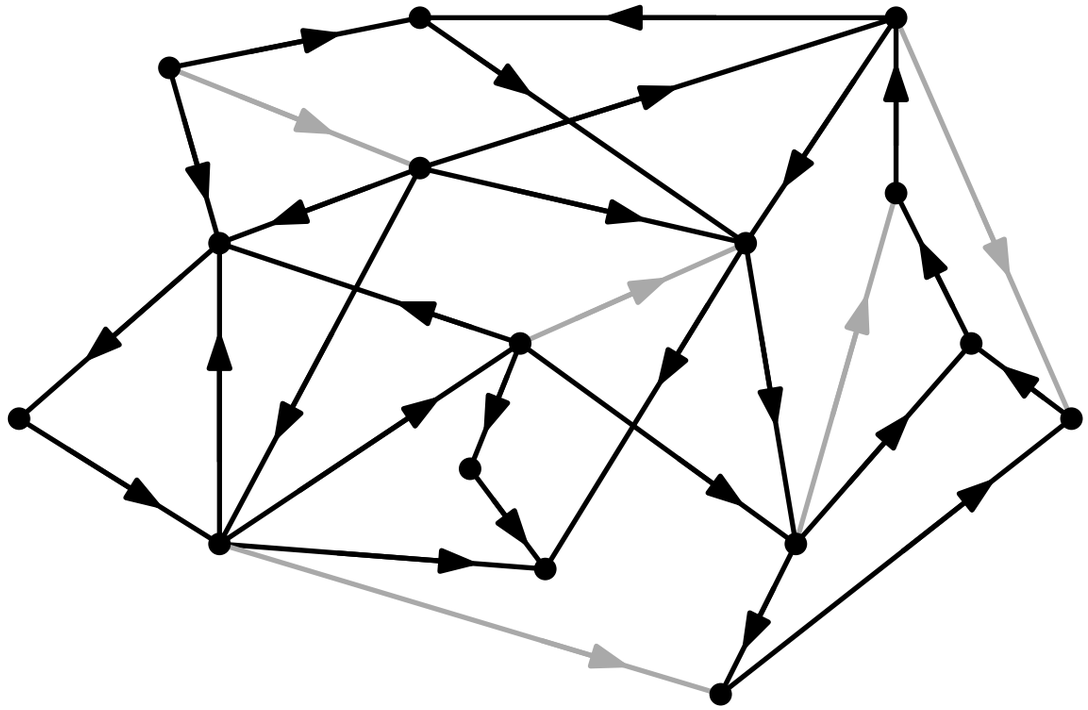
Wurmlöcher!



Wurmlöcher!



Wurmlöcher!

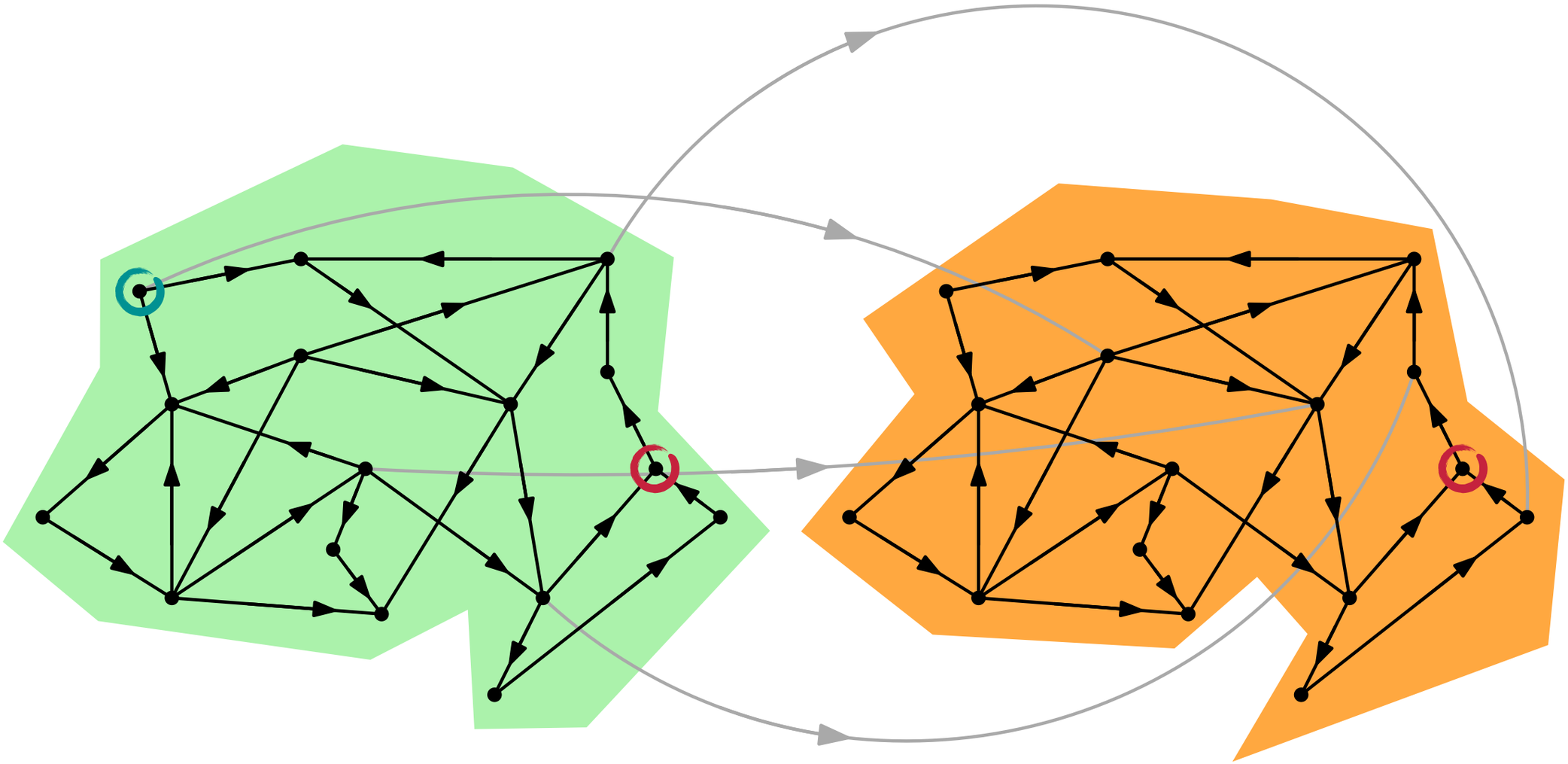


Problem. Kürzeste Wege mit speziellen Kanten

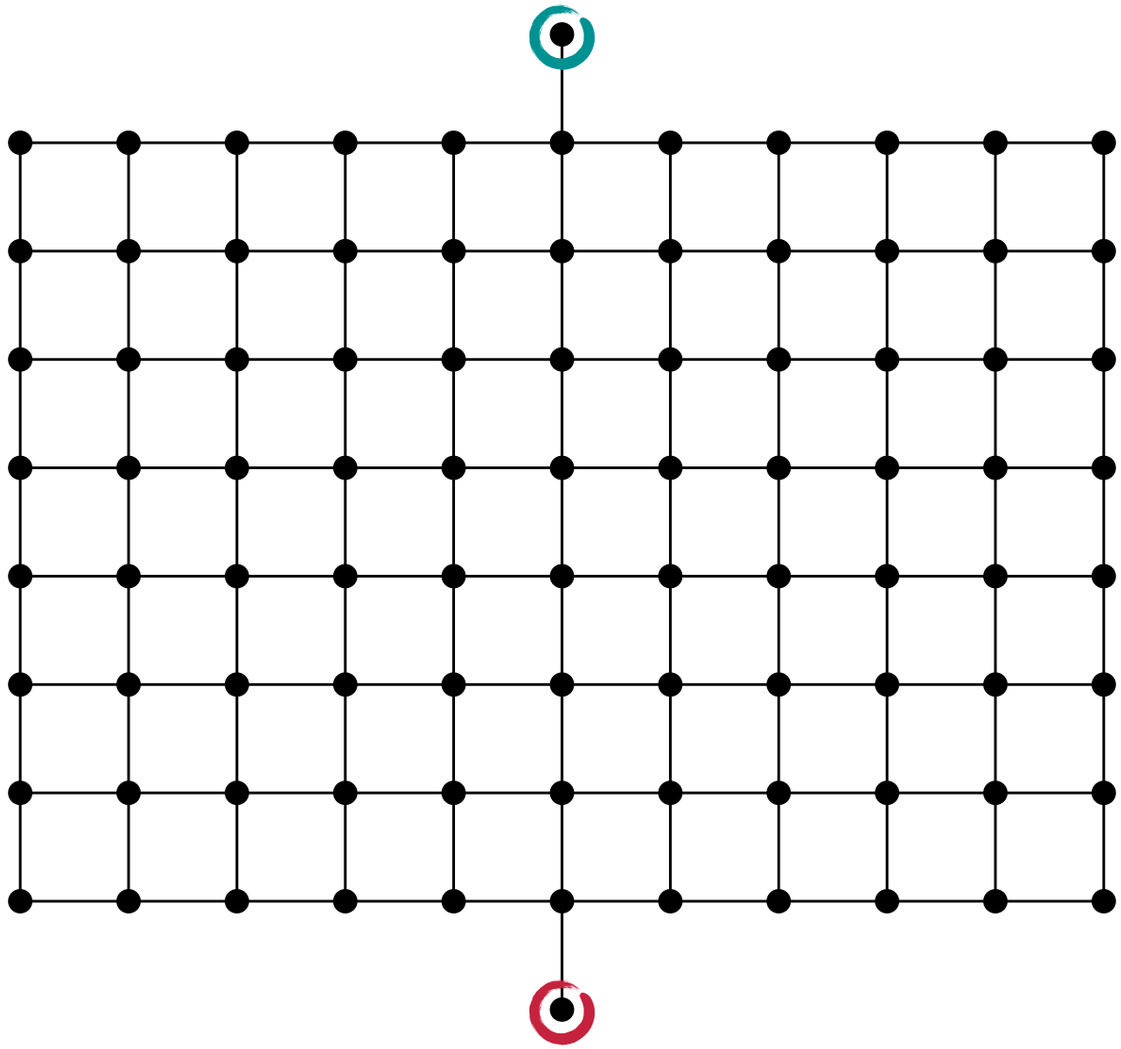
Gegeben: Digraph G=(V,E), Kostenfunktion $c : E \to \mathbb{N}$, $F \subset E$.

Gesucht: Kürzester Weg zwischen zwei ausgewählten Knoten, so dass höchstens k viele Kanten aus F verwendet werden.

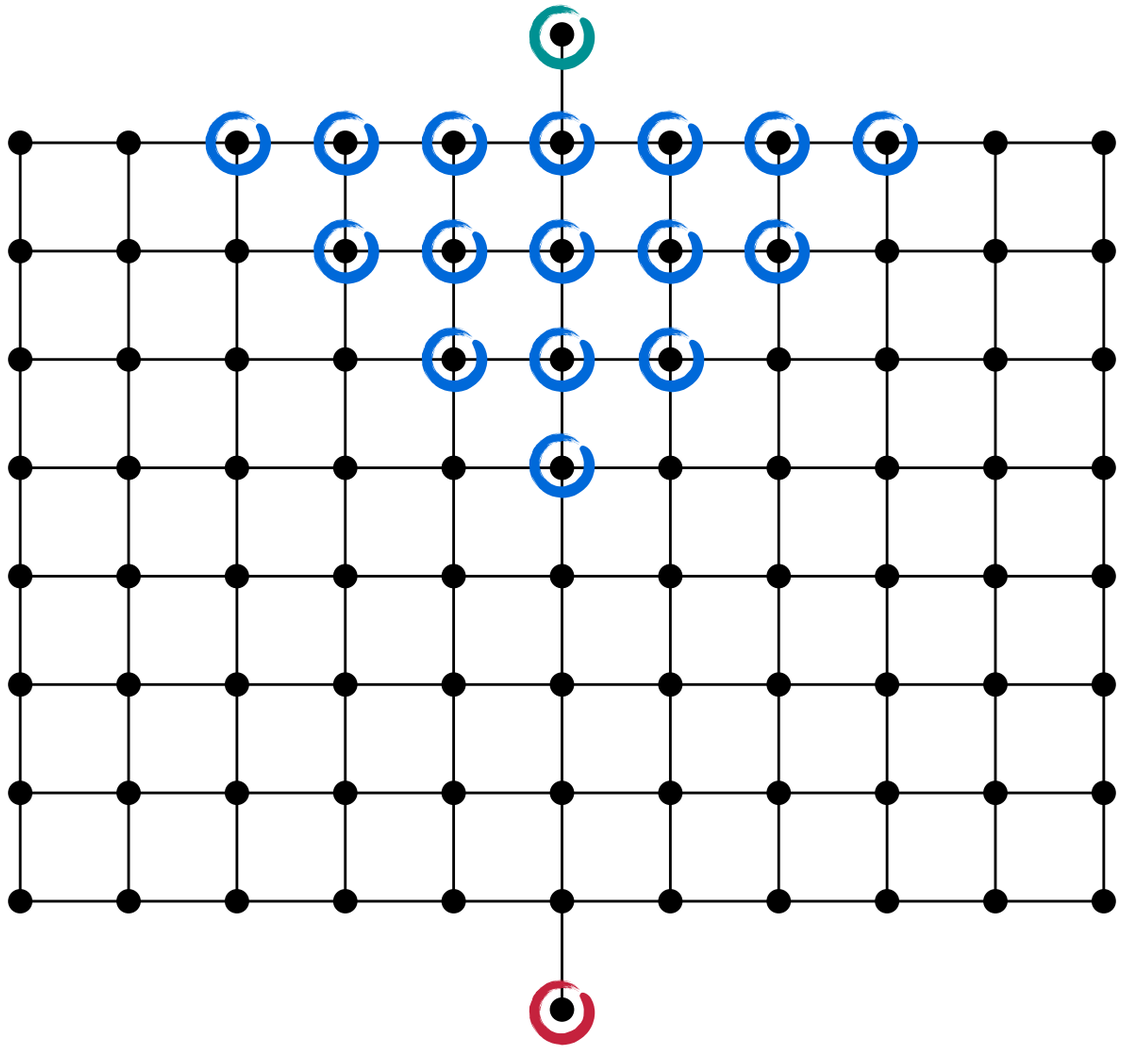
Wurmlöcher!



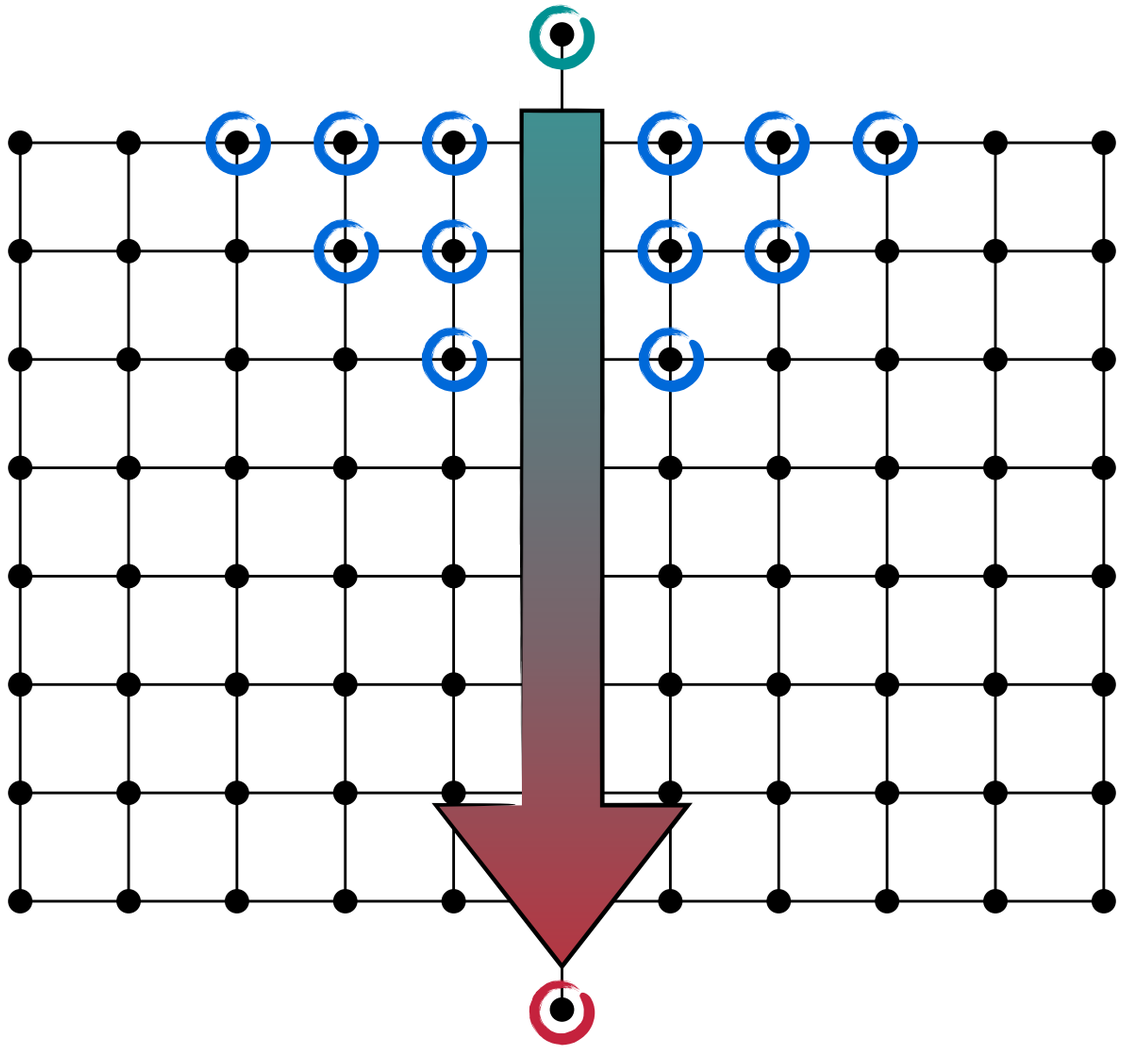
Dijkstra expandiert unter Umständen zu viele Knoten



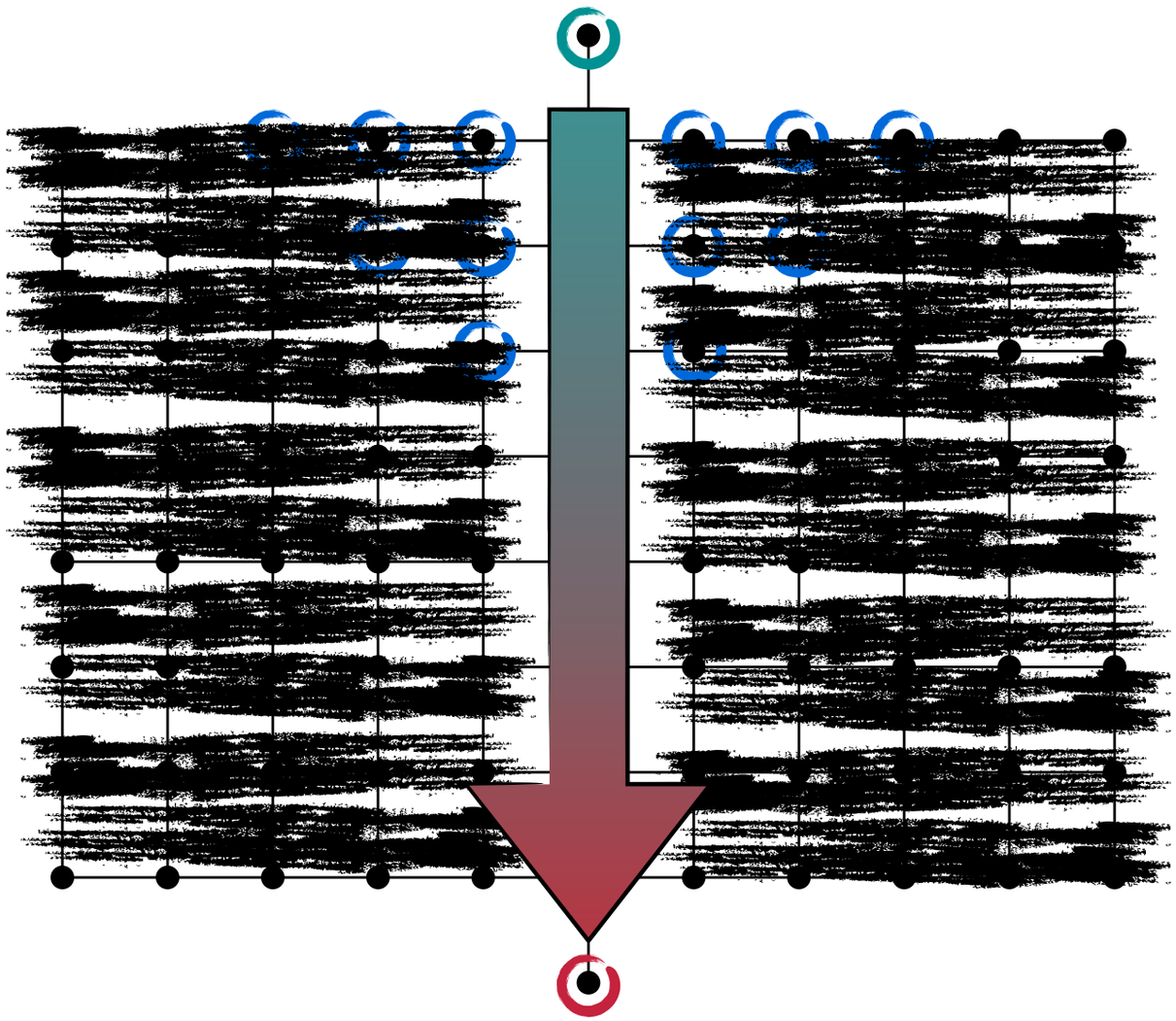
Dijkstra expandiert unter Umständen zu viele Knoten



Dijkstra expandiert unter Umständen zu viele Knoten



Dijkstra expandiert unter Umständen zu viele Knoten

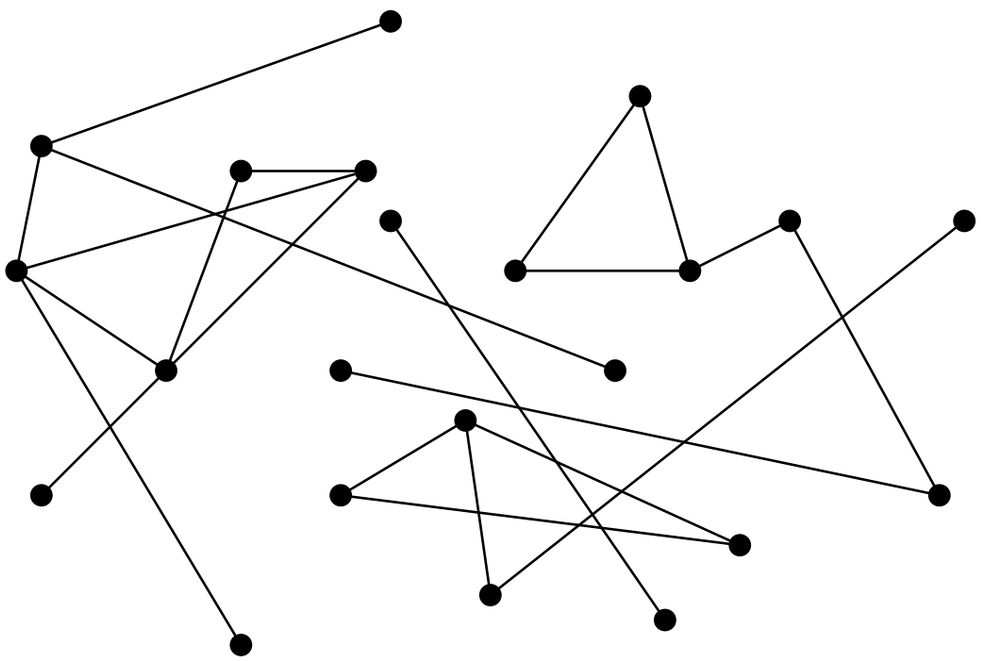


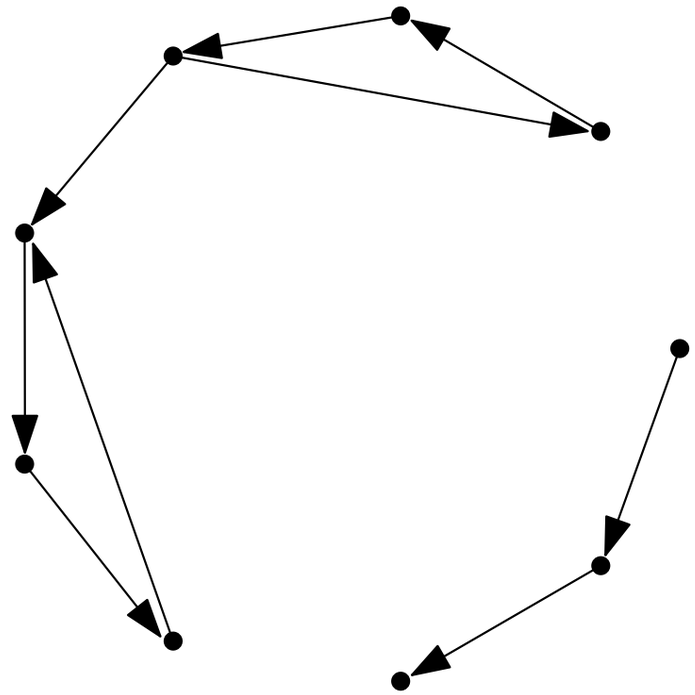
Heuristiken für den richtigen Weg → A*

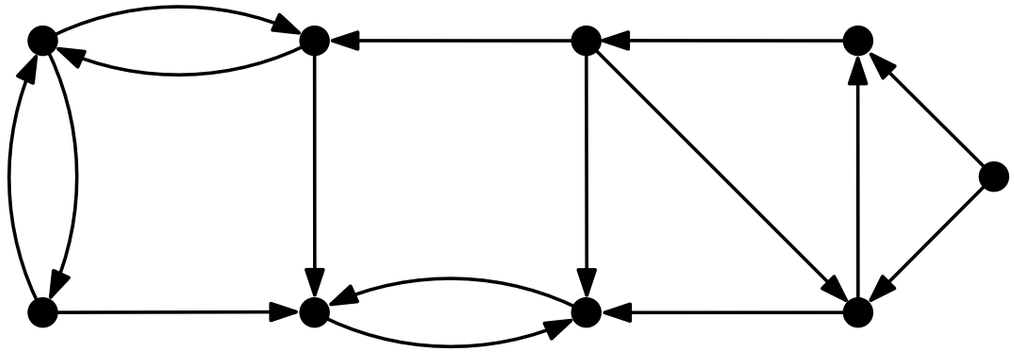
- nutze zusätzliche Heuristik für die „korrekte“ Richtung
- z.B. euklidische Distanz; Luftlinie
- Heuristik darf tatsächliche Länge nicht überschätzen
- Heuristik muss monoton sein: $(u, v) \in E : h(u) \leq h(v) + c(u, v)$
- Knoten wird expandiert wenn $f(v) = h(v) + \ell(v)$ minimal ist

- vollständig: wenn Lösung existiert, findet A* diese Lösung
- optimal: es wird immer die optimale Lösung gefunden
- optimal effizient: A* expandiert eine minimale Anzahl Knoten

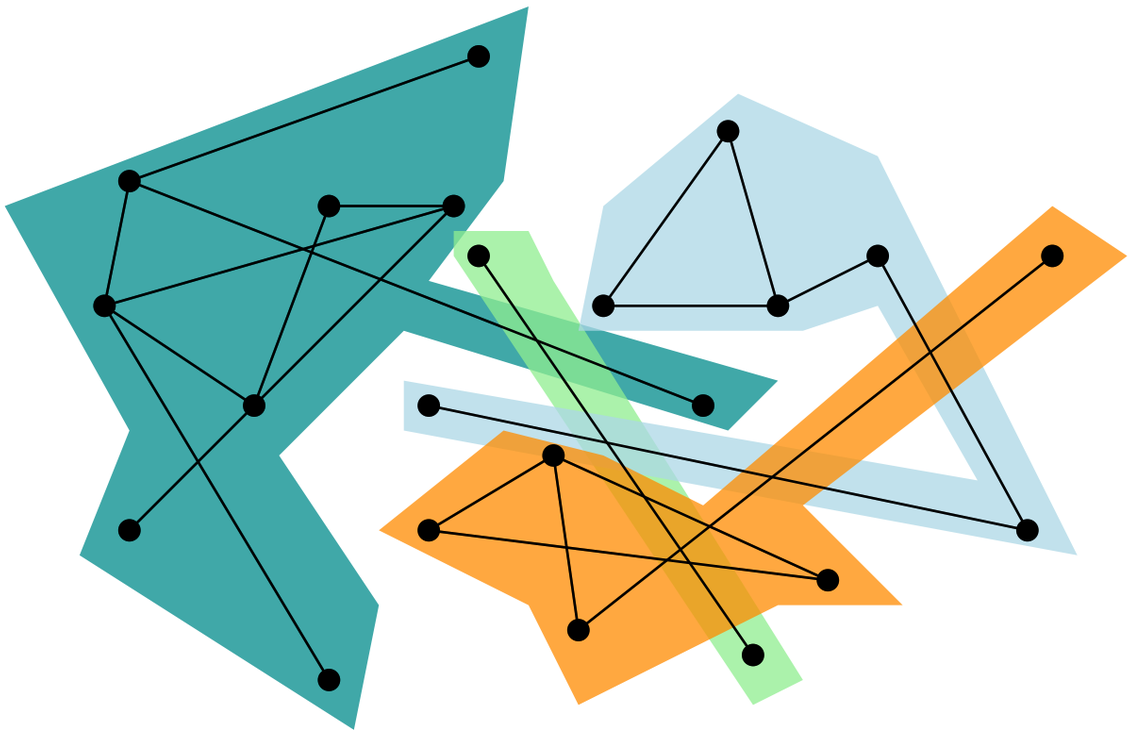
Zusammenhang in Graphen

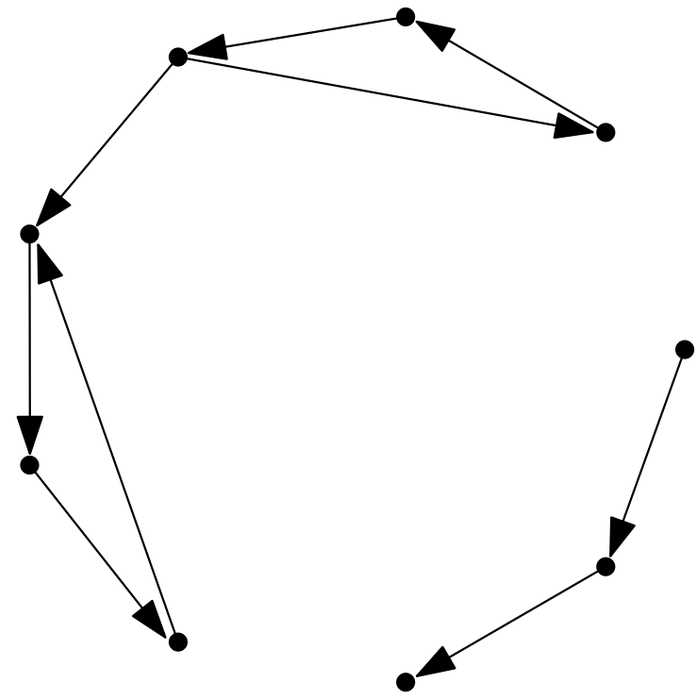


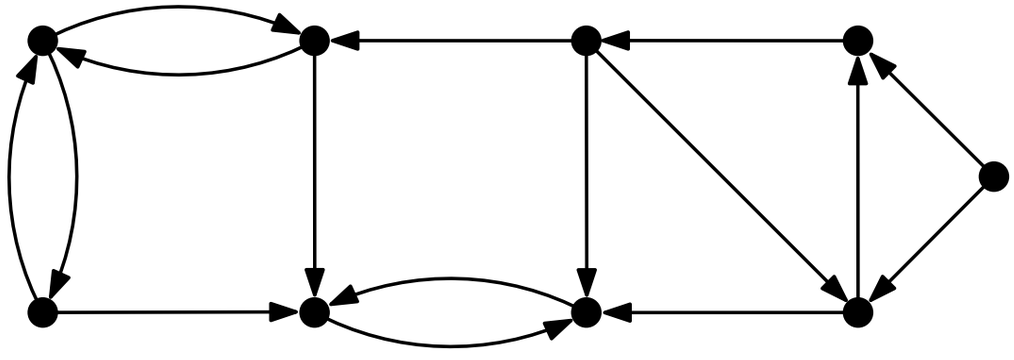




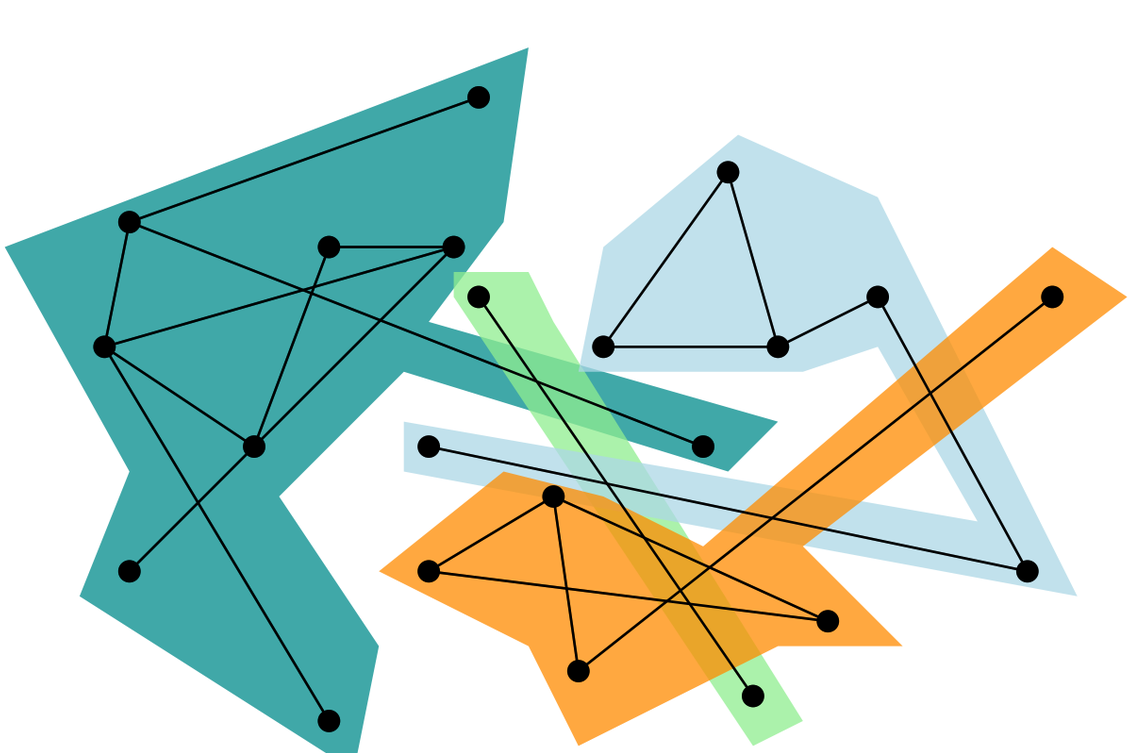
Zusammenhang in Graphen

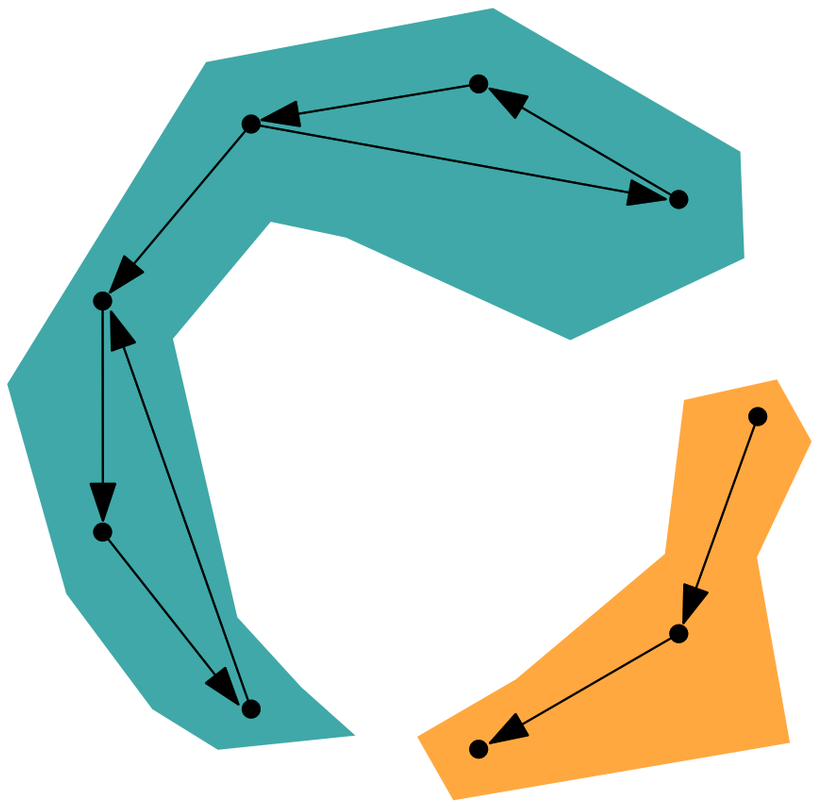


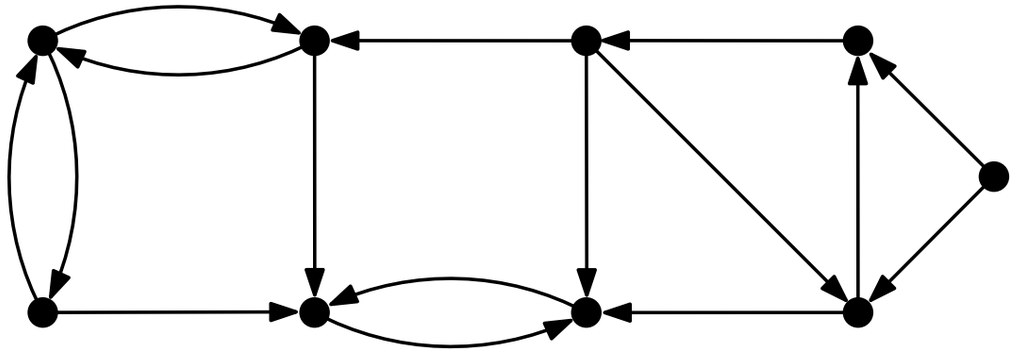




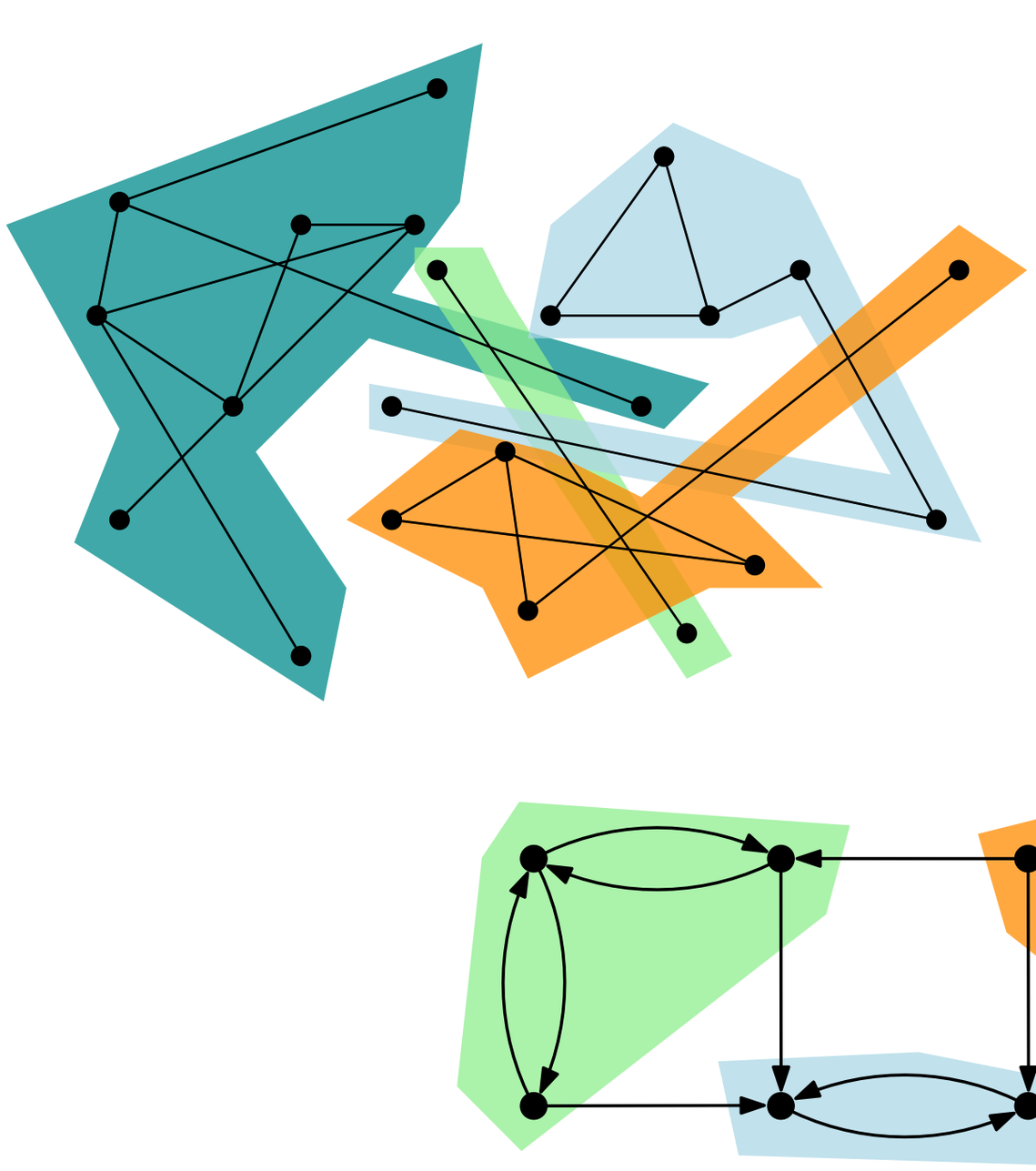
Zusammenhang in Graphen

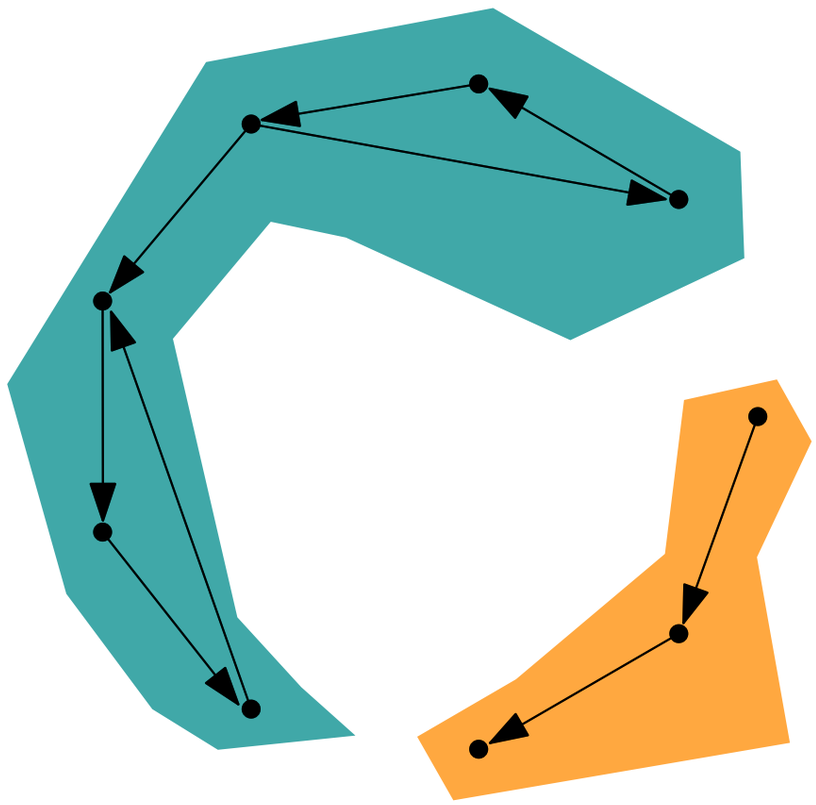




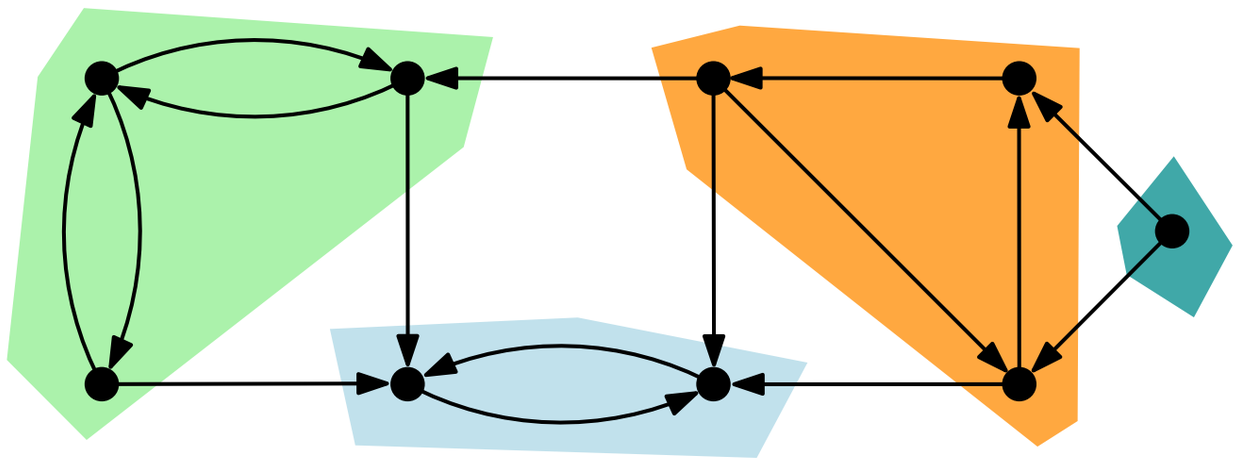


Zusammenhang in Graphen





Zusammenhang in Graphen



Ein gerichteter Graph ist stark zusammenhängend, wenn es für jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ einen Pfad von u zu v und von v zu u gibt.

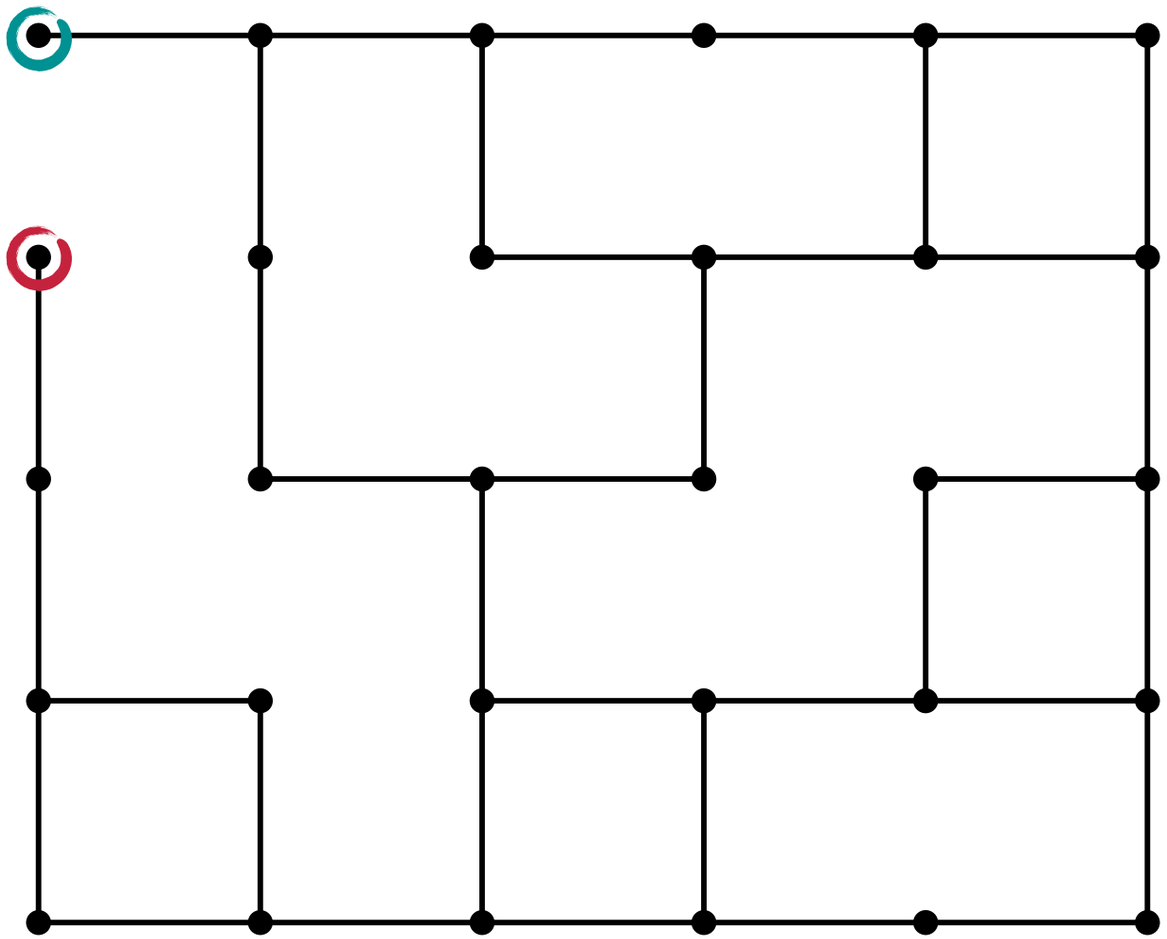
Ein induzierter Teilgraph $G[U]$ für $U \subset V$ heißt starke Zusammenhangskomponente, wenn $G[U]$ stark zusammenhängend ist und nicht erweitert werden kann.

Tarjans Algorithmus

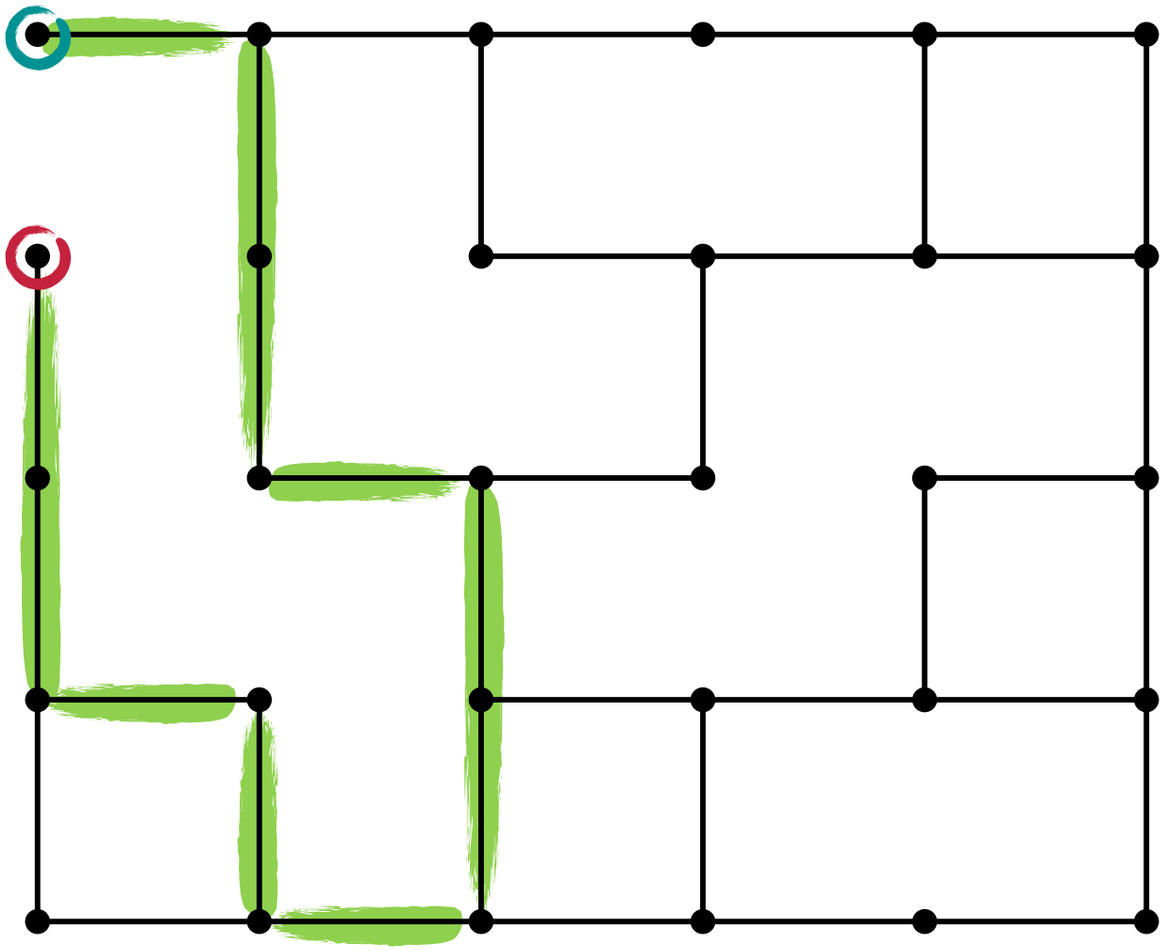
1. Starte DFS. Wenn Knoten v_i besucht wird, gib ihm id(v_i) = i und low_link(v_i) = i. Lege v_i auf den Stack.
2. Wenn wir im DFS-Baum zurückgehen und der vorherige Knoten auf dem Stack liegt, aktualisiere seinen low_link.
3. Wenn alle Nachbarn besucht wurden und der aktuelle Knoten eine SCC gestartet hat (low_link = id), entferne alle Knoten vom Stack mit gleichem low_link.

low_link Updatebedingung: Seien v_i, v_j Knoten und wir finden gerade den Knoten v_i. Dann setzen wir low_link(v_i) = low_link(v_j), wenn es einen Pfad von v_i zu v_j gibt und v_j auf dem Stack liegt.

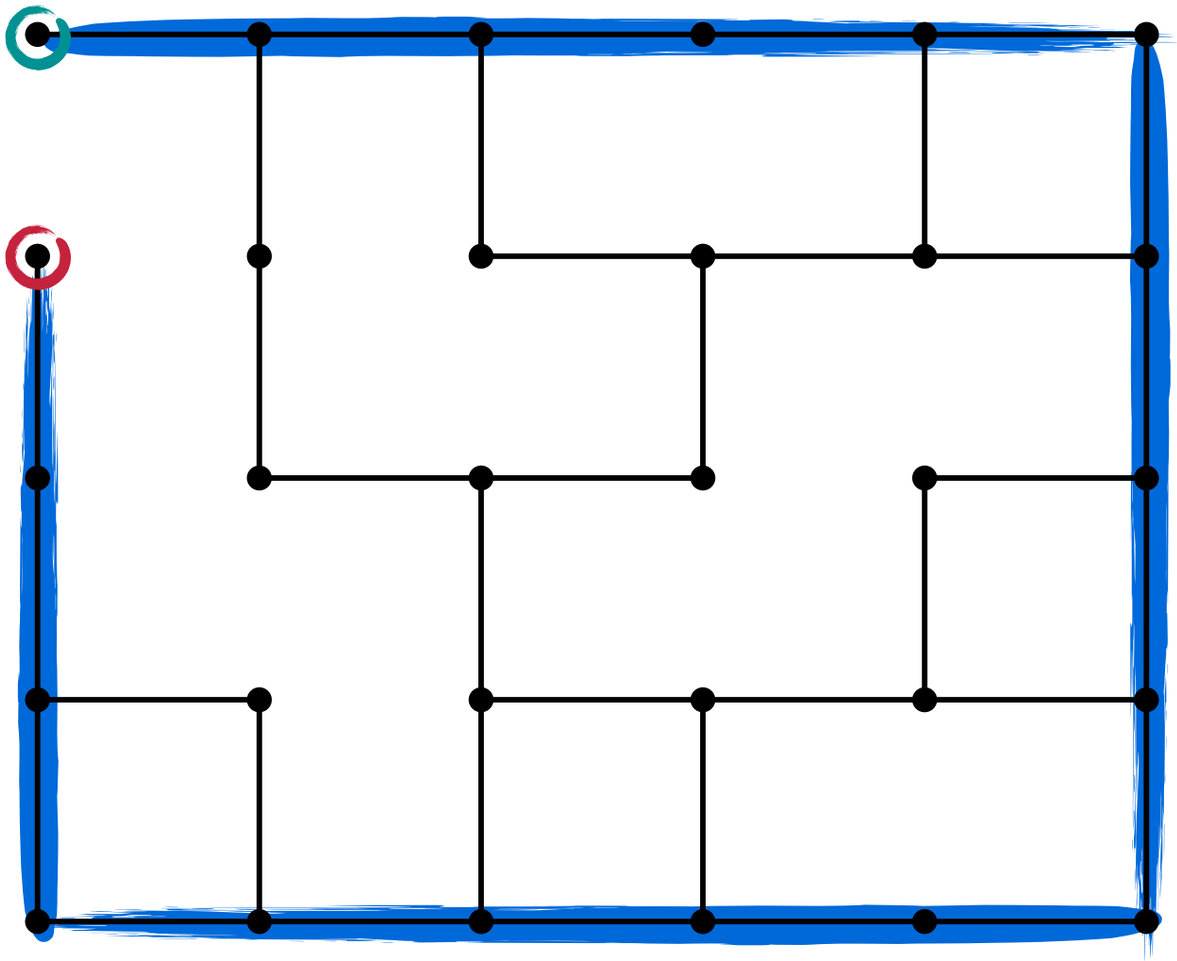
Abbiegungen kosten viel Zeit



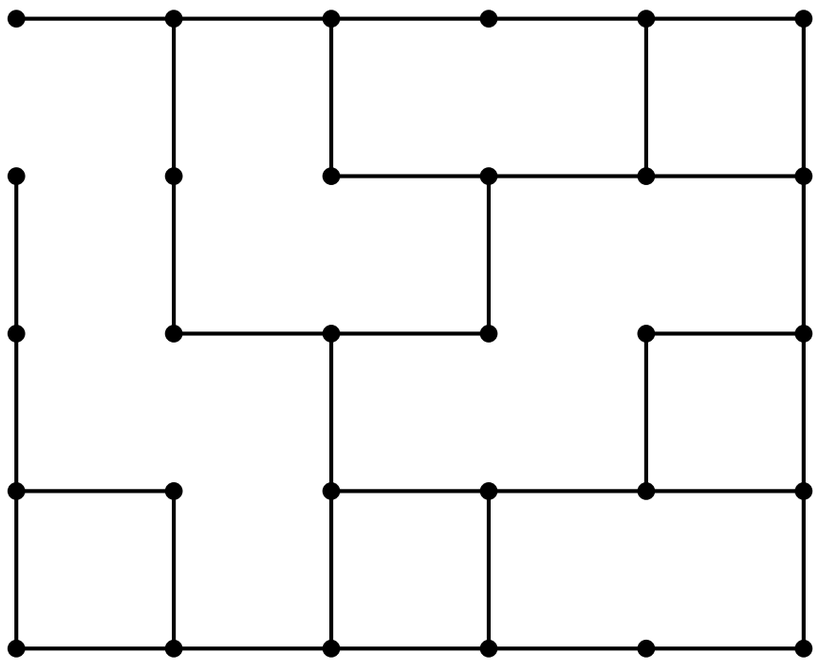
Abbiegungen kosten viel Zeit



Abbiegungen kosten viel Zeit



Abbiegungen kosten viel Zeit



Problem. Weg mit den wenigsten Abbiegungen

Gegeben: Teilgraph des vollständigen Gitters, Startrichtung d

Gesucht: Weg zwischen zwei ausgewählten Knoten, so dass die Anzahl an Abbiegungen so gering wie möglich ist.