Technische Universität Braunschweig

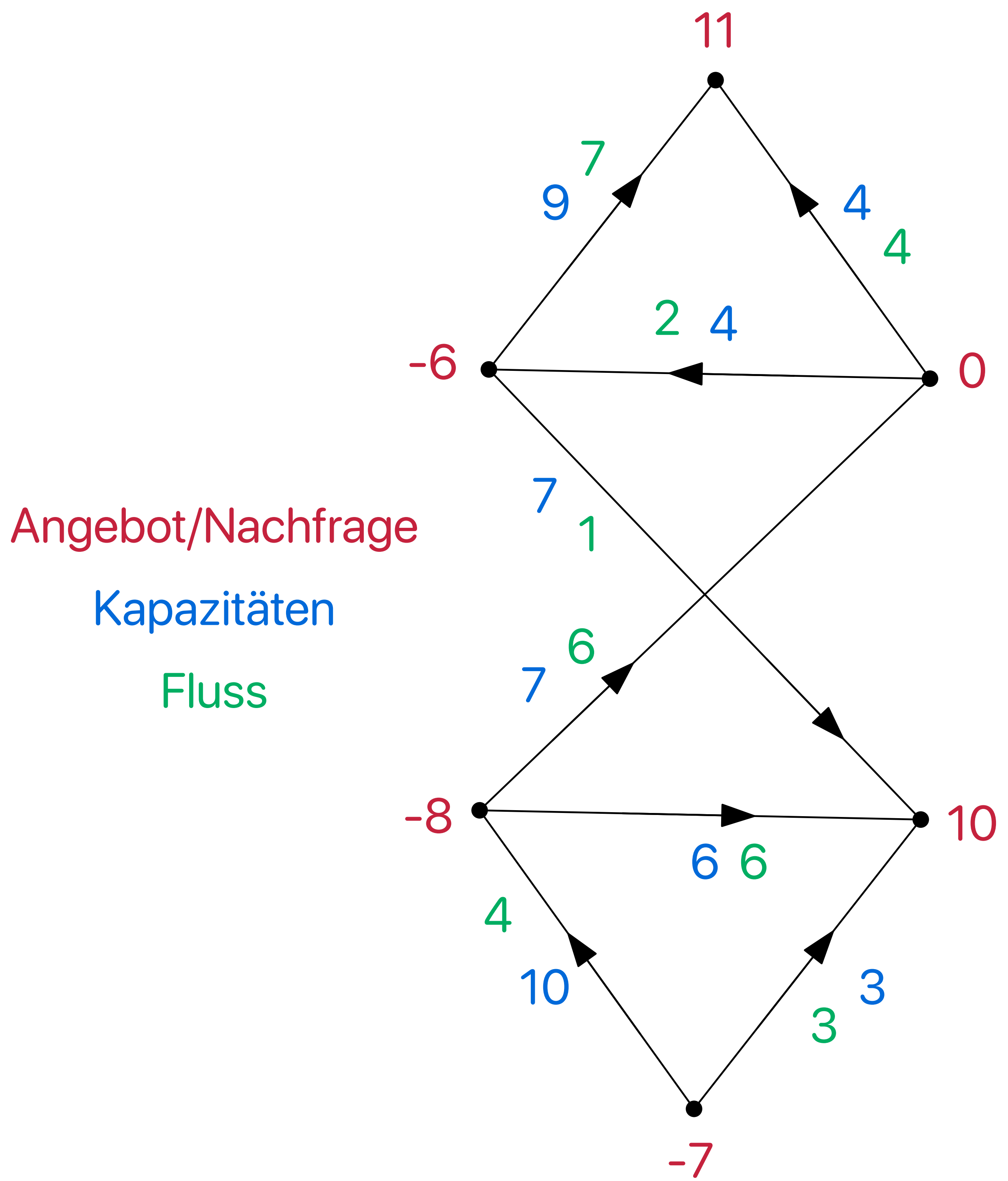
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
Algorithmik

Netzwerkalgorithmen

Übung 3: Zirkulationen, Matrix-Rounding und Gomory-Hu

Christian Rieck, 17. Juni 2021

Zirkulationen mit Angebot und Nachfrage

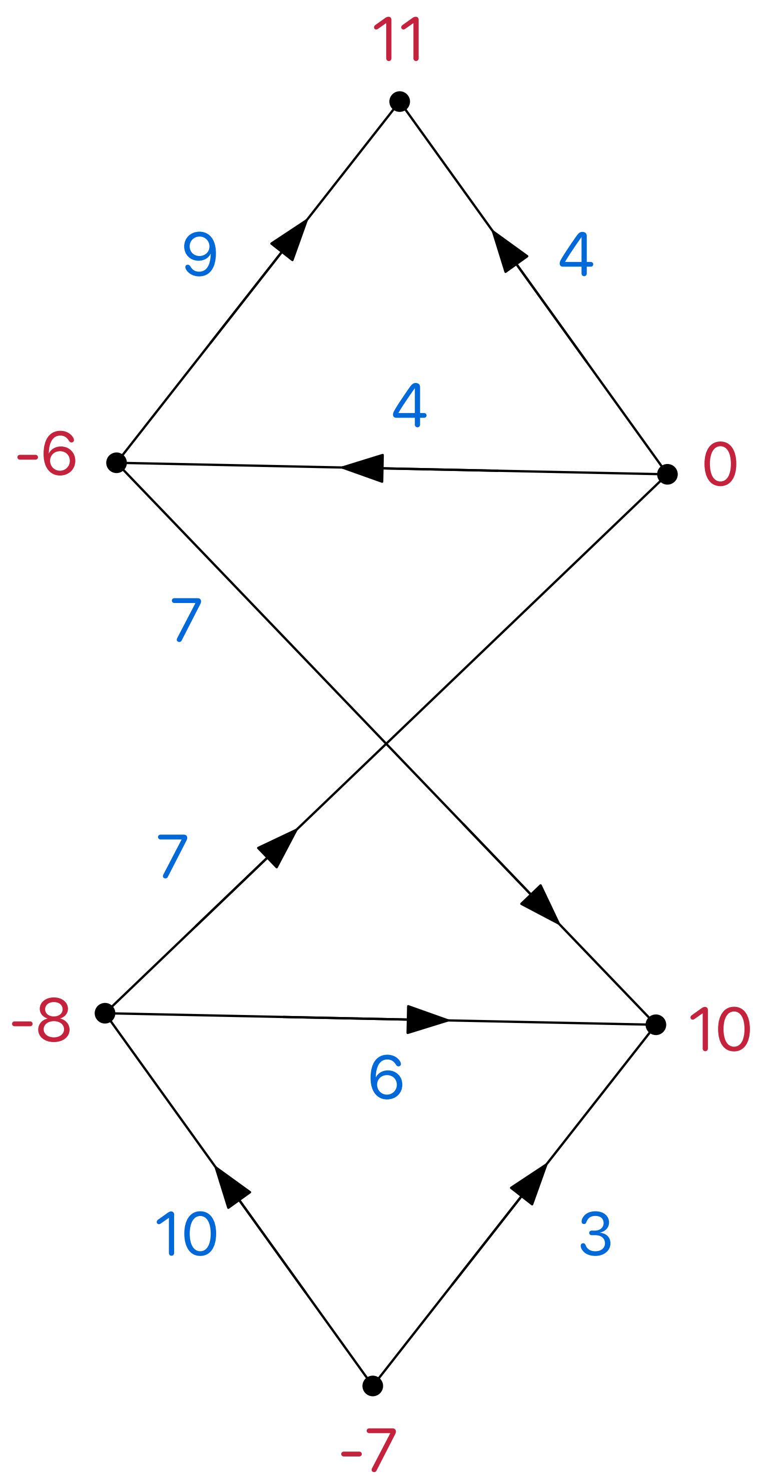


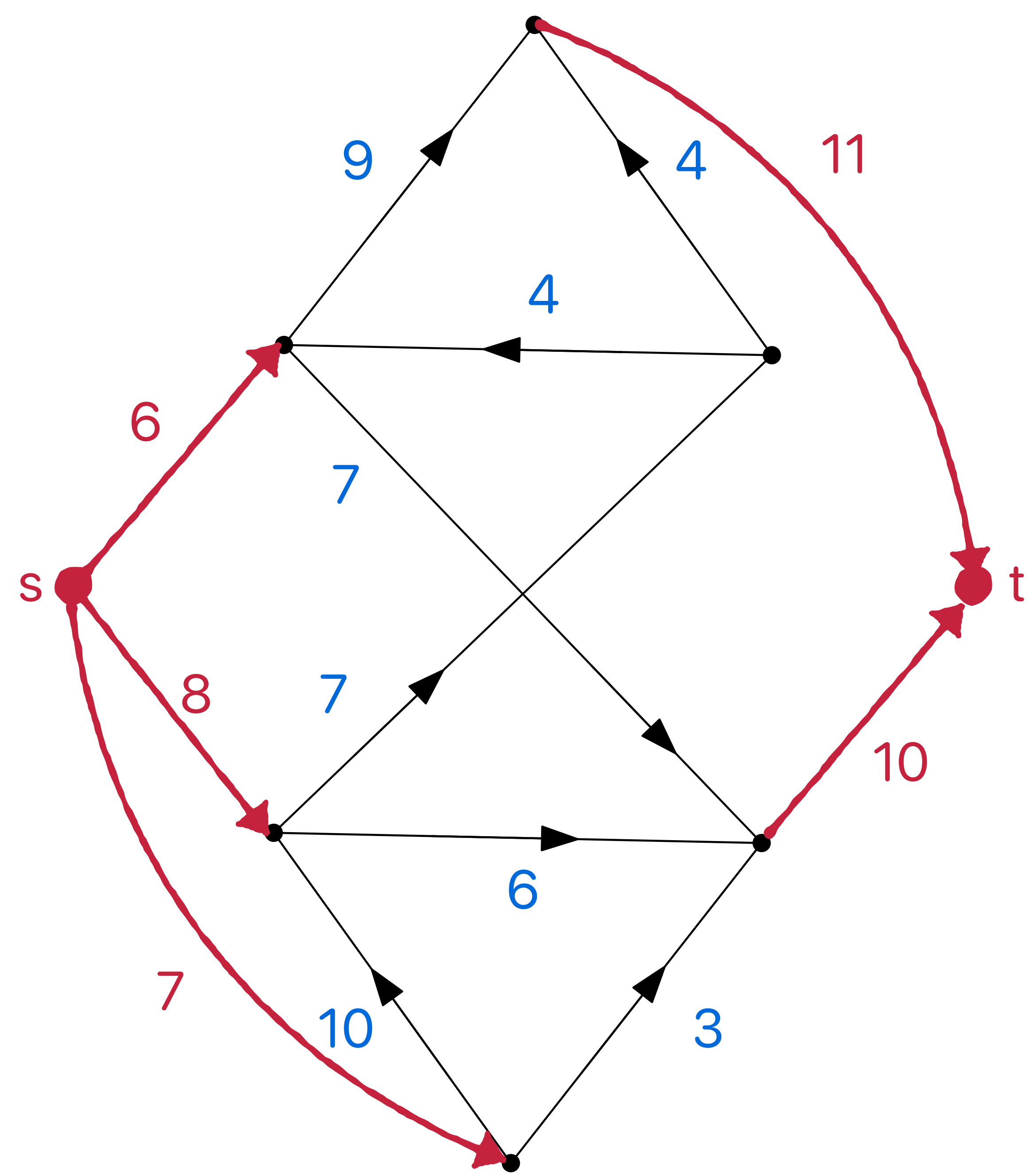
Gegeben:
Digraph G=(V,E),
Kantenkapazitäten u(e),
Angebot/Nachfrage d(v)

Gesucht:
Zirkulation die
$0 \leq f(e) \leq u(e)$ und
$\sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) = d(v)$ erfüllt

Notwendig:
$$\sum_{v:d(v)>0} d(v) = -\sum_{v:d(v)<0} d(v) =: D$$

Zirkulationen mit Angebot und Nachfrage





Zirkulationen mit Angebot und Nachfrage

Modellierung: Das Problem kann als Instanz vom MaxFlow-Problem modelliert werden. Erstelle ein Netzwerk G' wie folgt:

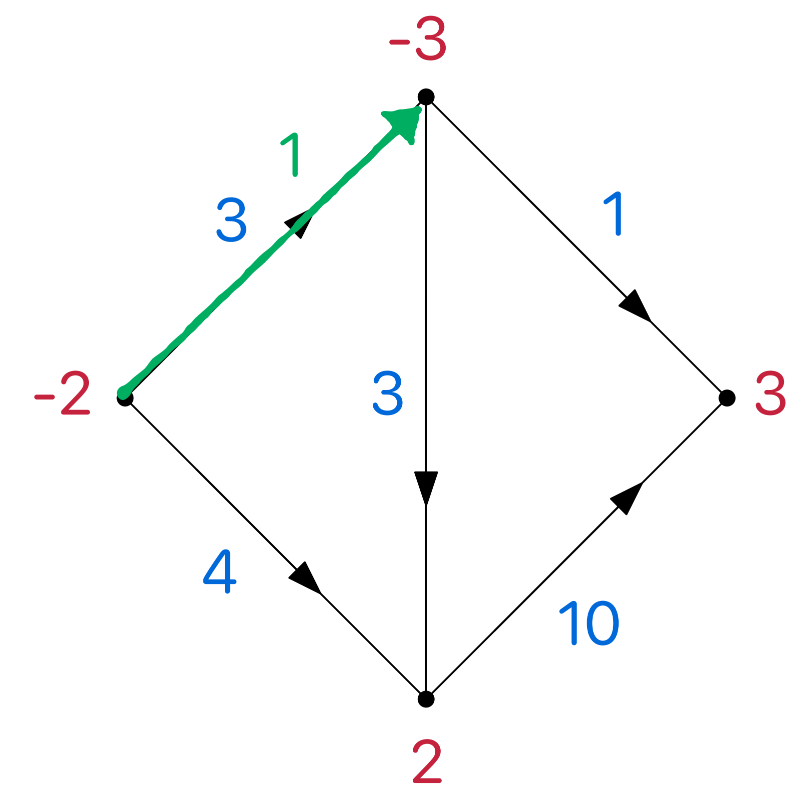
- Quelle s und Senke t hinzufügen
- für alle Knoten v mit $d(v) > 0$ füge eine Kante (v,t) mit Kapazität $d(v)$ hinzu
- für alle Knoten v mit $d(v) < 0$ füge eine Kante (s,v) mit Kapazität $-d(v)$ hinzu

Theorem: Es gibt genau dann eine Zirkulation in G, wenn es in G' einen maximalen Fluss zwischen s und t mit Wert D gibt.

Flüsse mit unteren Schranken

Situation: Es gibt Kanten, die mindestens einen bestimmten Fluss besitzen müssen.

- Kapazitäten $u(e)$ auf Kanten geben obere Schranken an den Fluss
- untere Schranke für eine Kante ist $\ell(e)$
- die Ungleichung $\ell(e) \leq f(e) \leq u(e)$ muss erfüllt sein
- initialer Fluss $f_0(e) = \ell(e)$
- f_0 erfüllt Kapazitätsbedingungen, aber nicht unbedingt die Demandbedingungen
- Demandbedingungen mit Anteil $L(v) = f_0^+(v) - f_0^-(v)$ erfüllt



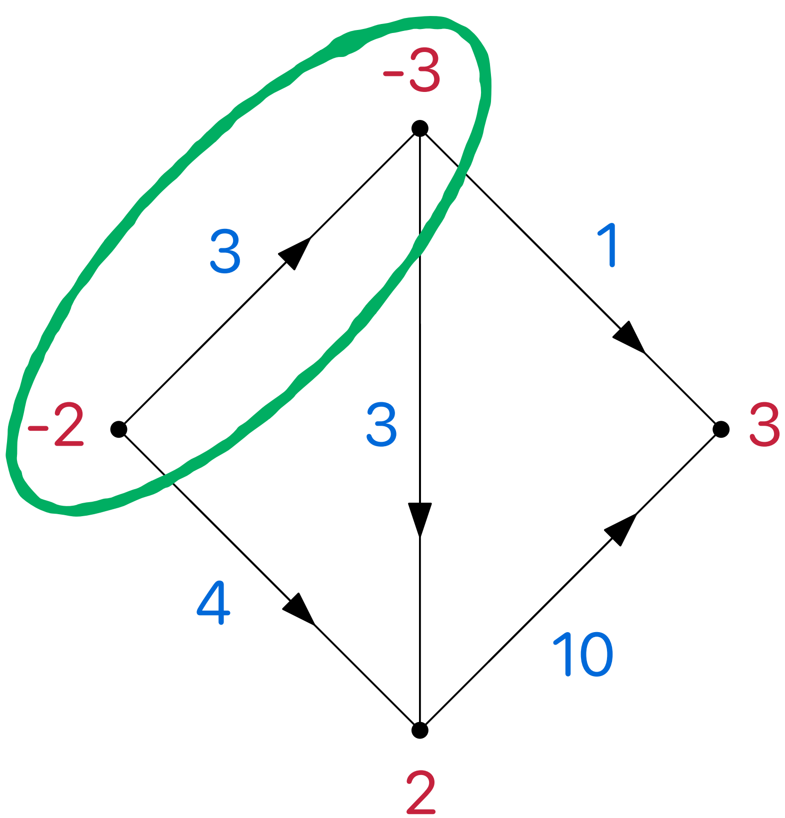
Flüsse mit unteren Schranken

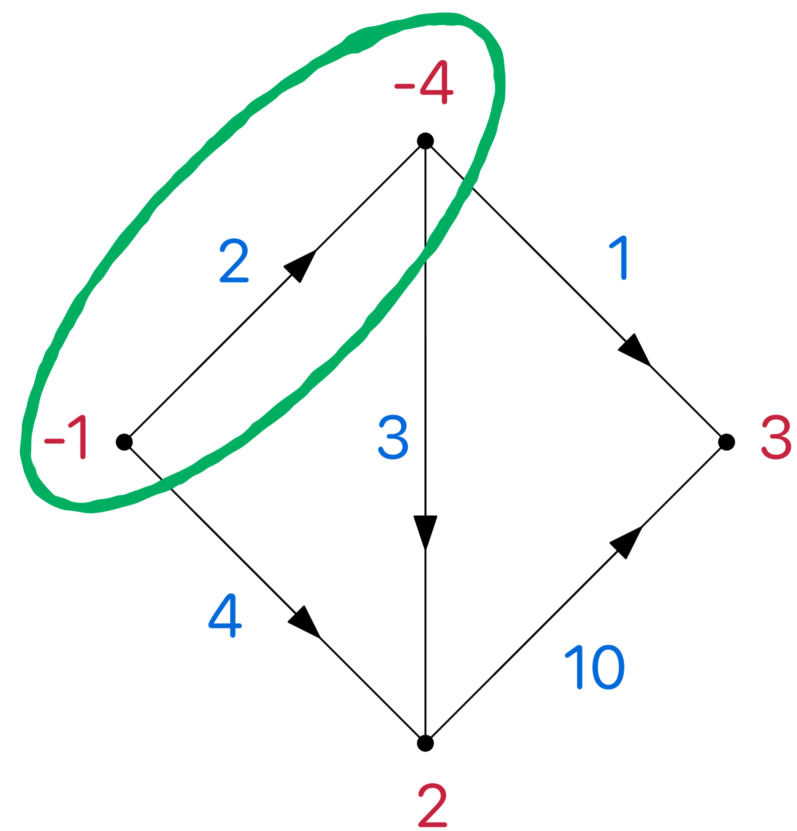
$$L(v) = f_0^+(v) - f_0^-(v)$$

$$\sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) = d(v) - L(v)$$

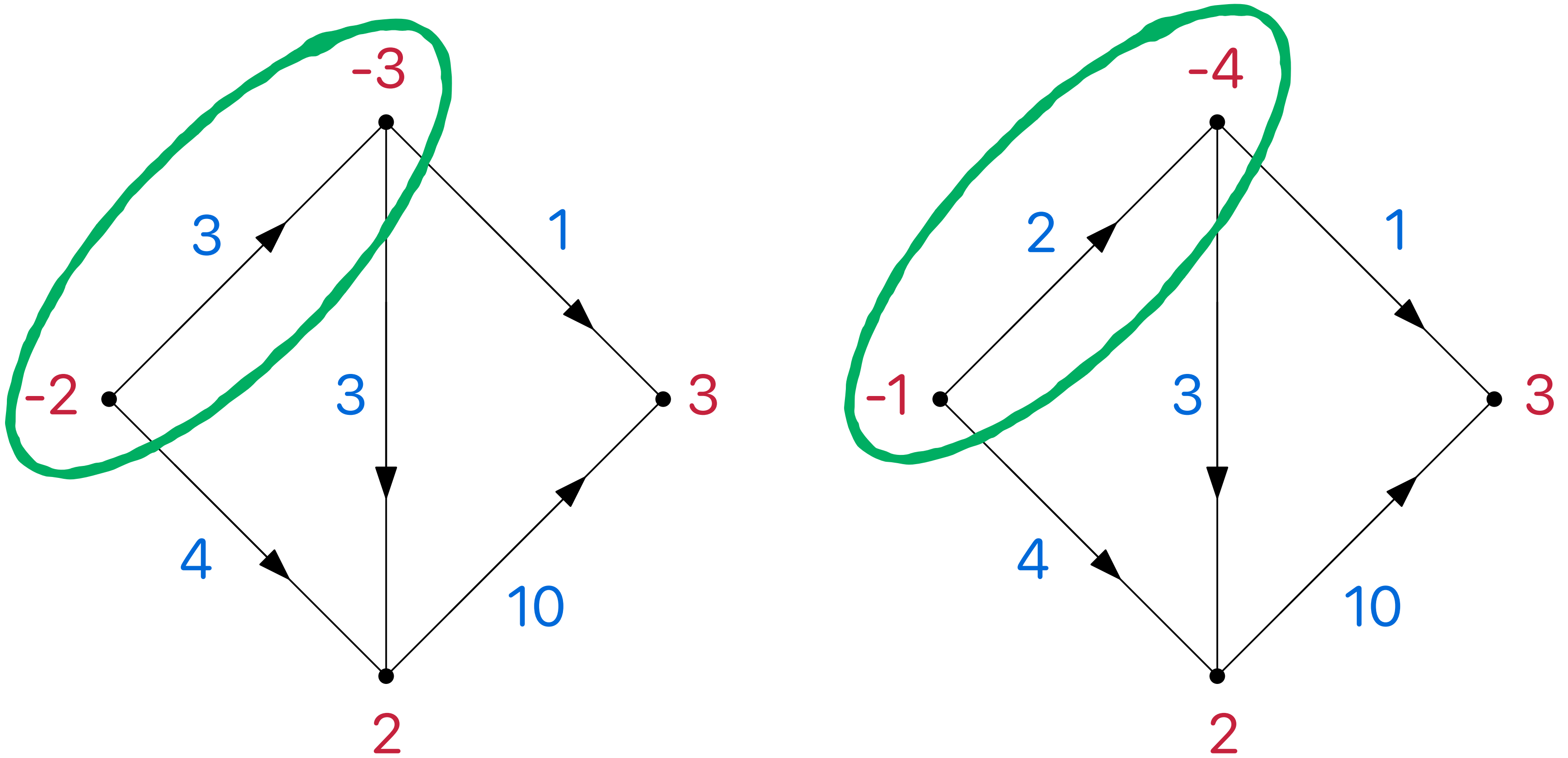
$$0 \leq f(e) \leq u(e) - \ell(e)$$

Löse MaxFlow in neuem Netzwerk, addiere $\ell(e)$ zu $f'(e)$ für Lösung von Original!





Flüsse mit unteren Schranken



Theorem: Es existiert eine gültige Zirkulation in G (mit unteren Schranken) genau dann wenn eine gültige Zirkulation in G′ (ohne untere Schranken) existiert.

Idee: Beobachtung zu den Kapazitäts- und Demandbedingungen.

Matrix-Rounding

3,10	6,80	7,30	17,20
9,60	2,40	0,70	12,70
3,60	1,20	6,50	11,30
16,30	10,40	14,50	

3	7	7	17
10	2	1	13
3	1	7	11
16	10	15	

Gegeben: $n \times m$ Matrix $M = \{m_{i,j}\}$ mit $m_{i,j} \in \mathbb{R}$

Gesucht: $n \times m$ Matrix $M' = \{m'_{i,j}\}$ mit $m'_{i,j} \in \mathbb{N}$, $m'_{i,j} = \lfloor m_{i,j} \rceil$,

$$\sum_i m_{i,j} = \sum_i m'_{i,j} \quad \text{und} \quad \sum_j m_{i,j} = \sum_j m'_{i,j}$$

Matrix-Rounding

0,35	0,35	0,35	1,05
0,55	0,55	0,55	1,65
0,9	0,9	0,9	

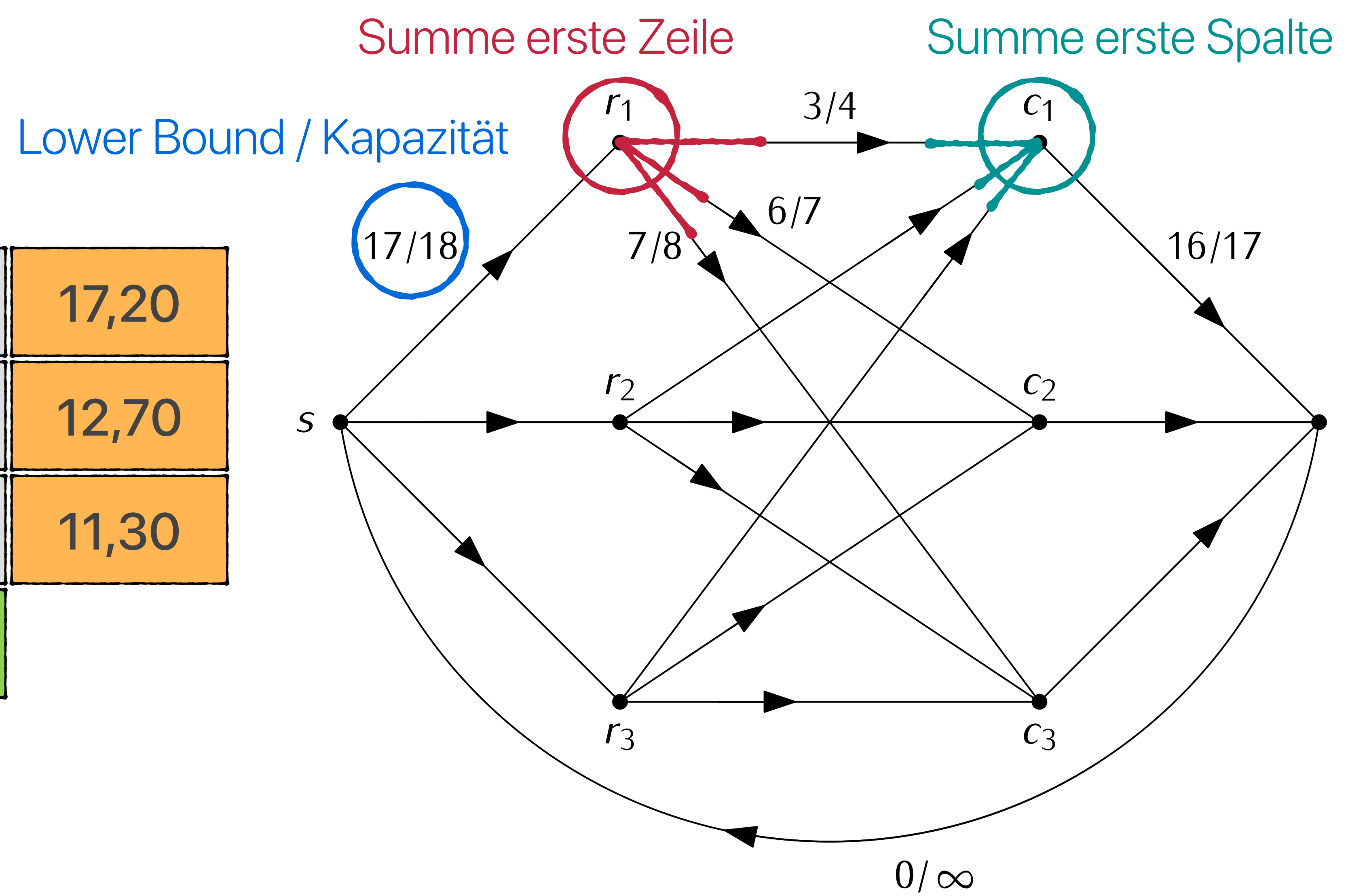
0	0	0	0
1	1	1	3
1	1	1	

0	0	1	1
1	1	0	2
1	1	1	

Matrix-Rounding

Modellierung: Zirkulation mit Angebot und Nachfrage und unteren Schranken!

3,10	6,80	7,30	17,20
9,60	2,40	0,70	12,70
3,60	1,20	6,50	11,30
16,30	10,40	14,50	



demand d(v) = 0

Matrix-Rounding

3,10	6,80	7,30	17,20
9,60	2,40	0,70	12,70
3,60	1,20	6,50	11,30
16,30	10,40	14,50	

3	7	7	17
10	2	1	13
3	1	7	11
16	10	15	

Theorem: Für jede Matrix existiert eine gültige Rundung.

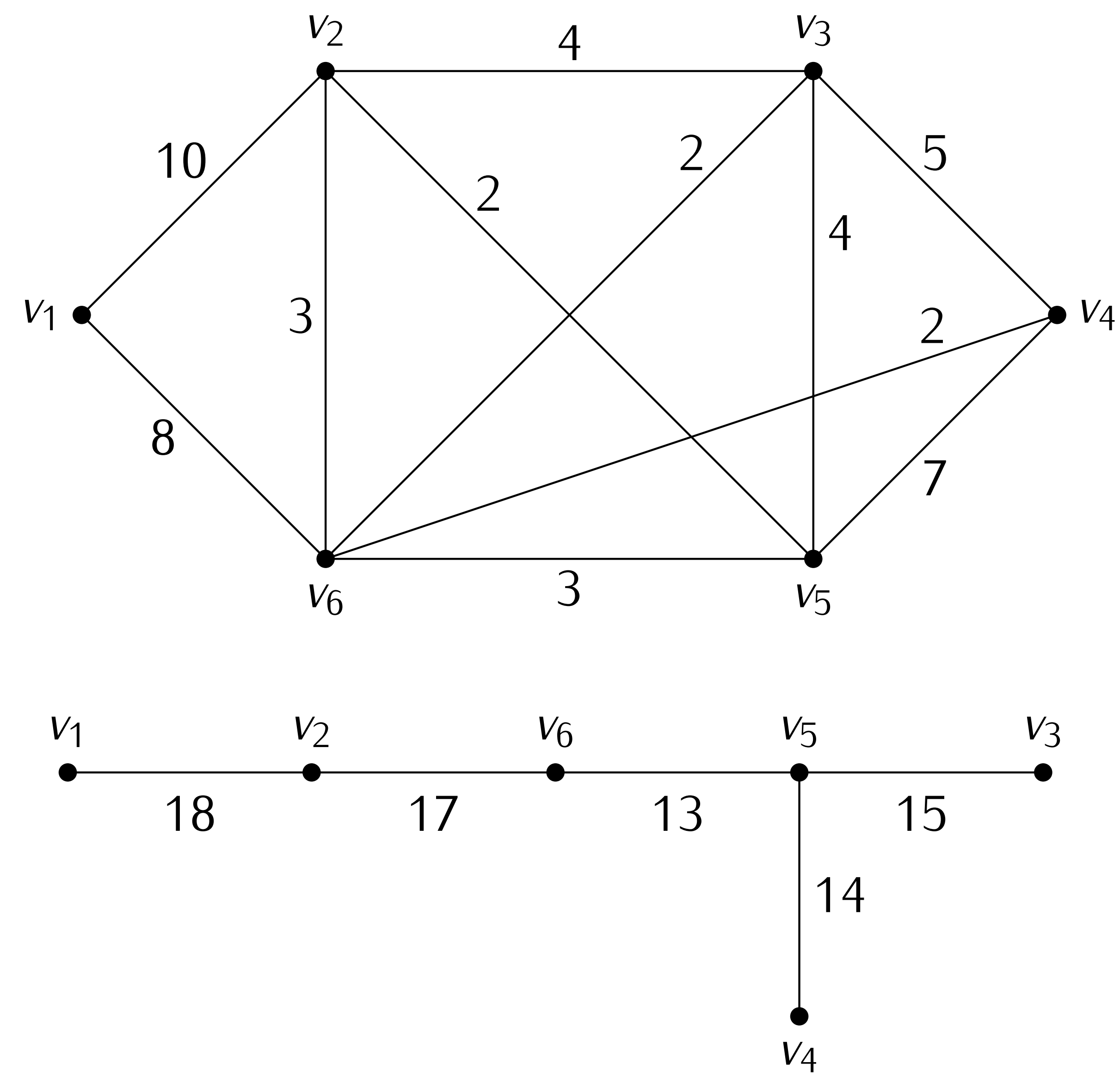
Idee: Argumentation über Ganzzahligkeit von Lösungen und Konstruktion des Netzwerks.

Gomory-Hu Bäume

- maximale Flüsse zwischen allen Paaren von Knoten
- global minimaler Schnitt
- trivial: n^2 Flussberechnungen
- notwendig: n-1 Flussberechnungen

Definition: Zwei Graphen heißen „flussäquivalent", wenn für alle Paare von Knoten die minimalen Schnitte in beiden Graphen gleich sind.

Theorem: Für jeden Graphen G gibt es einen flussäquivalenten Graphen G′, so dass G′ ein Baum ist.



Paper: Multi-Terminal Network Flows (Gomory and Hu, 1961)