Optimalität vs. Approximation

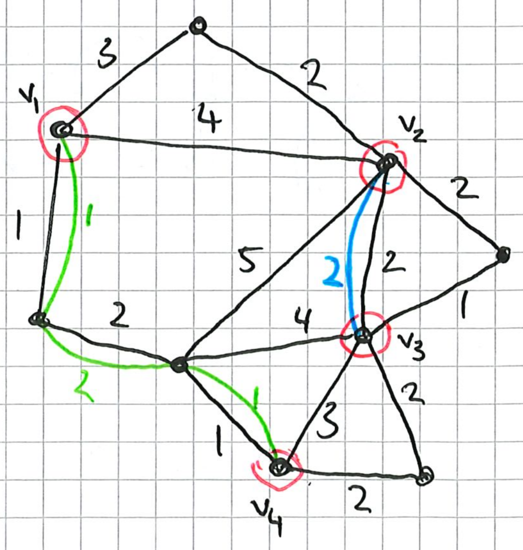
Eine **Eulertour** in einem zusammenhängenden Graphen $G=(V,E)$ ist eine Menge von kantendisjunkten Kreisen $C_1, \dots, C_k$ so dass jede Kante von G auf genau einem Kreis liegt.

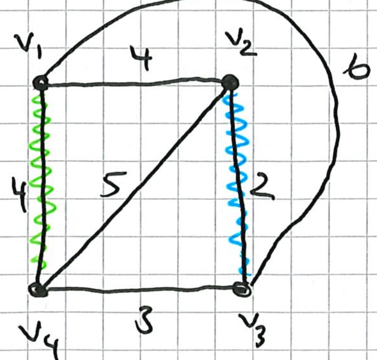
Ein **Hamiltonkreis** in einem zshg. Graphen $G=(V,E)$ ist ein Kreis C, sodass jeder Knoten genau einmal besucht wird.

Problem: Gegeben Graph $G=(V,E)$ der zshg. ist. Existiert in G eine Eulertour?

Problem: Gegeben Graph $G=(V,E)$ der zshg ist und Kantengewichte $c: E \to \mathbb{R}^+$ besitzt. Gesucht ist eine Eulertour mit minimalem Gewicht.

→ **Chinesisches Briefträgerproblem**





Perfektes Matching mit minimalem Gewicht!

Hamiltonkreisproblem ist NP-vollständig

→ Metrisches Traveling Salesman Problem

Geg: vollständiger Graph mit Kantengewichten $c: E \to \mathbb{R}^+$ sodass für je drei Knoten a, b, k gilt:

$$c(\{a,k\}) \leq c(\{a,b\}) + c(\{b,k\}).$$

Ges: Hamiltonkreis mit minimalem Gesamtgewicht.

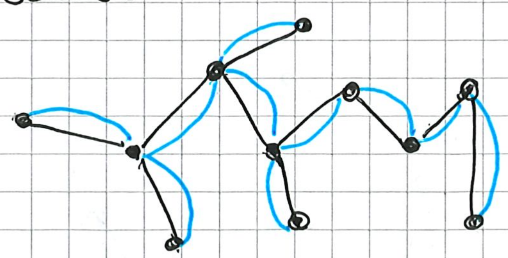
→ es existiert mindestens ein Kreis da Graph vollständig

→ NP-schwer, Reduktion von HamKreis

→ jede Kante die nicht im Graphen ist, bekommt Gewicht 2, alle übrigen Gewicht 1.

Beobachtung: Es gibt eine Eulertour X in dem Graphen mit Gewicht $c(X)$, dann ist die Länge einer optimalen TSP-Tour höchstens $c(X)$.

Nutze Minimal aufspannende Bäume!



Algo 1:

- Berechne MST von G
- Verdopple jede Kante
- finde Eulertour
- "überspringe" doppelt besuchte Knoten

Satz: Algo 1 ist eine 2-approximation für das metrische TSP.

Beobachtung: Wir müssen nur ungerade Knoten miteinander verbinden → Verdopplung des Baumes ist ggf. zu teuer!

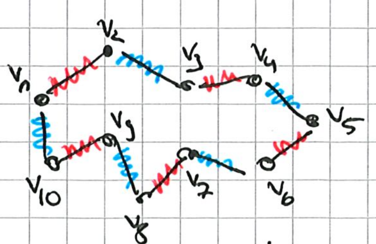
Beobachtung: Aus Handschlaglemma folgt, dass es gerade viele ungerade Knoten gibt!
→ perfektes Matching!

Algorithmus von Christofides (1976)

1. Vollständiger Graph mit Δ-Ungleichung
2. Berechne MST T mit Gewicht $c(T)$
3. Berechne kostenminimales perfektes Matching M auf ungeraden Knoten von T mit Gewicht $c(M)$
4. Bestimme Eulertour R in $G' = (V(G), E(T) \cup E(M))$ mit Gewicht $c(R)$
5. Bestimme TSP-Tour π durch Abkürzen in R mit Gewicht $c(\pi) \leq c(R)$

Satz. Der Algorithmus von Christofides ist eine $3/2$-Approximation für metrisches TSP.

Beweis-Idee: Sei π^* optimale Tour. Dann gilt $c(\pi^*) \geq c(T)$. Eine Tour lässt sich in zwei kantendisjunkte Matchings aufteilen



$M_1 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7, v_8\}, \{v_9, v_{10}\}\}$

$M_2 = \{\{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}, \{v_8, v_9\}, \{v_{10}, v_1\}\}$

mit $c(M_1) + c(M_2) \leq c(\pi^*)$

Damit gilt für kostenminimales Matching M

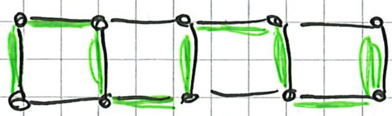
$$c(M) \leq c(M_1) \quad \text{und} \quad c(M) \leq c(M_2)$$

und somit $\quad 2\,c(M) \leq c(\Pi^*)$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} c(\Pi) \leq c(R) &\leq c(M) + c(T) \\ &\leq \frac{1}{2} c(\Pi^*) + c(\Pi^*) \\ &= \frac{3}{2} c(\Pi^*) \end{aligned}$$

$\square$



MST

$\rightarrow$ Es gibt Instanzen, die diese Schranke erreichen?