

Jede Arboreszenz besitzt ~~mit~~ mindestens $2^{h(A_r)}$ Knoten.

Beweis: Induktion über Höhe $h(A_r)$

Zu Beginn: $h(A_r) = 0$

\Rightarrow Jede Arboreszenz enthält einen Knoten.

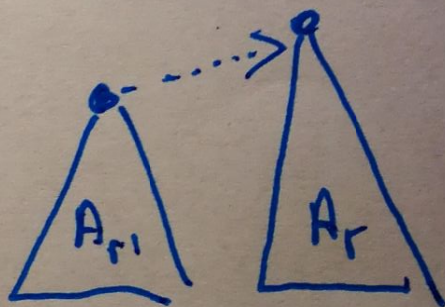
Also $1 = 2^0 = 2^{h(A_r)}$

ZZ: Eigenschaft bleibt erhalten, wenn eine neue Kante hinzugefügt wird.

Betrachte Union (A_r, A_{r_1})

Fall 1: $h(A_r) > h(A_{r_1})$

Hinzufügen der neuen Kante verändert Höhe von A_r nicht, aber es kommen mehr Knoten hinzu.



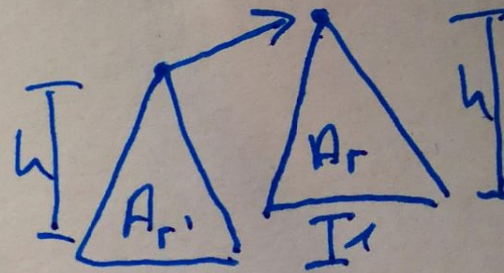
\Rightarrow Eigenschaft bleibt erhalten.

Fall 2: $h(A_r) = h(A_{r'})$

A_r und $A_{r'}$ besitzen nach Voraussetzung mindestens $2^{h(A_r)}$ Knoten.

Hinzufügen der Kante erhöht die Höhe um 1.

Anzahl Knoten erhöht sich auf mindestens



$$2^{h(A_r)} + 2^{h(A_{r'})} = 2 \cdot 2^{h(A_r)} = 2^{h(A_r)+1}$$

\Rightarrow Eigenschaft bleibt erhalten.

□