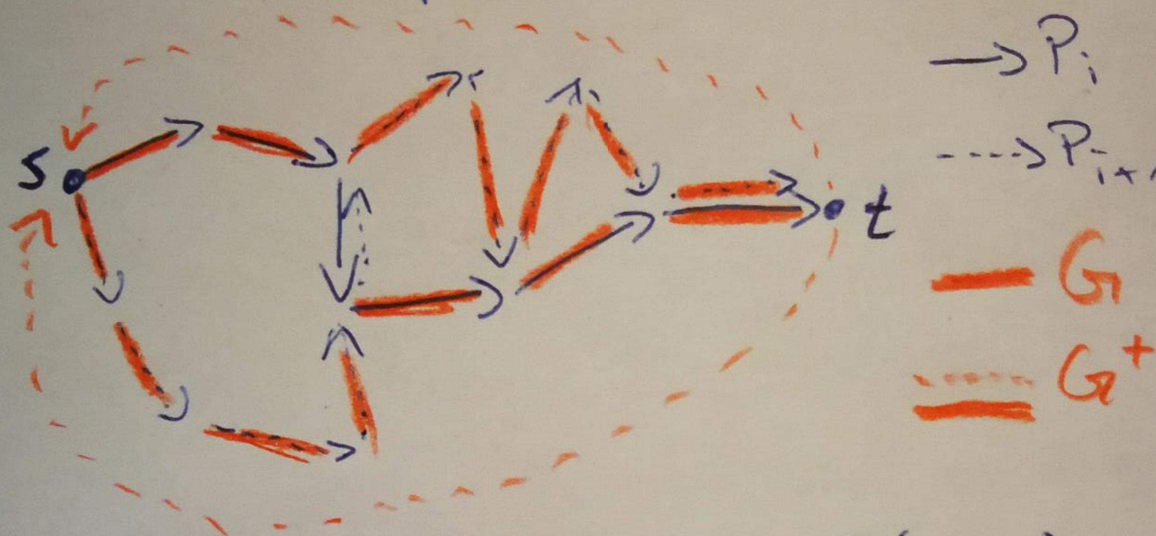
Lemma 4.16

a) Für alle $1 \leq i < k$ gilt $|E(P_i)| \leq |E(P_{i+1})|$

Betrachte folgenden Graphen G

$P_i \dot\cup P_{i+1}$ ohne Kanten die entgegengesetzt in beiden Pfaden existieren.



- Nach Def. ist $E(P_i) \subseteq E(D_{f_i})$
- Ist eine Kante e "neu" in $D_{f_{i+1}}$, also in $D_{f_{i+1}} \setminus D_{f_i}$ ein Rückwärtskante einer Kante aus P_i

$\Rightarrow e \in P_{i+1} \setminus D_{f_i} \Rightarrow \overleftarrow{e} \in P_i \Rightarrow e \notin G$

$\Rightarrow E(G) \subseteq E(D_{f_i})$

<u>Fall 1:</u> P_i und P_{i+1} enthalten keine entgegengesetzte Kanten.

$\Rightarrow E(G) = E(P_i \cup P_{i+1})$.

Damit sind P_i und P_{i+1} augmentierende Pfade in D_{f_i}. Algorithmus wählt immer den kürzesten, also ist $|P_i| \leq |P_{i+1}|$.

<u>Fall 2:</u> Es ex. entg. Kanten in P_i und P_{i+1}

Betrachte G^+, welcher entsteht, wenn zu G zwei Kopien der Kante (t,s) hinzugefügt werden.

Beob: G^+ ist eulersch (indegree = outdegree für jede Kante)

$\Rightarrow G^+$ lässt sich in disjunkte Kreise zerteilen.

Je eine Kopie von (t,s) liegt auf einem Kreis C_1 bzw C_2.

$\Rightarrow Q_1 := C_1 \setminus (t,s)$, $Q_2 := C_2 \setminus (t,s)$ sind st-Pfade in D_{f_i}

$\Rightarrow$ Es gilt:

$$|E(P_i)| \leq |E(Q_1)|$$
$$|E(P_i)| \leq |E(Q_2)|$$

$\Rightarrow$
$$2 \cdot |E(P_i)| \leq |E(Q_1)| + |E(Q_2)| \leq |E(G)|$$
$$\leq |E(P_i)| + |E(P_{i+1})| - 2$$

$$\Leftrightarrow |E(P_i)| \leq |E(P_{i+1})| - 2$$

---

b) Für zwei Pfade P_i, P_j mit $i<j$ mit entgg. Kanten ist
$$|E(P_i)| \leq |E(P_j)| - 2$$

Von a):

Für $i<l<j$ gilt $|E(P_i)| \leq |E(P_l)| \leq |E(P_j)|$

Betrachte l maximal, sodass P_l und P_j entgg. Kanten besitzen.

Def. Graph G wie gehabt.

- $E(P_\ell) \subseteq E(D_{f\ell})$
- Jede Kante in $E(P_j) \setminus E(D_{f\ell})$ muss eine Rückwärtskante von $P_\ell, \ldots, P_{j-1}$ sein. Nach Wahl von ℓ kann das nur P_ℓ sein.

$\Rightarrow E(G) \subseteq E(D_{f\ell})$

analog zu a)

$\Rightarrow$ Behauptung $\square$