

## Bew Satz 2.5:

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 1$$

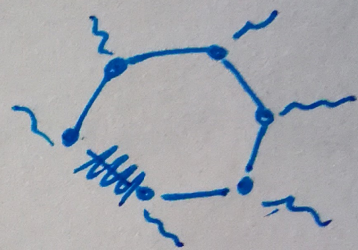
"1  $\Rightarrow$  2":

Lemma 2.3  $\Rightarrow$   $n-1$  Kanten

Nach Voraussetzung ist  $T$  zshgd

"2  $\Rightarrow$  3":

Ann:  $T$  enthält einen Kreis



Solange Kreis  $C$  vorhanden,  
lösche eine Kante aus  $C$

$\Rightarrow$  resultierender Graph  $T'$  ist kreisfrei  
+ zshgd., also ein Baum

$\Rightarrow T'$  besitzt  $n-1$  Kanten

$\Rightarrow T' = T$

$\Rightarrow T$  ist kreisfrei.

"3  $\Rightarrow$  4"

Ann:  $\exists e \notin E$ , sodass  $E \cup \{e\}$  keinen Kreis bildet.

$\Rightarrow e$  verbindet zwei ZHKs.

Betrachte alle  $k$  ZHKs mit  $n_i$  Knoten

Jede ZHK ist ein Baum, besitzt also  $n_i - 1$

Kanten.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^k n_i - 1 = n - k$  mit  $k \geq 2$ , d.h.  $|E| < n - 1$   $\nabla$

"4  $\Rightarrow$  5":

Ann:  $\exists e \in E$ :  $T - e$  ist zshgd. ( $e = \{u, v\}$ )

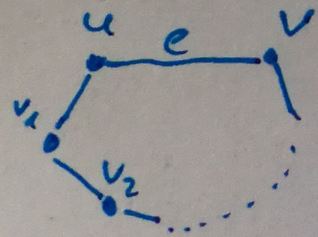
$\Rightarrow$  Betrachte Pfad  $u, v_1, v_2, \dots, v$  in  $T - e$

Dann ist  $u, v_1, v_2, \dots, v, u$  ein Kreis in  $T$ , d.h.

$T$  war nicht kreisfrei.

"5  $\Rightarrow$  6":

Ann:  $\exists$  Pfad  $P = \{u, v_1, v_2, \dots, v\}$  und  $e = \{u, v\}$ ,  
d.h.  $\exists$  Paar von Knoten, zwischen welchen es  
keine eindeutigen Pfad gibt.



$\Rightarrow$  Lösche  $e$  aus  $T$ , ersetze  
in jedem Pfad die Kante  $e$   
durch den Pfad  $P$ .

$\Rightarrow T - e$  ist zshgd  $\Rightarrow T$  war nicht min. zshgd.

"6  $\Rightarrow$  1":

(i): Zwischen zwei Knoten existiert ein Pfad

$\Rightarrow T$  ist zshgd.

(ii): Ann:  $T$  ist nicht kreisfrei

$\Rightarrow \exists$  Kreis  $C = \{v_1, \dots, v_k, v_1\}$

$\Rightarrow \exists$  zwei verschiedenen Pfade zwischen  $v_1$  und  $v_k$ ,  
nämlich  $\{v_1, v_k\}$  und  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ .

$\Rightarrow$  Pfad ist nicht eindeutig  $\Rightarrow T$  ist kreisfrei

$\stackrel{(i)+(ii)}{\Rightarrow} T$  ist ein Baum

$\square$