Zu 1:

Es gibt einen Pfad der Länge $\leq \ell(x) \ \forall x \in V$

Für eine bel. Stelle während der Iteration

sei $R := \{v \in V \mid \ell(v) < \infty\}$

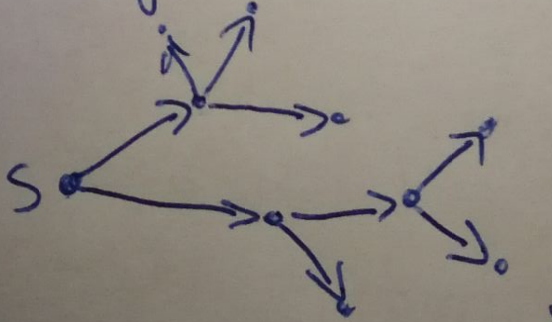
$F := \{(p(y), y) \mid y \in R\}$

Wir wollen zeigen:

a) $\ell(y) \geq \ell(x) + c((x,y)) \ \forall (x,y) \in F$

b) Wenn F einen Kreis C enthält, ist $c(C) < 0$

c) Ist c konservativ, ist (R,F) eine in s gewurzelte Arboreszenz.



VGL:

UNION-FIND-Struktur.

"In"-Arboreszenz

"Out"-Arboreszenz

a) Wird $p(y) = x$ gesetzt, ist

$$\ell(y) = \ell(x) + c((x,y))$$

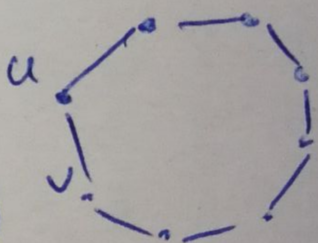
$\ell(x)$ kann danach nur kleiner werden.

b) Ann:

Das Setzen von $p(y)=x$ erzeugt einen Kreis C

Davor gilt $\ell(y) > \ell(x) + c((x,y))$.

Nach a) gilt für alle anderen ~~Knoten~~ Kanten (u,v) auf C:



$$\ell(v) \geq \ell(u) + c((u,v))$$

Dann ist:

$$\cancel{\sum_{v \in V(C)} \ell(v)} > \cancel{\sum_{v \in V(C)} \ell(v)} + \sum_{e \in E(C)} c(e)$$

$$0 > \sum_{e \in E(C)} c(e)$$

$\Rightarrow$ Kreis C hat neg. Gesamtgewicht.

c):

(i): c konservativ $\overset{b)}{\Longrightarrow}$ (R, F) ist azyklisch.

D.h. (R, F) enthält keine Kreise.

(ii) Für jeden Knoten $v \in R \setminus \{s\}$ ist

$p(v) \in R$

$\Longrightarrow |F| = |R| - 1$

$\overset{(i)+(ii)}{\Longrightarrow}$ (R, F) ist eine (Out-) Arboreszenz mit Wurzel s.

Zu 2.: Nach i Iterationen gilt:

$\ell(x)$ ist höchstens die Länge eines kürzesten sx-Pfades in D mit maximal i Kanten.

Beweis per Induktion über i

IA: $i = 0 \Rightarrow \ell(s) = 0$

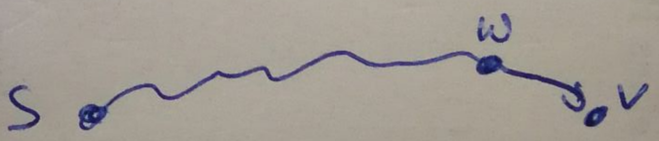
$\ell(v) = \infty \quad \forall v \in V$

Ein Pfad mit 0 Kanten existiert nur zu s mit Länge 0

$\Rightarrow$ Aussage gilt.

IV: Aussage gelte für bel., aber festes i.

IS: Sei P ein kürzester sv-Pfad mit $\leq i+1$ Kanten und sei $w = p(v)$



Wegen Lemma 3.3 (Teilpfade von kürzesten Pfaden) ist $P[s,w]$ ein kürzester sw-Pfad mit $\leq i$ Kanten.

$\overset{IV}{\Longrightarrow} \ell(w) \leq c(P[s,w])$ nach i Iterationen

In $i+1$-ster Iteration wird Kante (w,v) betrachtet.

$$\Rightarrow \ell(v) \leq \ell(w) + c((w,v)) \leq c(P[s,w]) + c((w,v))$$
$$\leq c(P)$$

Mit 1. und 2.:
Nach $n-1$ Iterationen ist also ein kürzester Pfad (max $n-1$ Kanten) von s zu jedem Knoten $v \in V$ gefunden, welcher auch in (R,F) existiert.

$\Rightarrow$ Aussage bewiesen $\square$