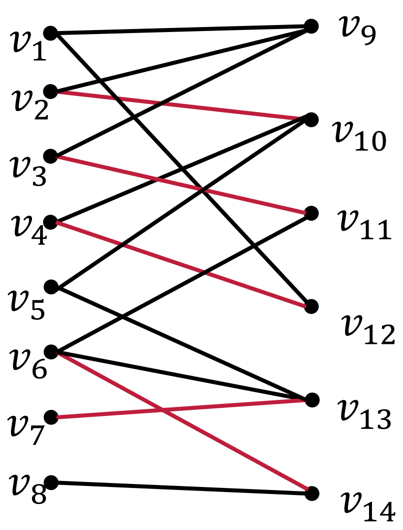
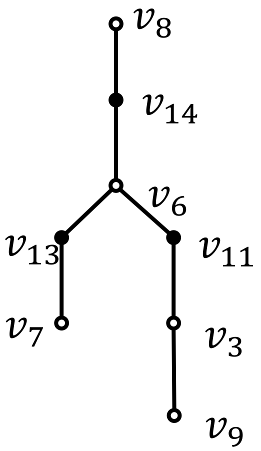
Netzwerkalgorithmen – Vorlesung #12

Arne Schmidt

Wiederholung

Bipartite Graphen

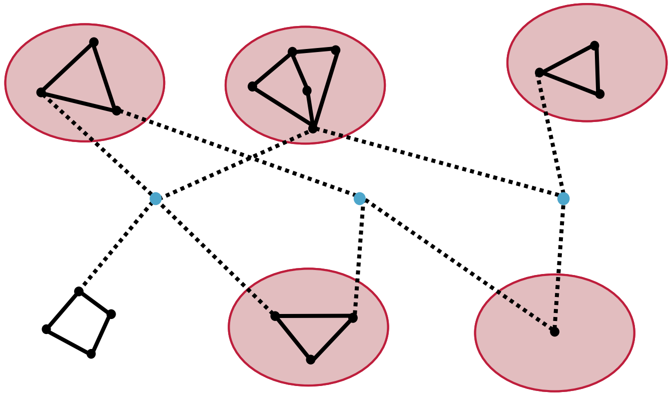


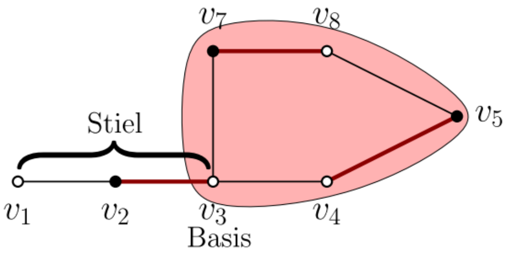


Satz 5.7 (Kőnig-Egerváry)
Sei G ein bipartiter Graph. Die Größe eines minimalen Vertex Covers in G entspricht der Größes eines maximalen Matchings in G.

Satz 5.13 (Satz von Hall)
Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit $V = V_1 \dot\cup V_2$. Dann hat G genau dann ein V_1 überdeckendes Matching, wenn $|N(X)| \geq |X|$ für alle $X \subseteq V_1$ gilt.

Allgemeine Graphen

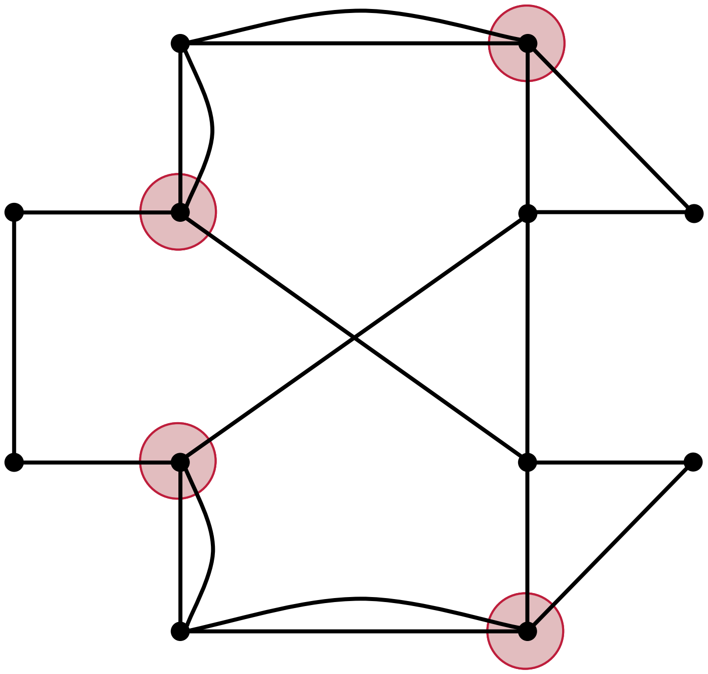


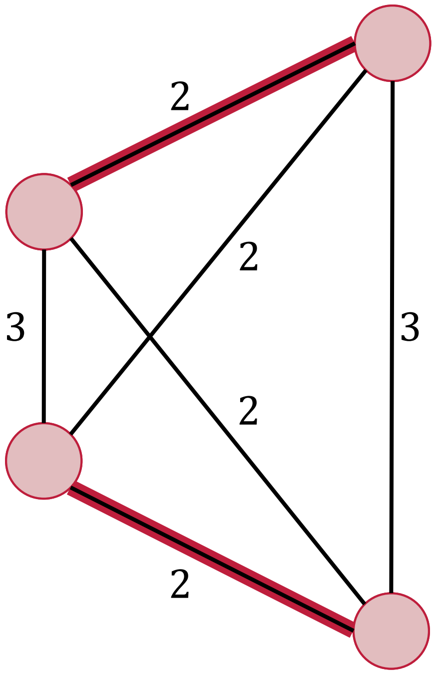


Satz 5.18 (Satz von Tutte)
Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
G enthält genau dann ein perfektes Matching,
wenn $\mathrm{oc}(G \setminus A) \leq |A|$ für alle $A \subseteq V$ gilt.

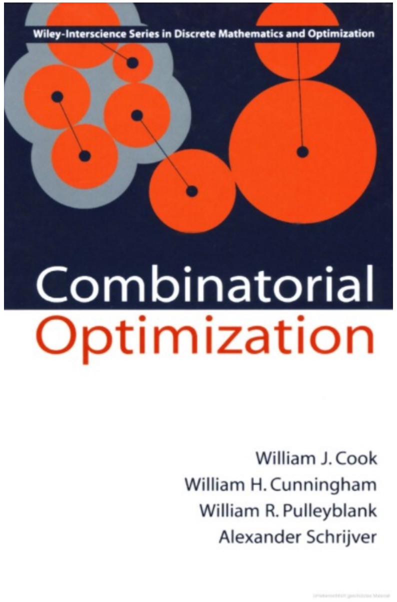
```
1.  Function BLOSSOM(G)
2.      Setze M' = M = ∅ und G' = G
3.      for r ∈ V mit r ungematcht do
4.          Setze T ≔ ({r}, ∅), W(T) ≔ {r} und S(T) ≔ ∅
5.          While (es ex. Kante {v, w} ∈ E' mit v ∈ W(T) und w ∉ S(T))
6.              If w ist ungematcht then
7.                  Benutze {v, w}, um M' zu augmentieren.
8.                  Erweitere M' zu einem Matching M von G
9.                  Ersetze M' durch M und G' durch G.
10.                 Gehe zu Zeile 3.
11.             else if w ∉ V(T), aber w ist in M' gematcht then
12.                 Benutze {v, w}, um T zu erweitern.
13.             else if w ∈ W(T) then
14.                 Benutze {v, w} zum Schrumpfen einer Blüte.
15.                 Aktualisiere M', G' und T entsprechend.
16.     Return M
```

Briefträgerproblem





5.3 Gewichtete Matchings



Gewichtete Matchings

Problem 5.24: Minimum Cost Perfect Matchings

Gegeben:

Graph $G = (V, E)$ und Kantenkosten $c: E \to \mathbb{R}^+$

Gesucht:

Perfektes Matching $M \subseteq E$ mit $\sum_{e \in M} c(e)$ minimal.

Wichtig:

- Annahme G enthält ein perfektes Matching
- $\Rightarrow$ Für jeden Knoten existiert ein augmentierender Pfad

Zwei lineare Programme

$$\min \sum_{e \in E} x_e c(e)$$

s. t.

$$\sum_{e \in E(\{v\}, V \setminus \{v\})} x_e = 1, \qquad \forall v \in V$$

$$\sum_{e \in E(B, V \setminus B)} x_e \geq 1, \qquad \forall B \in \mathrm{odd}(V)$$

$$x_e \in \{0,1\}, \qquad \forall e \in E$$

Jeder Knoten muss gematcht sein.

Aus ungeraden Mengen muss eine Kante herausführen.

Lässt sich nicht einfach lösen!

Zwei lineare Programme

„Relaxierung“

$\min \sum_{e \in E} x_e c(e)$ s. t. $\sum_{e \in E(\{v\}, V \setminus \{v\})} x_e = 1, \quad \forall v \in V$ $\sum_{e \in E(B, V \setminus B)} x_e \geq 1, \quad \forall B \in \text{odd}(V)$ $x_e \in \{0,1\}, \quad \forall e \in E$	$\min \sum_{e \in E} x_e c(e)$ s. t. $\sum_{e \in E(\{v\}, V \setminus \{v\})} x_e = 1, \quad \forall v \in V$ $\sum_{e \in E(B, V \setminus B)} x_e \geq 1, \quad \forall B \in \text{odd}(V)$ $x_e \geq 0, \quad \forall e \in E$

Man kann zeigen: Die Lösung zum rechten LP ist immer ganzzahlig!

Zwei lineare Programme

Optimale Lösungswerte stimmen überein!

$$\min \sum_{e \in E} x_e c(e)$$

s. t.

$$\sum_{e \in E(\{v\}, V \setminus \{v\})} x_e = 1, \qquad \forall v \in V$$

$$\sum_{e \in E(B, V \setminus B)} x_e \geq 1, \qquad \forall B \in \mathrm{odd}(V)$$

$$x_e \geq 0, \qquad \forall e \in E$$

Primal

$$\max \sum_{v \in V} y_v + \sum_{B \in \mathrm{odd}(V)} y_B$$

s. t.

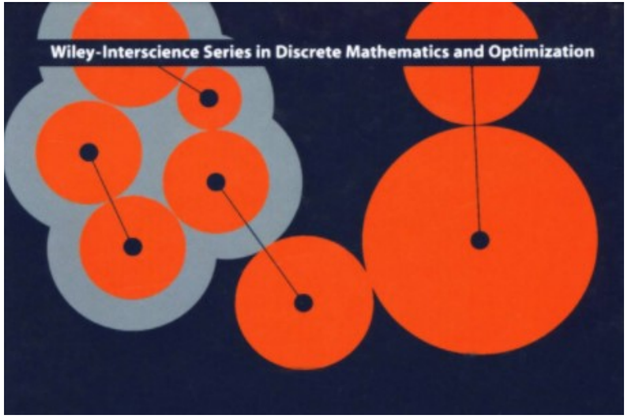
$$y_v + y_w + \sum_{\substack{e \in E(B, V \setminus B) \\ B \in \mathrm{odd}(V)}} y_B \leq c(e), \qquad \forall e \in E$$

$$y_B \geq 0, \qquad \forall B \in \mathrm{odd}(V)$$

Dual

Was ist das für ein Problem?

Zwei lineare Programme



Lass Kreise um Knoten
möglichst groß wachsen,
sodass sie sich nicht schneiden.

$$\max \sum_{v\in V} y_v + \sum_{B\in \mathrm{odd}(V)} y_B$$

$$\text{s.t.}$$

$$y_v + y_w + \sum_{\substack{e\in E(B, V\setminus B)\\ B\in \mathrm{odd}(V)}} y_B \le c(e), \qquad \forall e \in E$$

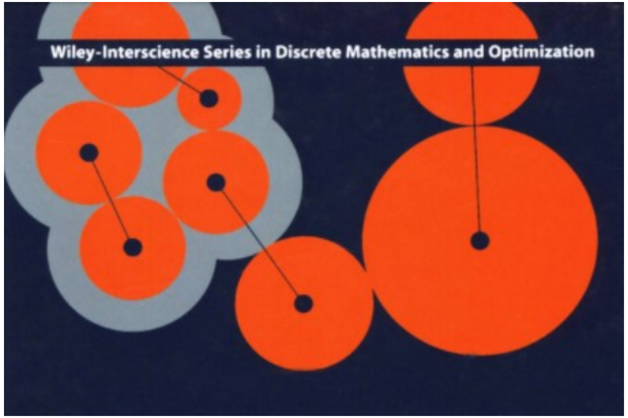
$$y_B \ge 0, \qquad \forall B \in \mathrm{odd}(V)$$

Dual
Was ist das für ein Problem?

Dualität

Satz 5.25
Sei G ein Graph und $e = \{v, w\} \in E$. Dann gilt:

$$x_e = 1 \;\Rightarrow\; y_v + y_w + \sum_{\substack{e \in E(B, V \setminus B) \\ B \in \mathrm{odd}(V)}} y_B = c(e)$$

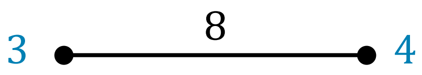


Kante kann nur eine Matchingkante sein, wenn sie durch Kreise überdeckt ist.

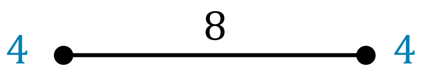
Reduzierte Kosten

Definition 5.26 (Reduzierte Kosten)
Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
(1) Eine Kante $e = \{v, w\} \in E$ besitzt **reduzierte Kosten** $\bar{c}(e) \coloneqq c(e) - y_v - y_w - \sum_{\substack{e \in E(B, V\setminus B) \\ B \in \mathrm{odd}(V)}} y_B$.

(2) Eine Kante $e \in E$ heißt **überdeckt**, wenn $\bar{c}(e) = 0$.



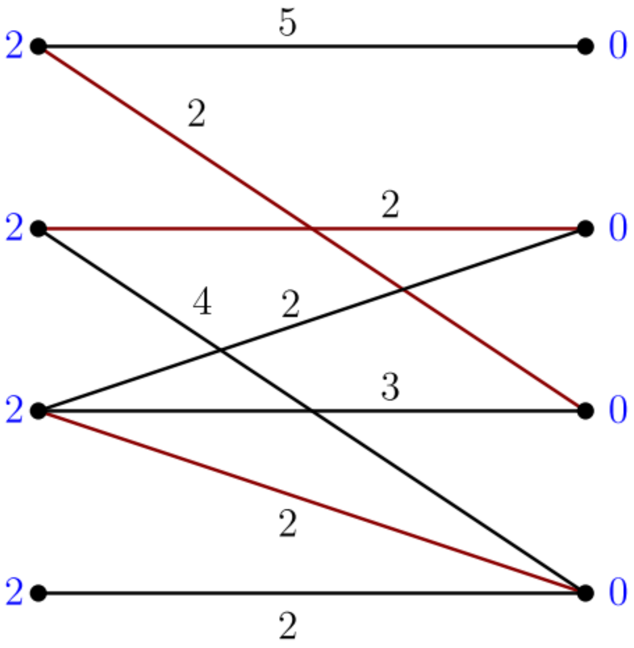
Reduzierte Kosten: 1



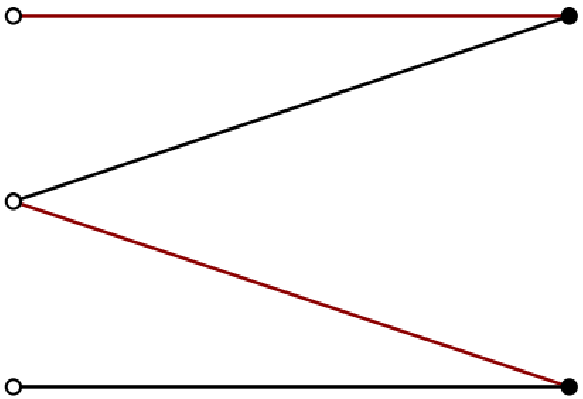
Kante überdeckt

5.3.1 Die ungarische Methode für bipartite Graphen

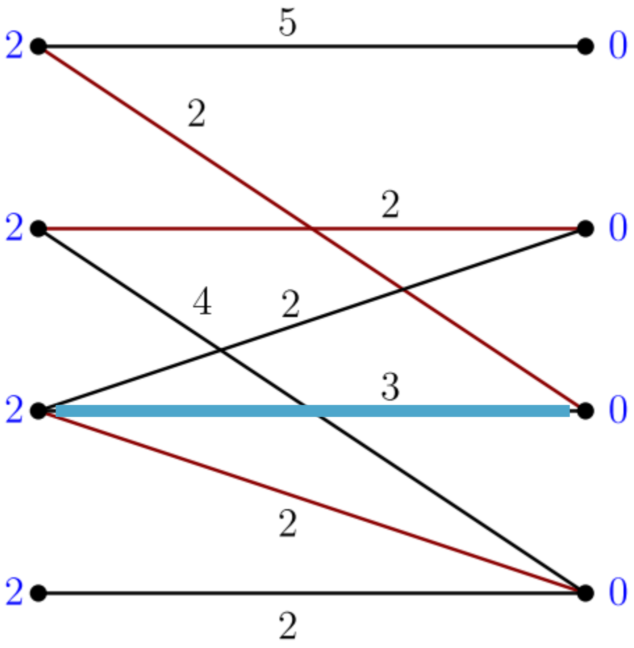
Finden von augmentierenden Pfaden



Konstruiere alternierenden Baum über überdeckte Kanten.



Aktualisieren der Dual-Werte



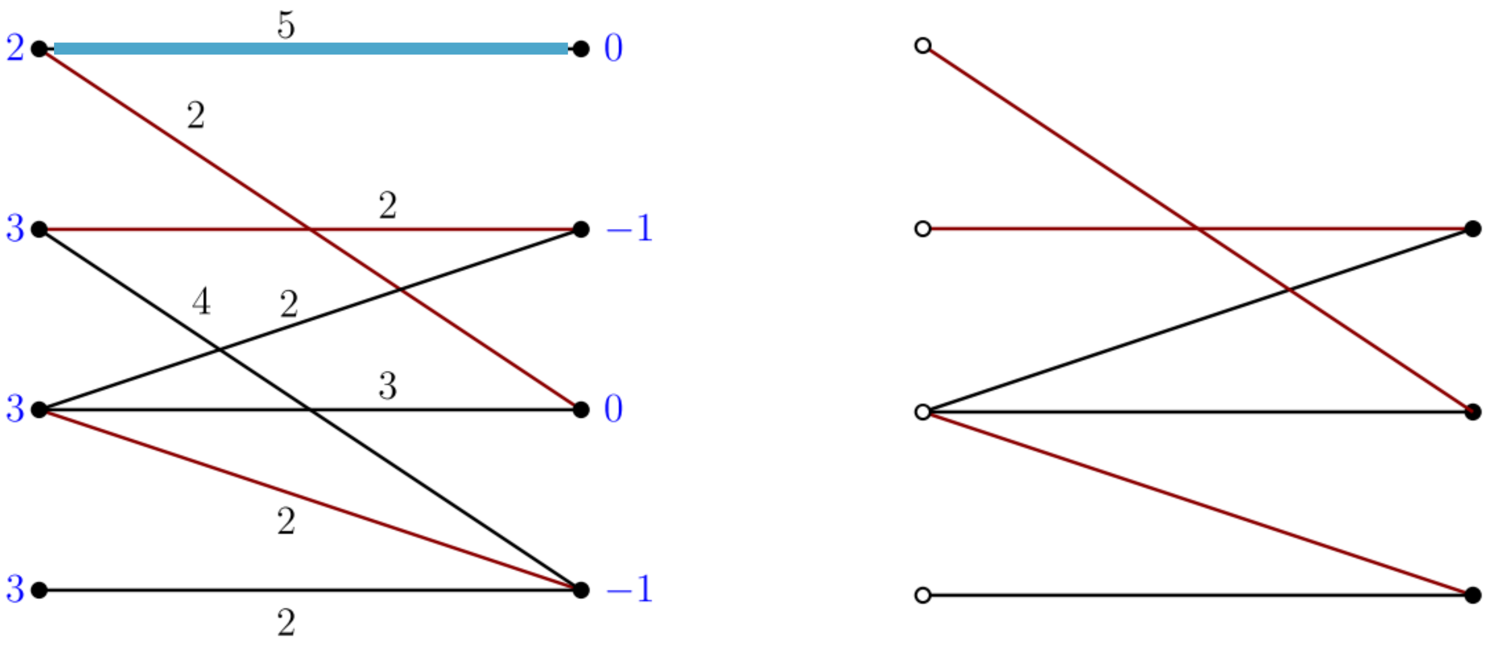
Suche kleinste reduzierte Kosten von Kanten, die herausführen.

$\Rightarrow 1$

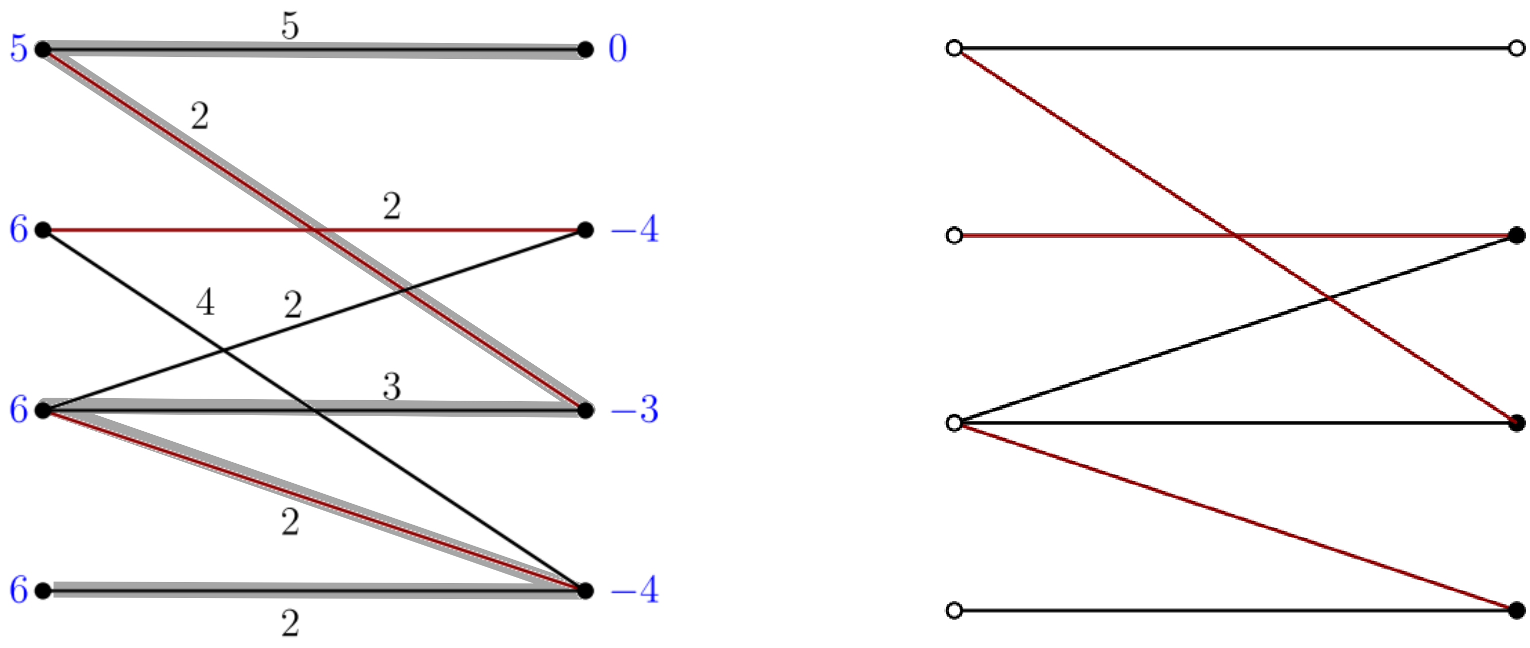
Erhöhe/Verringere Werte von Knoten um 1.

Aber wie?

Nächste Iteration



Nächste Iteration



Ungarische Methode

Algorithmus 5.27

Eingabe:

Bipartiter Graph $G = (V = V_1 \dot\cup V_2, E)$, Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}^+$

Ausgabe:

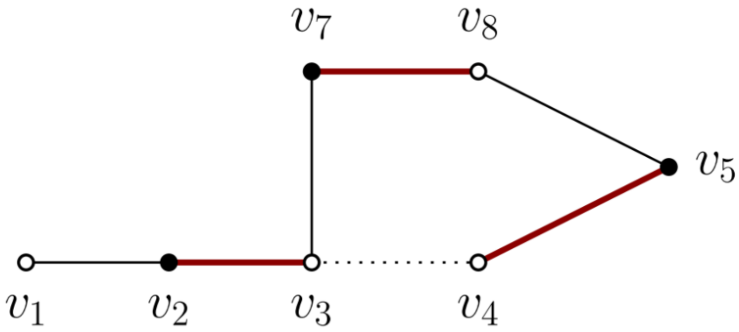
Min Cost Perfect Matching M

Function $\textsc{UngarischeMethode}(G, c)$
  Setze $y_v \coloneqq \min\limits_{\{v,w\}\in E} c(\{v,w\})$ für alle $v \in V_1$.
  Finde maximales Matching M auf überdeckten Kanten.
  for $r \in V_1$ mit r ungematcht **do**
    Konstruiere alternierenden Baum T mit r als Start.
    while T enthält keinen augmentierenden Pfad **do**
      Sei $e \in E\big(W(T), V \setminus W(T)\big)$ eine Kante mit $\bar{c}(e)$ minimal.
      Setze $y_v \coloneqq y_v + \bar{c}(e)$ für alle $v \in W(T)$.
      Setze $y_w \coloneqq y_w - \bar{c}(e)$ für alle $w \in V(T) \setminus W(T)$.
      Erweitere T
    Augmentiere M
  return M

Analyse

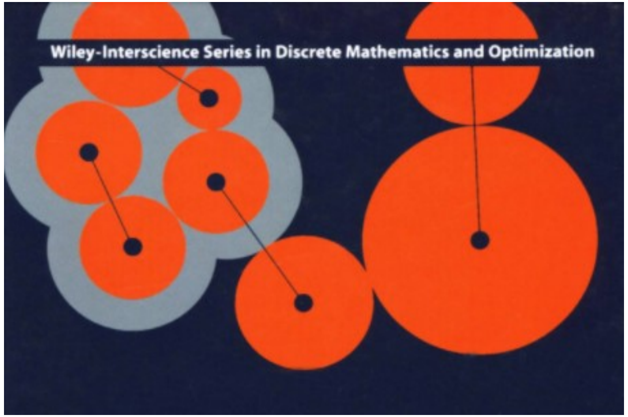
Satz 5.28
Algorithmus 5.27 löst Problem 5.24 (MinCost Perfect Matchings) für bipartite Graphen optimal in Zeit $O(n^3)$

Was tun bei Graphen mit ungeraden Kreisen?



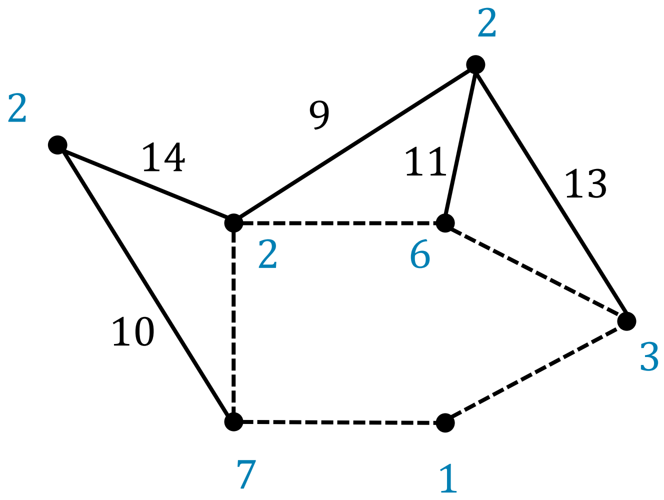
5.3.2 Primal-dualer Algorithmus für allgemeine Graphen

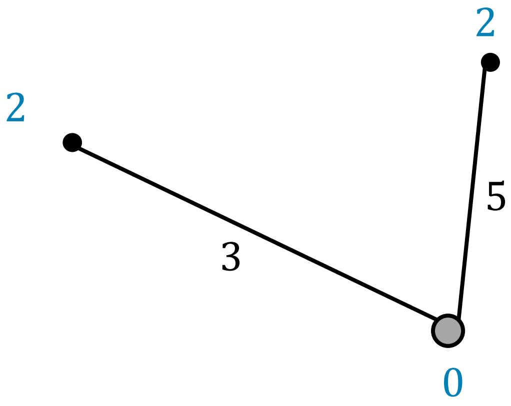
Ungerade Kreise



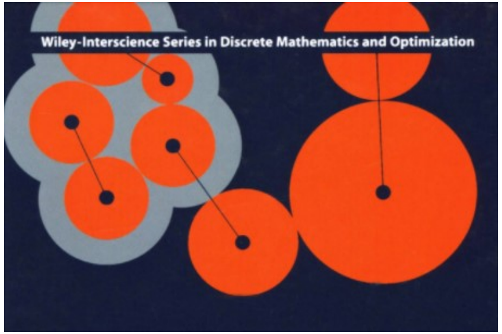
$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{v\in V} y_v + \sum_{B\in \mathrm{odd}(V)} y_B \\
&\text{s.t.} \\
&y_v + y_w + \sum_{\substack{e\in E(B,V\setminus B)\\ B\in \mathrm{odd}(V)}} y_B \le c(e), && \forall e \in E \\
&\qquad\qquad y_B \ge 0, && \forall B \in \mathrm{odd}(V)
\end{aligned}
$$

Schrumpfen einer Blüte



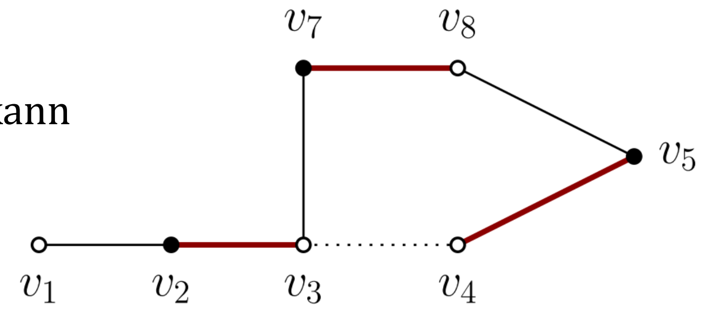


Kanten teilweise über Knoten im Kreis überdeckt.



Die Probleme

Problem 1:
Erhöhen von Dualwerten von weißen Knoten kann Kanten zwischen weißen Knoten überdecken.
⇒ maximal um $\frac{\bar{c}(e)}{2}$ erhöhen.



Problem 2:
Nach Augmentieren: Eine Blüte B kann nur aufgelöst werden, wenn $y_B = 0$.
⇒ B kann später als schwarzer Knoten existieren.
⇒ Schwarze Knoten dürfen um maximal y_B verringert werden.

$$y_B \geq 0, \qquad \forall B \in \mathrm{odd}(V)$$

Updateregeln

Betrachte:

1. $\varepsilon_1 := \min\left\{\bar{c}(e) \mid e \in E\big(W(T), V \setminus W(T)\big)\right\}$
2. $\varepsilon_2 := \frac{1}{2}\min\{\bar{c}(e) \mid e = \{v,w\} \text{ mit } v,w \in W(T)\}$
3. $\varepsilon_3 := \min\{y_B \mid \text{Blüte } B \in S(T)\}$

Sei $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$
Erhöhe Knoten aus $W(T)$ um ε und verringere Knoten aus $S(T)$ um ε.

Auch hier:
Nach Aktualisieren sind bereits überdeckte Kanten immer noch überdeckt und reduzierte Kosten sind nicht-negativ.

Primal-Dual Methode

Algorithmus 5.29

Eingabe:

  Graph $G = (V, E)$, Kantenkosten $c: E \to \mathbb{R}^+$

Ausgabe:

  Min Cost Perfect Matching M

Function PRIMALDUAL(G, c)
  Setze $G' := G$ und $M' = M = \emptyset$
  for $r \in V$ mit r ungematcht **do**
    Konstruiere alternierenden Baum T mit r als Start.
    while T enthält keinen augmentierenden Pfad **do**
      Bestimme $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$
      Setze $y_v := y_v + \varepsilon$ für alle $v \in W(T)$.
      Setze $y_w := y_w - \varepsilon$ für alle $w \in S(T)$.
      Erweitere T (solange möglich)
    Augmentiere M'
  Konstruiere Matching M für G aus M' in G'.
  return M

Satz 5.30

Algorithmus 5.29 löst Problem 5.24 (MinCost Perfect Matchings) optimal in Zeit $O(mn^2)$

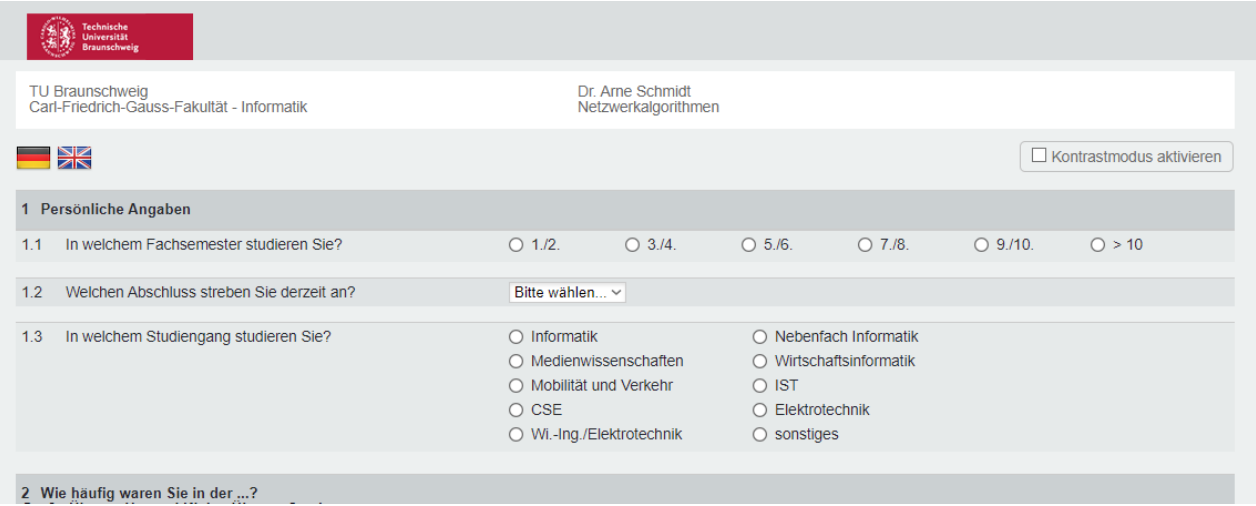
Erweitere T:
  Case $\exists$ Blüte $B \in S(T)$ mit $y_B = 0$:
    Löse Blüte auf.
    Passe G', M' und T entsprechend an.
  Case Blüte B gefunden:
    Schrumpfe B.
    Passe G', M' und T entsprechend an.
  Case Sonst:
    Erweitere T über überdeckte Kanten.

Quiz!

Nächste Woche

Letzte Vorlesung!

- Zusammenfassung
- Q&A
- Klausur



Technische Universität Braunschweig

TU Braunschweig
Carl-Friedrich-Gauss-Fakultät - Informatik

Dr. Arne Schmidt
Netzwerkalgorithmen

Kontrastmodus aktivieren

1 Persönliche Angaben

1.1	In welchem Fachsemester studieren Sie?	1./2. 3./4. 5./6. 7./8. 9./10. > 10
1.2	Welchen Abschluss streben Sie derzeit an?	Bitte wählen...
1.3	In welchem Studiengang studieren Sie?	Informatik, Nebenfach Informatik, Medienwissenschaften, Wirtschaftsinformatik, Mobilität und Verkehr, IST, CSE, Elektrotechnik, Wi.-Ing./Elektrotechnik, sonstiges

2 Wie häufig waren Sie in der ...?

Einladung gestern per Mail über Mailingliste!