**Algorithmen und Datenstrukturen 2** **SoSe 2023**

Prof. Dr. Sándor Fekete
Dr. Phillip Keldenich

# Präsenzblatt 3

Dieses Blatt dient der persönlichen Vorbereitung. Es wird nicht abgegeben und geht nicht in die Bewertung ein. Die Besprechung der Aufgaben erfolgt in den kleinen Übungen vom 06.06.–09.06.2023.

**Präsenzaufgabe 1:**

In dieser Aufgabe betrachten wir den Branch-and-Bound-Algorithmus für MAXIMUM KNAPSACK aus der Vorlesung. Wir benutzen dabei $\text{GREEDY}_0$ (siehe Blatt 1) als untere Schranke und den Greedy-Algorithmus für FRACTIONAL KNAPSACK als obere Schranke.

Sei $I := (z_1, \ldots, z_n, Z, p_1, \ldots, p_n)$ ein Instanz von MAXIMUM KNAPSACK.

a) Betrachte einen Knoten $v$ in einem Entscheidungsbaum $T$, zu dem die Teilbelegung $b = b_1, \ldots, b_{\ell-1}$ gehört. Nimm weiterhin an, dass diese Teilbelegung zulässig ist. Sei $U := UB(I, \ell, b)$ eine dazu passende **obere Schranke**. Für welche Teilbäume von $T$ gilt $U$ **immer** als obere Schranke?

b) Betrachte einen Knoten $v$ in einem Entscheidungsbaum $T$, zu dem die Teilbelegung $b = b_1, \ldots, b_{\ell-1}$ gehört. Sei $P := LB(I, \ell, b)$ eine dazu passende **untere Schranke**. Für welche Teilbäume von $T$ gilt $P$ **immer** als untere Schranke?

c) Der Entscheidungsbaum, den der Branch-and-Bound-Algorithmus ablaufen kann, besitzt $2^{n+1} - 1$ viele Knoten. Da der Algorithmus Teilbäume abschneidet, besteht die Hoffnung, dass deutlich weniger Knoten besucht werden müssen.

   Zeige: Für unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Instanz mit $n$ Objekten, bei der der Branch-and-Bound-Algorithmus mindestens $2^{\frac{n}{2}} - 1$ Knoten des gesamten Entscheidungsbaumes besucht.
   (Hinweis: Ein Entscheidungsbaum der Höhe $h$ besitzt $2^h - 1$ Knoten. Finde also eine Instanz für jedes $n$, sodass alle Knoten auf den ersten $\frac{n}{2}$ Ebenen besucht werden müssen.)