

Präsenzblatt 5

Dieses Blatt dient der persönlichen Vorbereitung. Es wird nicht abgegeben und geht nicht in die Bewertung ein. Die Besprechung der Aufgaben erfolgt in den kleinen Übungen vom 04.–07.07.2023.

Präsenzaufgabe:

Wir betrachten das Problem SET COVER.

Gegeben: Eine endliche Menge U (das *Universum*), eine Menge \mathcal{F} von Teilmengen von U und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Gesucht: Ein *Set Cover* von (U, \mathcal{F}) der Größe höchstens k . Ein Set Cover ist eine Teilmenge $F \subseteq \mathcal{F}$, die U überdeckt, d.h. für jedes Element $u \in U$ gibt es eine Menge $M \in F$ mit $u \in M$. Die Größe eines Set Covers F ist die Anzahl an Mengen in F , d.h. $|F|$.

Wir nehmen an, dass jedes Element aus U in einer Menge aus \mathcal{F} vorkommt.

Als Beispiel betrachte $U := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathcal{F} := \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{3, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3\}\}$, sowie $k = 3$. $F := \{\{1, 4\}, \{3, 6\}, \{1, 2, 5\}\}$ ist ein Set Cover von (U, \mathcal{F}) . Es kann schnell überprüft werden, dass es für $k = 2$ kein Set Cover gibt. Eine graphische Darstellung dieser Instanz (und einer möglichen Lösung) ist in Abbildung 1 abgebildet.

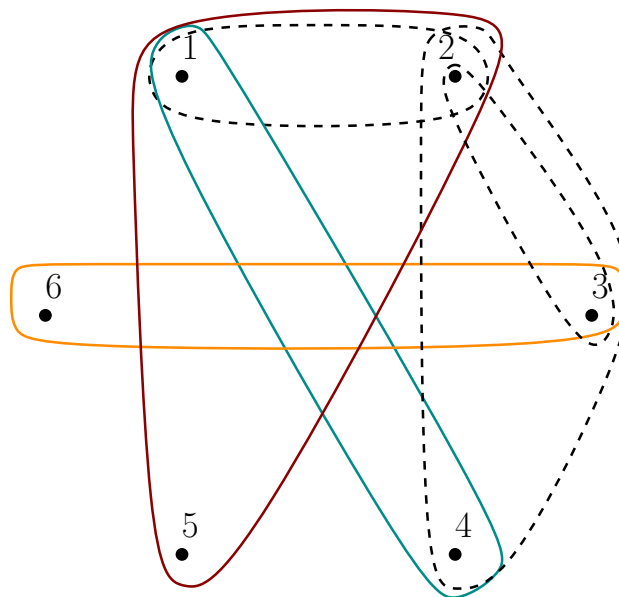


Abbildung 1: Beispiel einer Instanz von SET COVER. Punkte entsprechen den Elementen in U , Kreise entsprechen den Mengen in \mathcal{F} . Die farbige Auswahl entspricht einem Set Cover.

a) Zeige, dass Set Cover NP-schwer ist. (Hinweis: Nutze VERTEX COVER.)

Da SET COVER also NP-schwer ist, bietet es sich an, Approximationsalgorithmen zu betrachten, um das kleinste k zu finden. Der folgende Algorithmus (GREEDYSC) versucht ein möglichst kleines Set Cover zu bestimmen.

Algorithmus 1 Algorithmus GREEDYSC zum Finden eines Set Covers. In jeder Iteration wird diejenige Menge aufgenommen, die die meisten noch nicht überdeckten Elemente besitzt.

```

1: function GREEDYSC( $U, \mathcal{F}$ )
2:    $C := \emptyset$  ▷ Menge der bereits überdeckten Elemente
3:    $\bar{C} := U$  ▷ Menge der noch zu überdeckenden Elemente
4:    $SC := \emptyset$  ▷ Set Cover

5:   while  $C \neq U$  do
6:      $S := \operatorname{argmax}_{M \in \mathcal{F}} |M \cap \bar{C}|$  ▷ Menge mit den meisten nicht überdeckten Elementen
7:      $C := C \cup S$ 
8:      $\bar{C} := \bar{C} \setminus S$ 
9:      $SC := SC \cup \{S\}$ 

10:  return  $SC$ 

```

b) Wende GREEDYSC auf folgende Instanz an: $U := \{1, \dots, 10\}$, $\mathcal{F} := \{F_1, \dots, F_5\}$ mit $F_1 = \{1, 2, 3, 7, 9\}$, $F_2 = \{4, 5, 6, 8, 10\}$, $F_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $F_4 = \{7, 8\}$ und $F_5 = \{9, 10\}$.

Gib dabei nach jeder Iteration der while-Schleife S , C sowie \bar{C} an.

c) Betrachte Instanzen der folgenden Form. Sei $3 \leq \ell \in \mathbb{N}$ und $q = 2^\ell - 1$. Das Universum besteht aus zwei Teilmengen mit je q Elementen, also $U = \{x_1, \dots, x_q\} \cup \{y_1, \dots, y_q\}$. Die Menge der möglichen Mengen \mathcal{F} enthält die zwei Mengen $X = \{x_1, \dots, x_q\}$ und $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$ sowie zusätzlich die Mengen

$$M_i = \{x_{2^{i-1}}, \dots, x_{2^i-1}\} \cup \{y_{2^{i-1}}, \dots, y_{2^i-1}\}$$

für $1 \leq i \leq \ell$. Abbildung 2 zeigt als Beispiel die Instanz für den Fall $\ell = 3$.

Was ist die Größe eines optimalen Set Covers auf dieser Art von Instanz? Welche Größe hat das Set Cover, das GREEDYSC berechnet, in Abhängigkeit von ℓ ? Wie wächst der asymptotische Faktor zwischen OPT und GREEDYSC in Abhängigkeit der Größe des Universums $n = 2q$ (in O -Notation)? Ist GREEDYSC ein Approximationsalgorithmus im Sinne der Vorlesung?

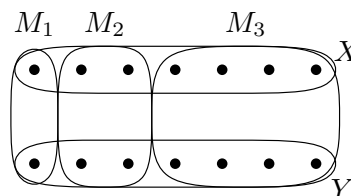


Abbildung 2: Instanz aus Aufgabenteil c) für $\ell = 3$.