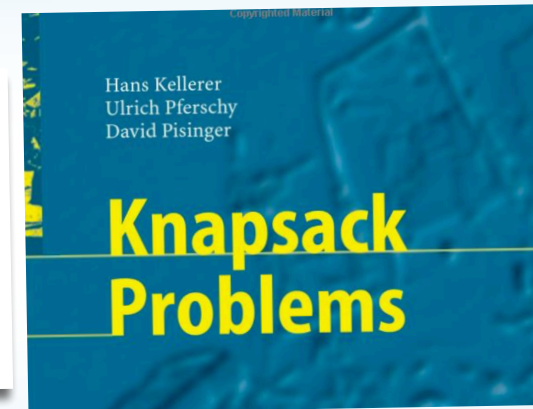




$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ &\text{subject to} && \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, \\ &&& x_j = 0 \text{ or } 1, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$



1 Einführung: Knapsack-Probleme

*Algorithmen und Datenstrukturen 2
Sommer 2023*

Prof. Dr. Sándor Fekete



Algorithmen und Datenstrukturen 2

Sommersemester 2022

[Startseite](#)

[Veranstaltungen](#)

[Organisation](#) ▾

[Kapitel](#) ▾

[Kontakt](#)

[Archiv](#)

Startseite

Algorithmen und Datenstrukturen 2

Die Vorlesung **Algorithmen und Datenstrukturen 2** ist eine Wahlpflichtveranstaltung für Studierende der Informatik, Wirtschaftsinformatik, Informations- und Systemtechnik; außerdem ist sie offen für interessierte Studierende anderer Studiengänge.

Algorithmen sind das methodische Herz der theoretischen und praktischen Informatik; Datenstrukturen ermöglichen die effiziente Umsetzung von Algorithmen und den effizienten Zugriff auf Input- und Outputdaten. In dieser weiterführenden Vorlesung werden die folgenden grundlegenden Begriffe erarbeitet:

- Elementare Aspekte zu Heuristiken
- Exakte Verfahren: Dynamic Programming, Branch-and-Bound
- Approximationsalgorithmen

Neuigkeiten

Letzte Veranstaltungen

[Herzlich Willkommen bei AuD2!](#)

Zeiten

Vorlesung

Dienstag 9:45-11:15 Uhr, PK 15.1 (bzw. UP 3.007)

Erste Vorlesung: 26.04.2022

Große Übung

Mittwoch 15:00-16:30 Uhr, PK 11.2

Erste Übung: 27.04.2022

Fragen von Ihnen?

s.fekete@tu-bs.de

Fragen von Ihnen?

s.fekete@tu-bs.de

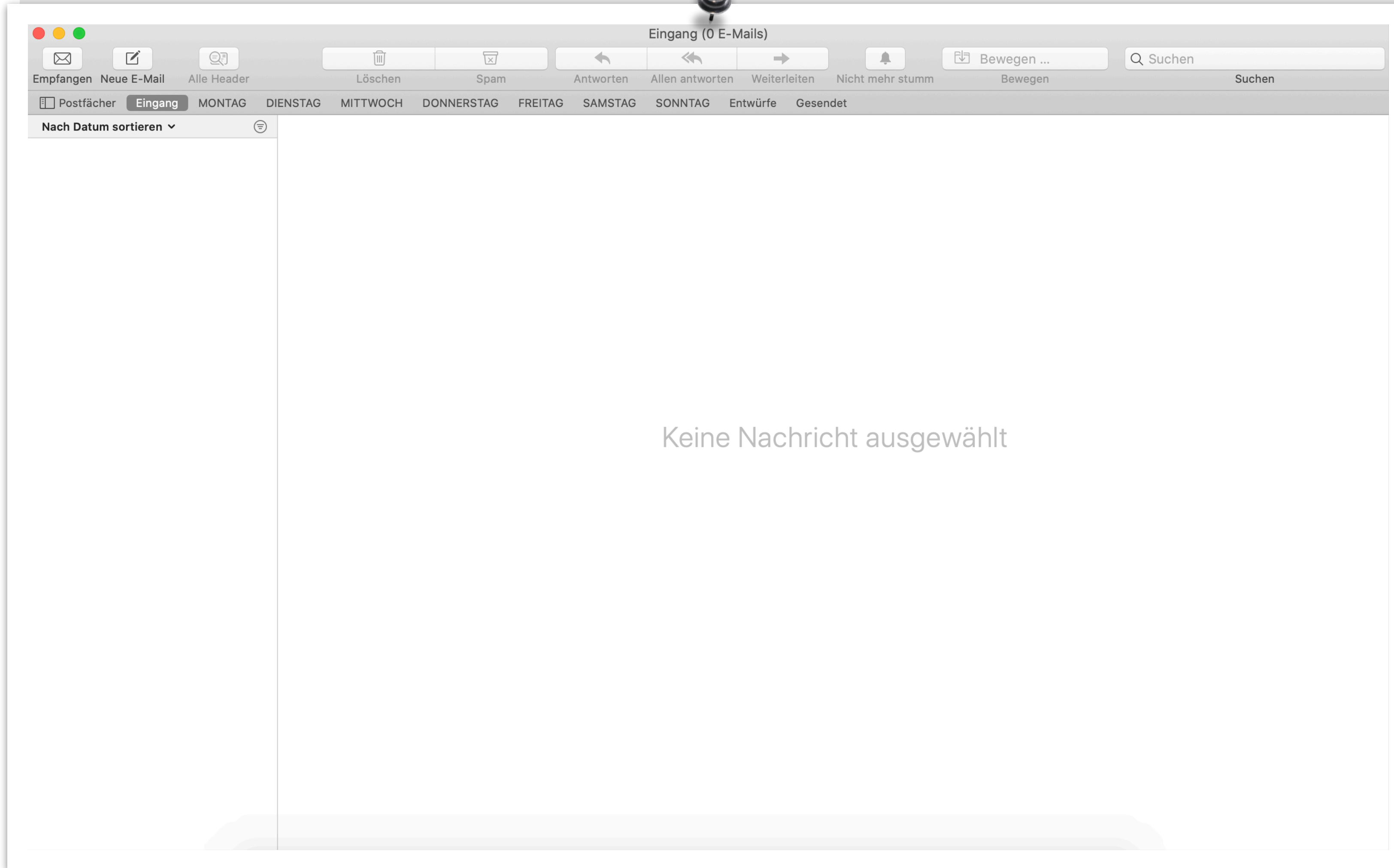
Fragen von Ihnen?

keldenich@ibr.cs.tu-bs.de

s.fekete@tu-bs.de

Fragen von Ihnen?

keldenich@ibr.cs.tu-bs.de



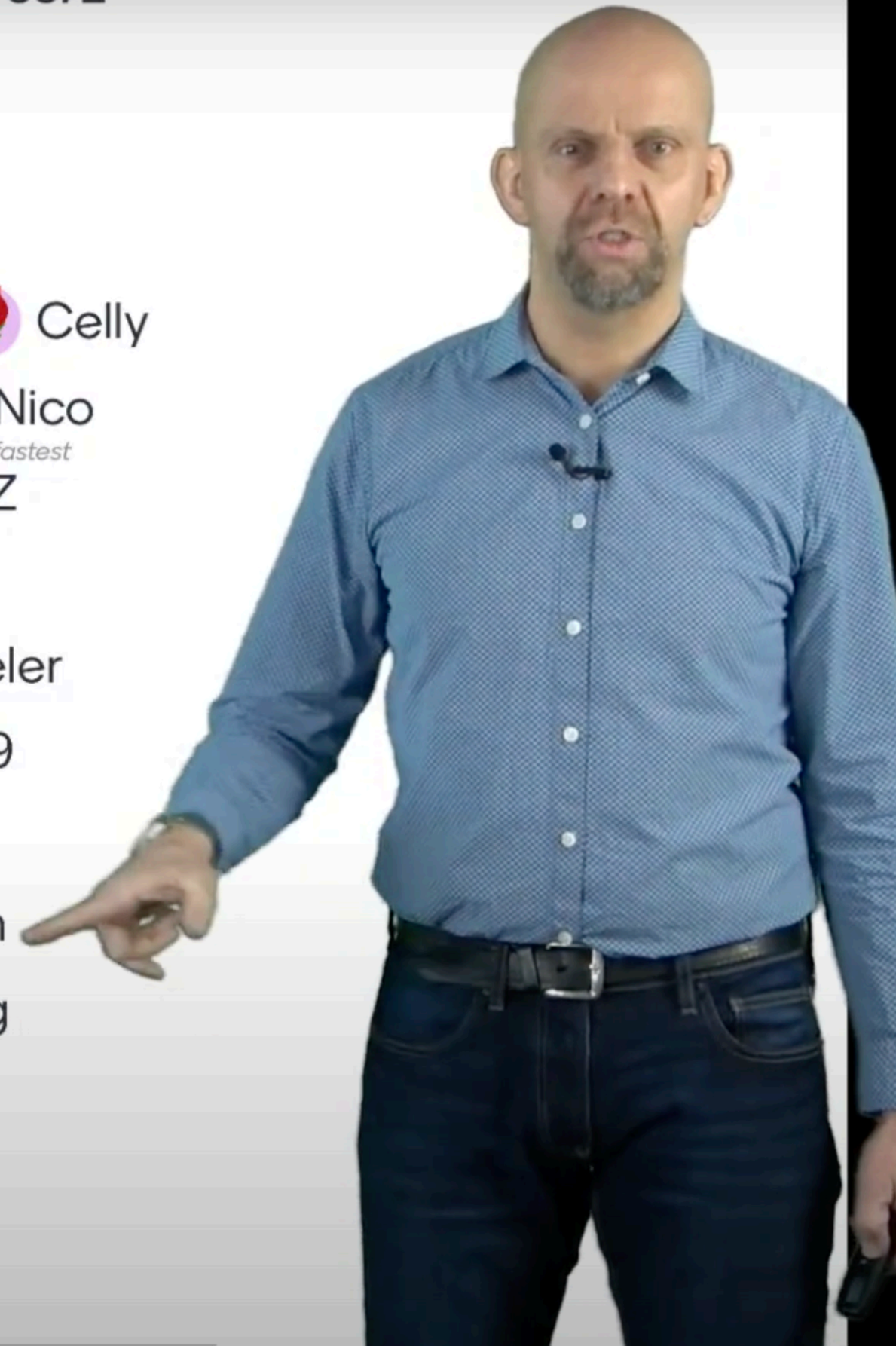
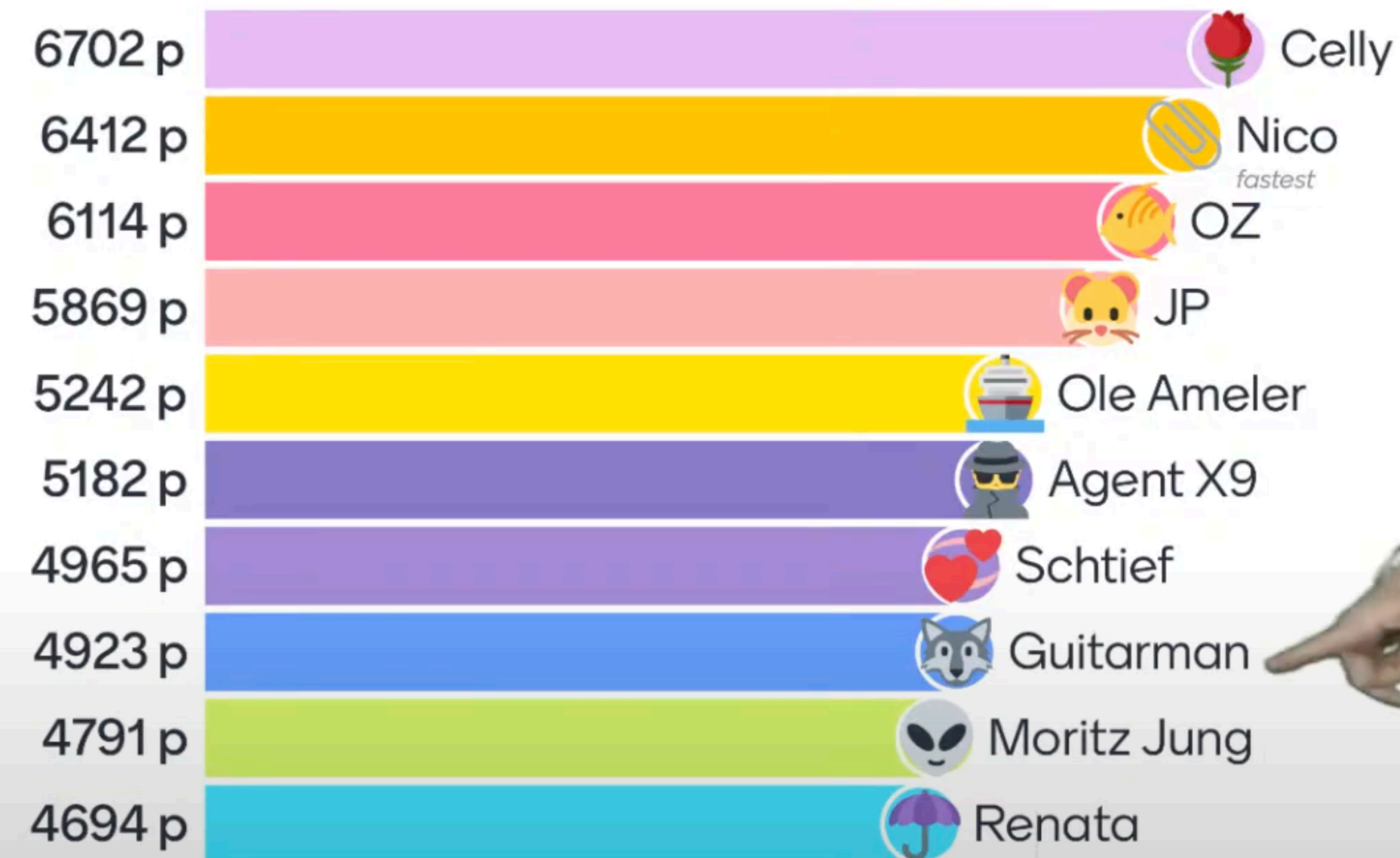
The screenshot shows an email client window with a toolbar containing icons for 'Empfangen', 'Neue E-Mail', 'Alle Header', 'Löschen', 'Spam', 'Antworten', 'Allen antworten', 'Weiterleiten', 'Nicht mehr...', 'Bewegen ...', and 'Suchen'. Below the toolbar is a folder pane with 'Eingang (0 E-Mails)' selected. The main content area shows a browser window with the URL 'mail.ibr.cs.tu-bs.de/mailman/listinfo/aud2'. The browser content includes a blue header 'Aud2 --', a yellow section 'About Aud2' with text 'To see the collection of prior postings to the list, visit the [Aud2 Archives](#). (The current archive is only available to the list members.)', another yellow section 'Using Aud2' with text 'To post a message to all the list members, send email to aud2@ibr.cs.tu-bs.de. You can subscribe to the list, or change your existing subscription, in the sections below.', and a third yellow section 'Subscribing to Aud2' with text 'Subscribe to Aud2 by filling out the following form. You will be sent email requesting confirmation, to prevent others from gratuitously subscribing you. Once con approval by the list moderator. You will be notified of the moderator's decision by email. This is also a hidden list, which means that the list of members is availabl'. Below this text is a subscription form with fields for 'Your email address:', 'Your name (optional):', 'Pick a password:', 'Reenter password to confirm:', and 'Which language do you prefer to display your messages?' (set to 'English (USA)'). A 'Subscribe' button is at the bottom of the form.

Fragen an Sie!

Fragen an Sie!

Go to www.menti.com and use the code 7858 8872

Leaderboard



Eine Klausursituation



Die Zeit läuft!

Die Zeit läuft!



Die Zeit läuft!



Knut Donald, erster Studierender der Informatik

Die Zeit läuft!



Knut Donald, erster Studierender der Informatik



Die Zeit läuft!



Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten

Die Zeit läuft!



Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten
- 20 Aufgaben

Die Zeit läuft!

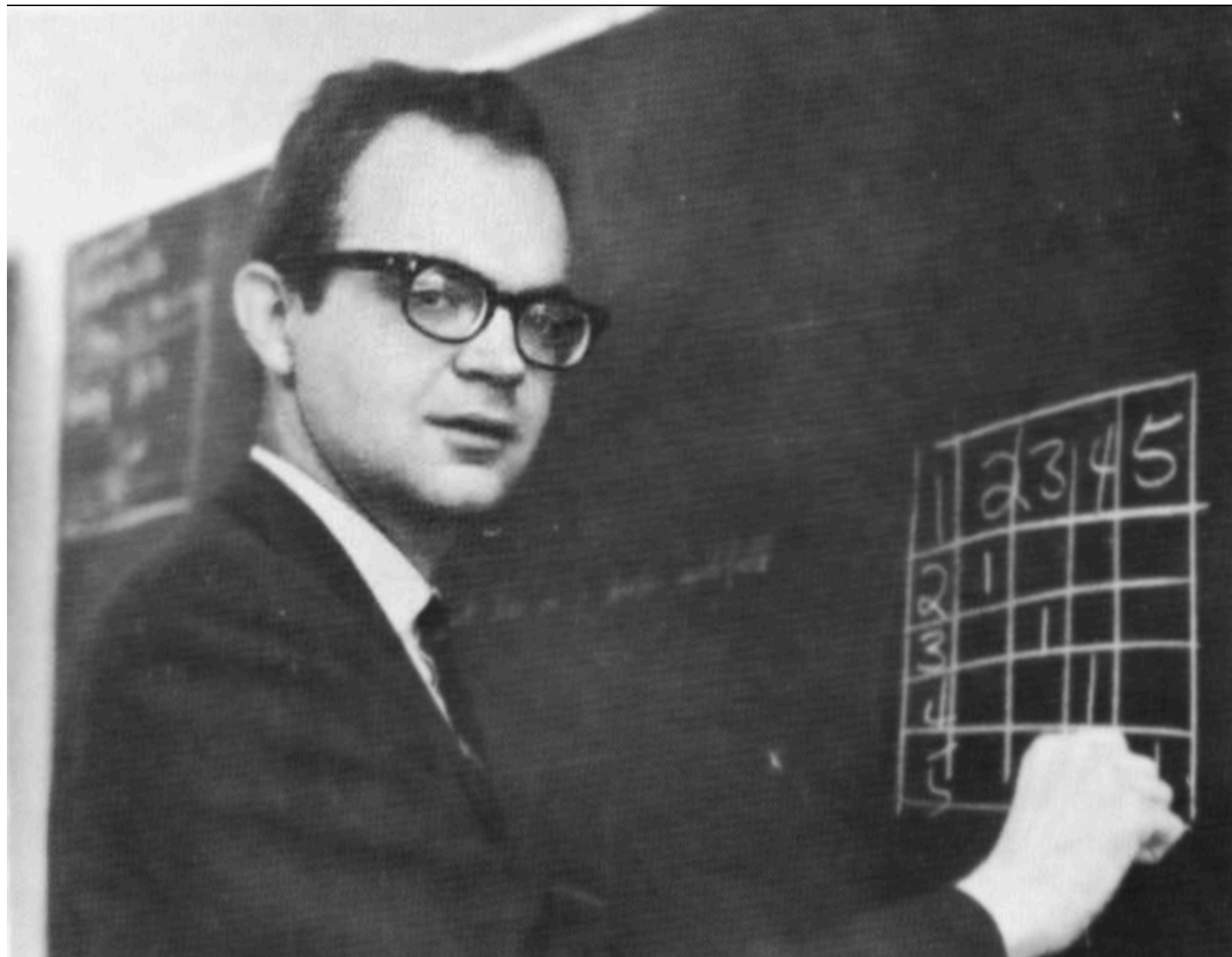


Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten
- 20 Aufgaben
- 100 Punkte

Die Zeit läuft!



Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten
- 20 Aufgaben
- 100 Punkte
- 50 Punkte zum Bestehen

Die Zeit läuft!

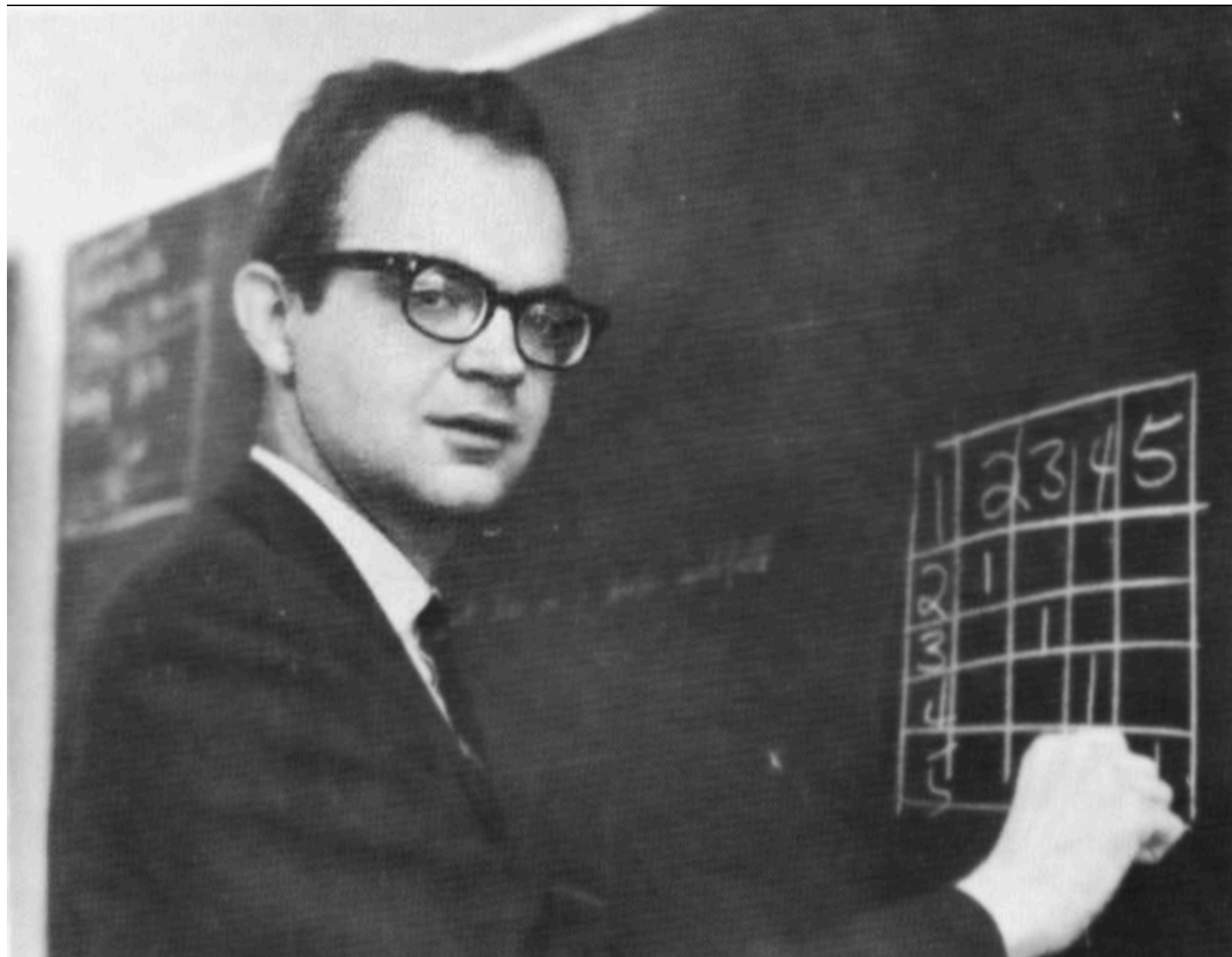


Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten
- 20 Aufgaben
- 100 Punkte
- 50 Punkte zum Bestehen
- Die Zeit läuft!

Die Zeit läuft!



Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten
- 20 Aufgaben
- 100 Punkte
- 50 Punkte zum Bestehen
- Die Zeit läuft!

Die Zeit läuft!

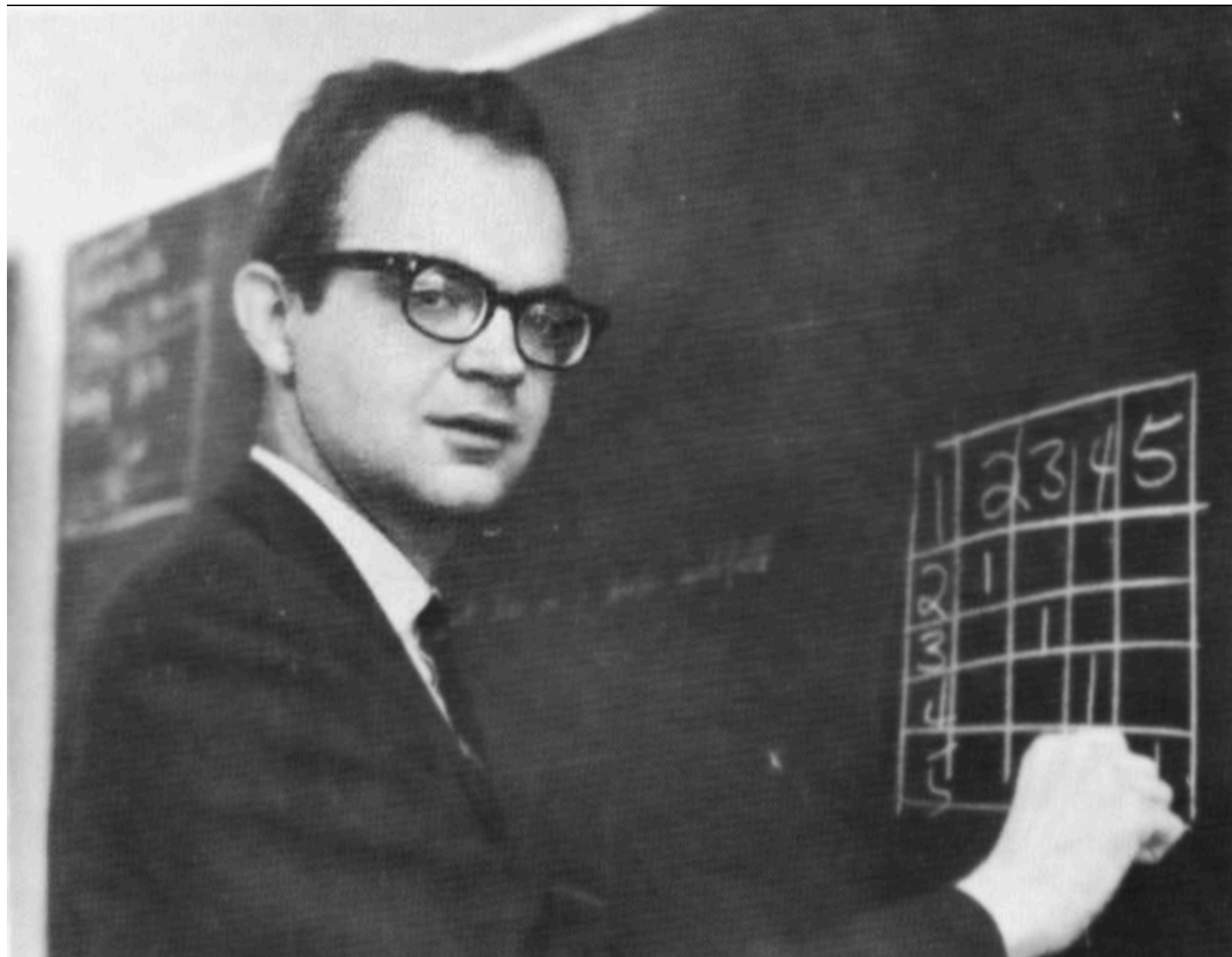


Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten
- 20 Aufgaben
- 100 Punkte
- 50 Punkte zum Bestehen
- Die Zeit läuft!

Die Zeit läuft!



Knut Donald, erster Studierender der Informatik



- 150 Minuten
- 20 Aufgaben
- 100 Punkte
- 50 Punkte zum Bestehen
- Die Zeit läuft!

30 Minuten später:



30 Minuten später:



30 Minuten später:



30 Minuten später:



30 Minuten später:



30 Minuten später:



- 6 sichere Punkte

30 Minuten später:



- 6 sichere Punkte
- 10 hoffnungslose Punkte

30 Minuten später:



- 6 sichere Punkte
- 10 hoffnungslose Punkte
- Noch 44 Punkte zum Bestehen

30 Minuten später:



- 6 sichere Punkte
- 10 hoffnungslose Punkte
- Noch 44 Punkte zum Bestehen
- Restliche Aufgaben...

Restliche Aufgaben

Restliche Aufgaben

1
20
3

Restliche Aufgaben

1
20
3

Nummer

Restliche Aufgaben

1	Nummer
20	Minuten
3	

Restliche Aufgaben

1	Nummer
20	Minuten
3	Punkte

Restliche Aufgaben

1	Nummer	2
20	Minuten	32
3	Punkte	3

Restliche Aufgaben

1	Nummer	2	3
20	Minuten	32	40
3	Punkte	3	10

Restliche Aufgaben

1	Nummer	2	3	4
20	Minuten	32	40	8
3	Punkte	3	10	5

Restliche Aufgaben

	Nummer				
1		2	3	4	5
20	Minuten	32	40	8	16
3	Punkte	3	10	5	2

Restliche Aufgaben

	Nummer	2	3	4	5	6
Minuten	20	32	40	8	16	4
Punkte	3	3	10	5	2	4

Restliche Aufgaben

	Nummer	2	3	4	5	6
1						
20						
3						
7						
32						
2						

Restliche Aufgaben

	Nummer					
1		2	3	4	5	6
20	Minuten	32	40	8	16	4
3	Punkte	3	10	5	2	4
		8				
7		40				
32		9				
2						

Restliche Aufgaben

1	Nummer	2	3	4	5	6	
20		Minuten	32	40	8	16	4
3		Punkte	3	10	5	2	4
7		8					
32		40					
2		9					
			9				
			8				
			2				

Restliche Aufgaben

	Nummer							
1		2		3		4	5	6
20		32		40		8	16	4
3		3	10	10		5	2	4
			32					
			5					
7	8	9						
32	40	8						
2	9	2						

Restliche Aufgaben

	Nummer							
1		2		3		4	5	6
20		32		40		8	16	4
3		3	10	10		5	2	4
			32		11			
	8		5		28			
7	40	9			3			
32	9	8						
2		2						

Restliche Aufgaben

	Nummer							
1		2		3		4	5	6
20		32		40		8	16	4
3		3	10	10		5	2	4
			32		11			
	8		5		28	12		
7	40	9			3	20		
32	9	8				9		
2		2						

Restliche Aufgaben

	Nummer									
1		2		3		4		5		6
20		32		40		8		16		4
3		3	10	10		5		2		4
			32		11		12			13
	8		5		28		20			16
7	40	9			3		9			10
32	9	8								
2		2								

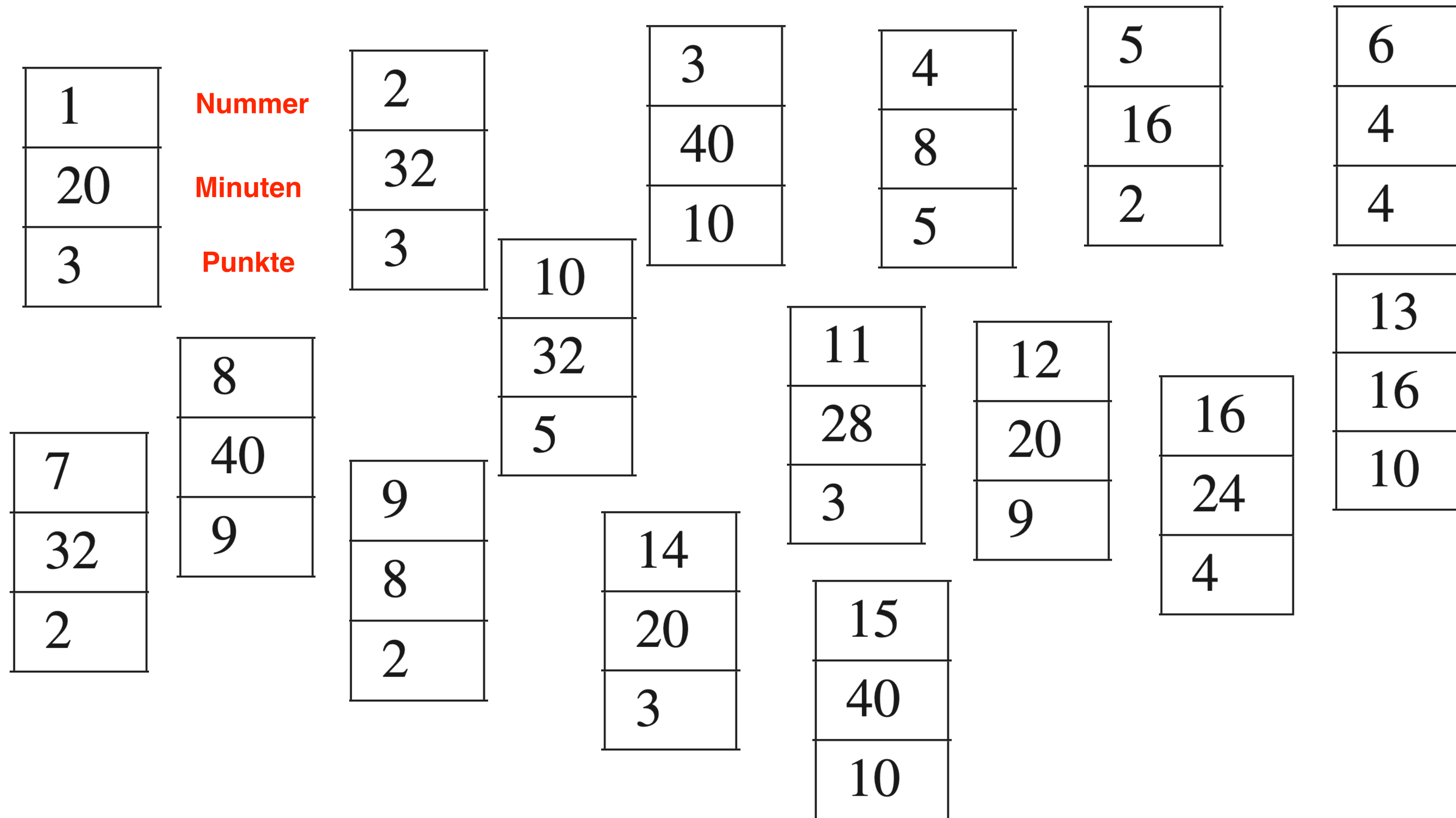
Restliche Aufgaben

	Nummer									
1		2		3		4		5		6
20		32		40		8		16		4
3		3	10	10		5		2		4
			32		11		12			13
	8		5		28		20			16
7	40	9			3		9			10
32	9	8		14						
2		2		20						
				3						

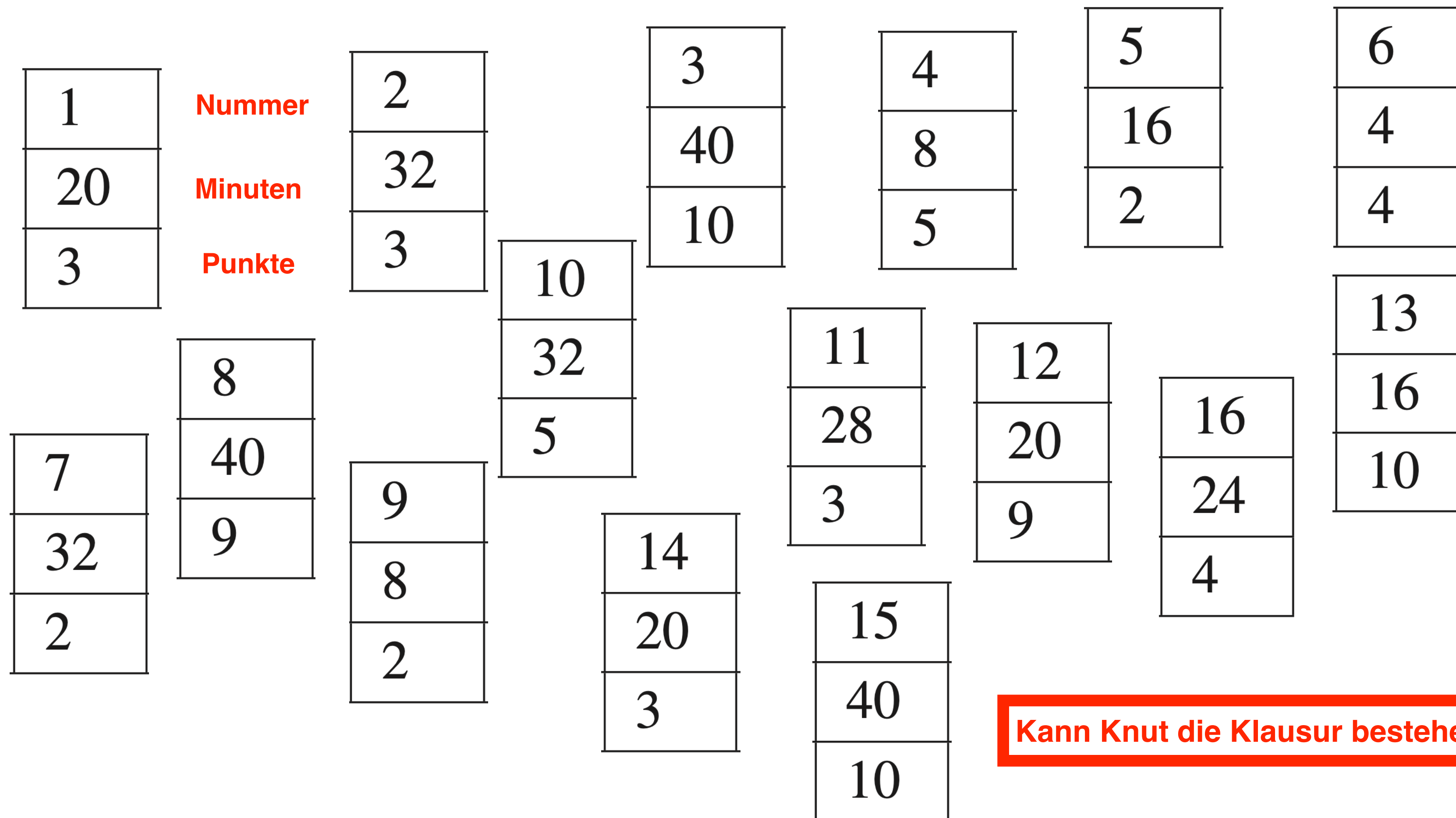
Restliche Aufgaben

	Nummer									
1		2		3		4		5		6
20		32		40		8		16		4
3		3	10	10		5		2		4
			32		11		12			13
	8		5		28		20			16
7	40	9			3		9			10
32	9	8		14						
2		2		20		15				
				3		40				
						10				

Restliche Aufgaben



Restliche Aufgaben



Kann Knut die Klausur bestehen?

Problemstellung

Problemstellung

Gegeben:

Problemstellung

Gegeben:

i Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
z_i Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
p_i Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

Problemstellung

Gegeben:

i Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
z_i Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
p_i Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

Zeitschranke: $Z = 120$

Problemstellung

Gegeben:

i Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
z_i Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
p_i Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

Zeitschranke: $Z = 120$

Punkteschranke: $P = 44$

Problemstellung

Gegeben:

i Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
z_i Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
p_i Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

Zeitschranke: $Z = 120$

Punkteschranke: $P = 44$

Gesucht:

Problemstellung

Gegeben:

i Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
z_i Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
p_i Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

Zeitschranke: $Z = 120$

Punkteschranke: $P = 44$

Gesucht:

Eine Menge $S \subseteq \{1, \dots, 16\}$ mit $\sum_{i \in S} z_i \leq 120$ und $\sum_{i \in S} p_i \geq 44$

Problemstellung

Gegeben:

i Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
z_i Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
p_i Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

Zeitschranke: $Z = 120$

Punkteschranke: $P = 44$

Gesucht:

Eine Menge $S \subseteq \{1, \dots, 16\}$ mit $\sum_{i \in S} z_i \leq 120$ und $\sum_{i \in S} p_i \geq 44$

Problemstellung

Gegeben:

i Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
z_i Zeit	20	32	40	8	16	4	32	40	8	32	28	20	16	20	40	24
p_i Punkte	3	3	10	5	2	4	2	9	2	5	3	9	10	3	10	4

Zeitschranke: $Z = 120$

Punkteschranke: $P = 44$

Gesucht:

Eine Menge $S \subseteq \{1, \dots, 16\}$ mit $\sum_{i \in S} z_i \leq 120$ und $\sum_{i \in S} p_i \geq 44$

Sortieren?

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 4$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 4$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 4$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 4$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 12$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 9$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 12$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 9$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 28$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 19$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 28$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 19$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 48$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 28$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 48$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 28$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 56$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 30$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 56$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 30$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 44$$

Sortieren?

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 44$$

Knut kann die Klausur bestehen!

Problemdefinition

Problemdefinition

Problem 1.2

Problemdefinition

Problem 1.2 (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

Problemdefinition

Problem 1.2 (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

Gegeben:

Problemdefinition

Problem 1.2 (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i

Problemdefinition

Problem 1.2 (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i
- Größenschranke Z

Problemdefinition

Problem 1.2 (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i
- Größenschranke Z
- Gewinnschranke P

Problemdefinition

Problem 1.2 (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i
- Größenschranke Z
- Gewinnschranke P

Gesucht:

Problemdefinition

Problem 1.2 (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i
- Größenschranke Z
- Gewinnschranke P

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

Problemdefinition

Problem 1.2 (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i
- Größenschranke Z
- Gewinnschranke P

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

mit

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

Problemdefinition

Problem 1.2 (Rucksackproblem, 0-1-KNAPSACK).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i
- Größenschranke Z
- Gewinnschranke P

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

mit

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i \in S} p_i \geq P$$

Optimierungsvariante

Optimierungsvariante

Problem 1.2' (MAXIMUM KNAPSACK).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i
- Größenschranke Z

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

mit

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i \in S} p_i = \text{Maximal}$$

Optimierungsvariante

Problem 1.2' (MAXIMUM KNAPSACK).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe z_i Gewinn p_i
- Größenschranke Z

Gesucht:

Eine Menge

$$S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

mit

$$\sum_{i \in S} z_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i \in S} p_i = \text{Maximal}$$

Teilaufgaben?!

Teilaufgaben?!

Problem 1.3 (FRACTIONAL KNAPSACK).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe $z_i > 0$ Gewinn $p_i > 0$
- Größenschranke Z

Gesucht:

Für jedes Objekt ein Wert

$$x_i \in [0, 1]$$

sodass

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

Teilaufgaben?!

Problem 1.3 (FRACTIONAL KNAPSACK).

Gegeben:

- n Objekte $1, \dots, n$ mit jeweils Größe $z_i > 0$ Gewinn $p_i > 0$
- Größenschranke Z

Gesucht:

Für jedes Objekt ein Wert

$$x_i \in [0, 1]$$

sodass

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

Algorithmus

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

1: *Sortiere* $\{1, \dots, n\}$ *nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*

Dies ergibt die Permutation $\pi(1), \dots, \pi(n)$.

Setze $j = 1$.

2: **while** $(\sum_{i=1}^j z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**

3: $x_{\pi(j)} := 1$

4: $j := j + 1$

5: *Setze* $x_{\pi(j)} := \frac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

6: **return**

Teilaufgaben?!

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i$$
$$\sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 4$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 4$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 4$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 4$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 12$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 9$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 12$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 9$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 28$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 19$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 28$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 19$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 48$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 28$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 48$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 28$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 56$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 30$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 56$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 30$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

x_{15}

Teilaufgaben?!

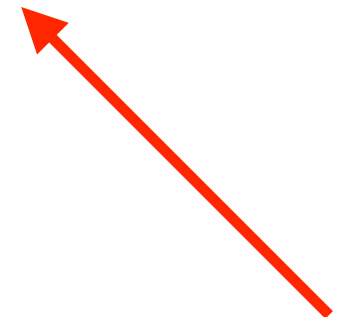
nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	40	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

x_{15}



Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 96$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

x_{15}

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

x_{15}

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	10	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

$$x_{15} = 0,6$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 40$$

$$x_{15} = 0,6$$

Teilaufgaben?!

nach Wert $\left(\frac{z_i}{p_i}\right)$ sortieren:

i	6	4	13	12	9	3	15	8	16	10	1	14	5	11	2	7
z_i	4	8	16	20	8	40	24	40	24	32	20	20	16	28	32	32
p_i	4	5	10	9	2	10	6	9	4	5	3	3	2	3	3	2

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i = 120$$

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = 46$$

$$x_{15} = 0,6$$

Algorithmus

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \textit{Maximal}$$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

1: Sortiere $\{1, \dots, n\}$ nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend;

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

- 1: Sortiere $\{1, \dots, n\}$ nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend;
Dies ergibt die Permutation $\pi(1), \dots, \pi(n)$.

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

- 1: Sortiere $\{1, \dots, n\}$ nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend;
Dies ergibt die Permutation $\pi(1), \dots, \pi(n)$.
Setze $j = 1$.

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

- 1: *Sortiere* $\{1, \dots, n\}$ *nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend*;
Dies ergibt die Permutation $\pi(1), \dots, \pi(n)$.
Setze $j = 1$.
- 2: **while** $(\sum_{i=1}^j z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

- 1: *Sortiere* $\{1, \dots, n\}$ *nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend;*
Dies ergibt die Permutation $\pi(1), \dots, \pi(n)$.
Setze $j = 1$.
- 2: **while** $(\sum_{i=1}^j z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
- 3: $x_{\pi(j)} := 1$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

- 1: *Sortiere* $\{1, \dots, n\}$ *nach* $\frac{z_i}{p_i}$ *aufsteigend*;
Dies ergibt die Permutation $\pi(1), \dots, \pi(n)$.
Setze $j = 1$.
- 2: **while** $(\sum_{i=1}^j z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**
- 3: $x_{\pi(j)} := 1$
- 4: $j := j + 1$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

1: Sortiere $\{1, \dots, n\}$ nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend;

Dies ergibt die Permutation $\pi(1), \dots, \pi(n)$.

Setze $j = 1$.

2: **while** $(\sum_{i=1}^j z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**

3: $x_{\pi(j)} := 1$

4: $j := j + 1$

5: Setze $x_{\pi(j)} := \frac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

Algorithmus

Algorithmus 1.4. (*Greedy-Algorithmus*)

Eingabe: $z_1, \dots, z_n, Z, p_1, \dots, p_n$

Ausgabe: $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

mit

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i \leq Z$$

und

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i = \text{Maximal}$$

1: Sortiere $\{1, \dots, n\}$ nach $\frac{z_i}{p_i}$ aufsteigend;

Dies ergibt die Permutation $\pi(1), \dots, \pi(n)$.

Setze $j = 1$.

2: **while** $(\sum_{i=1}^j z_{\pi(i)} \leq Z)$ **do**

3: $x_{\pi(j)} := 1$

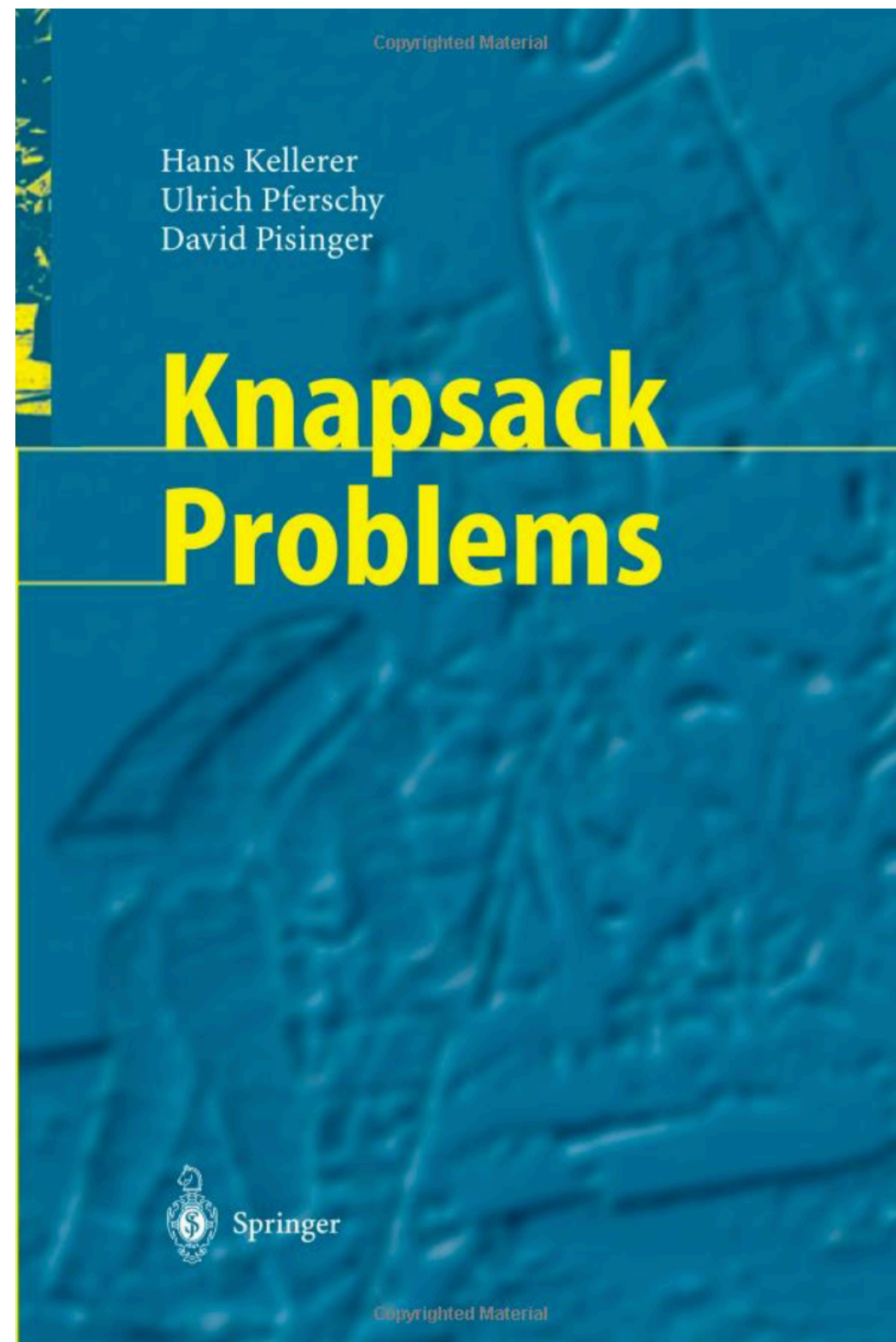
4: $j := j + 1$

5: Setze $x_{\pi(j)} := \frac{Z - \sum_{i=1}^{j-1} z_{\pi(i)}}{z_{\pi(j)}}$

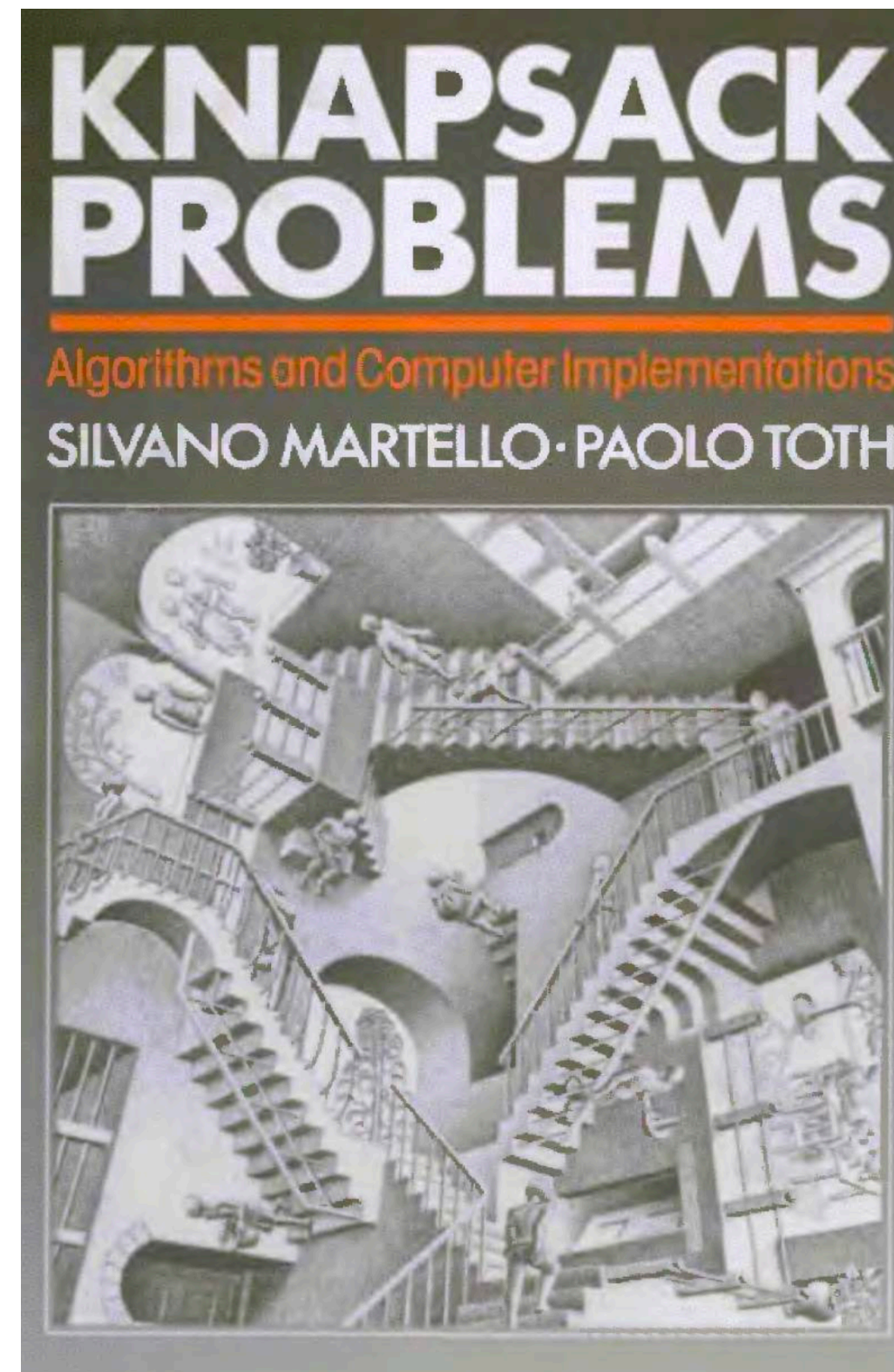
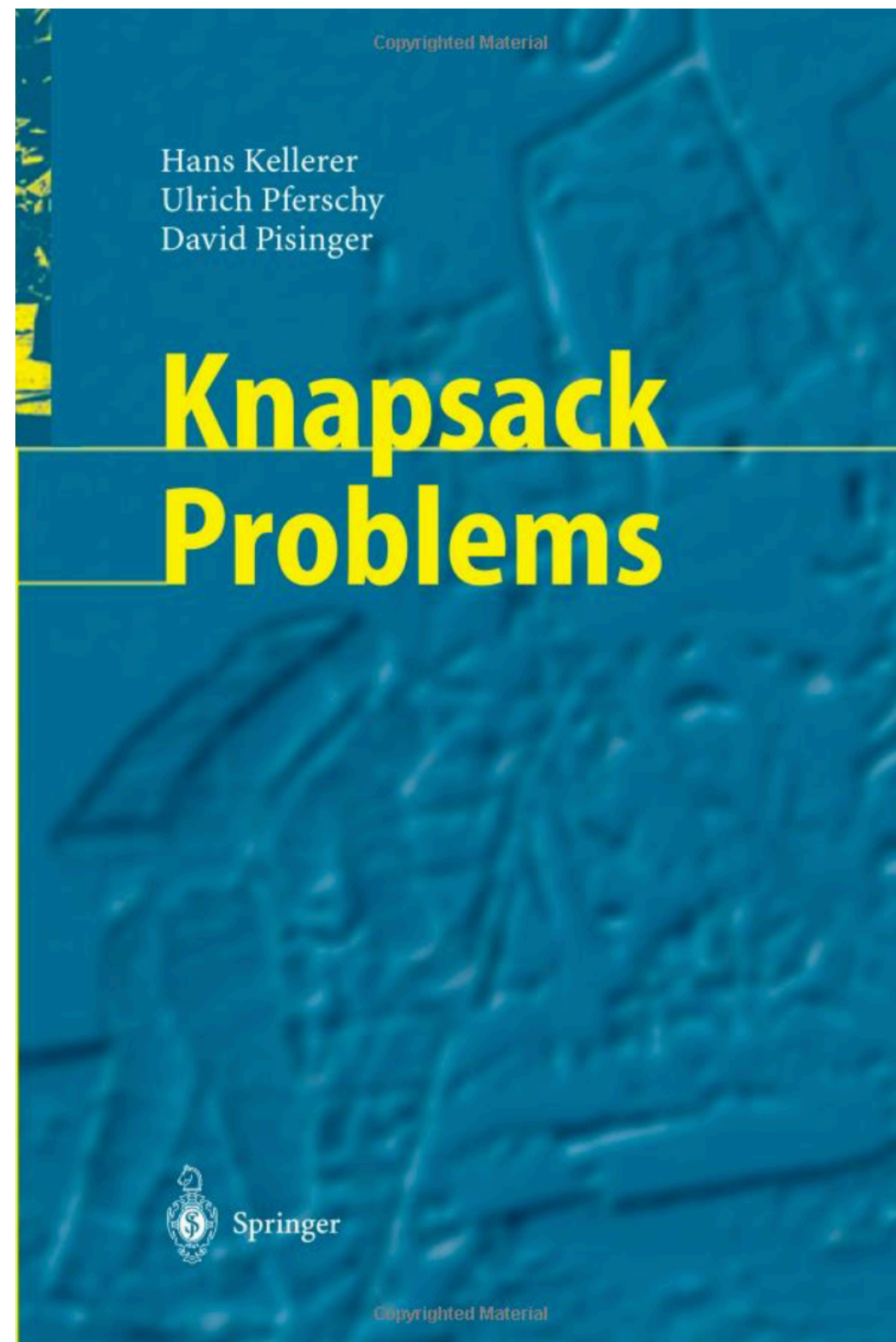
6: **return**

Literatur

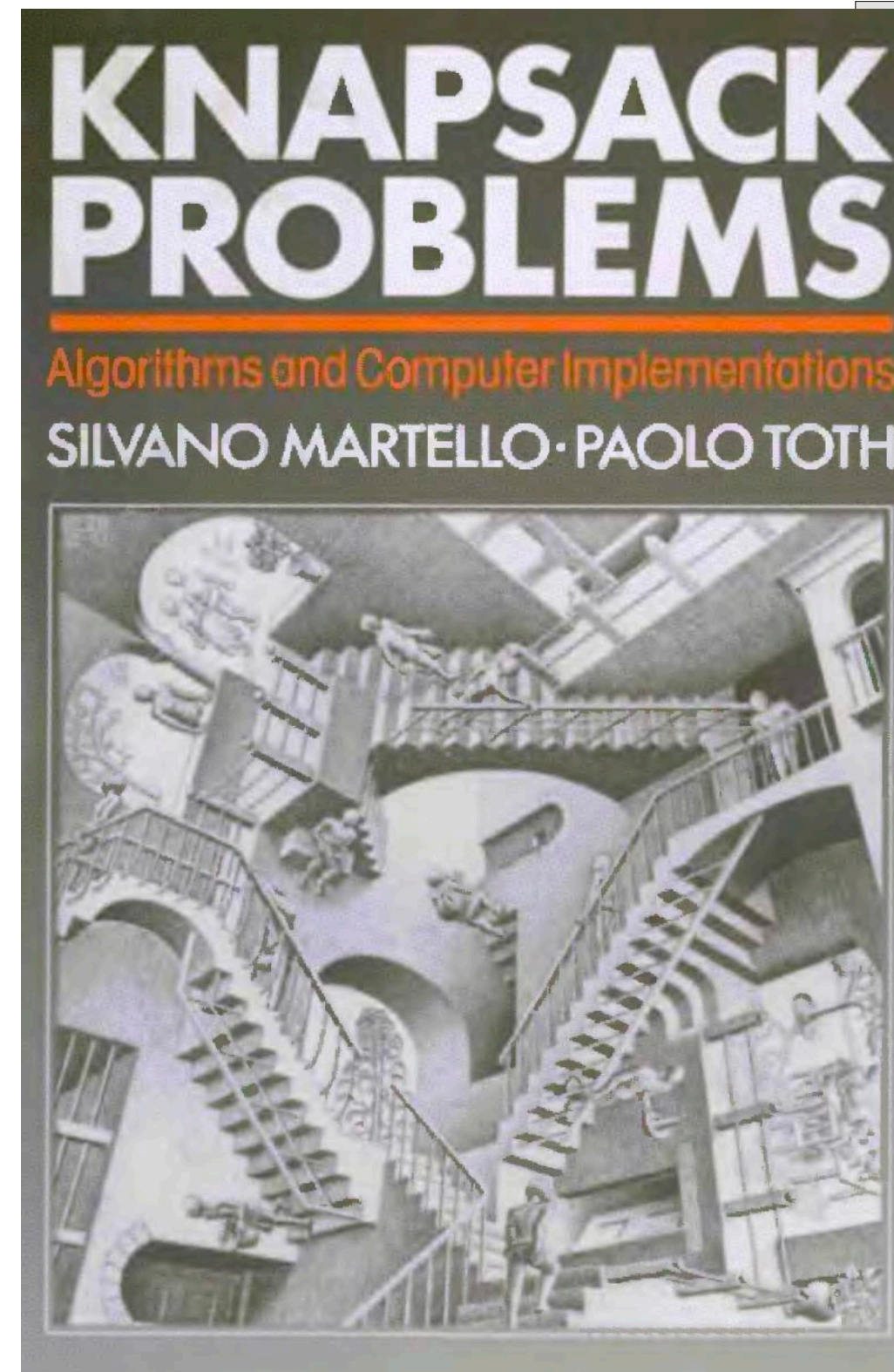
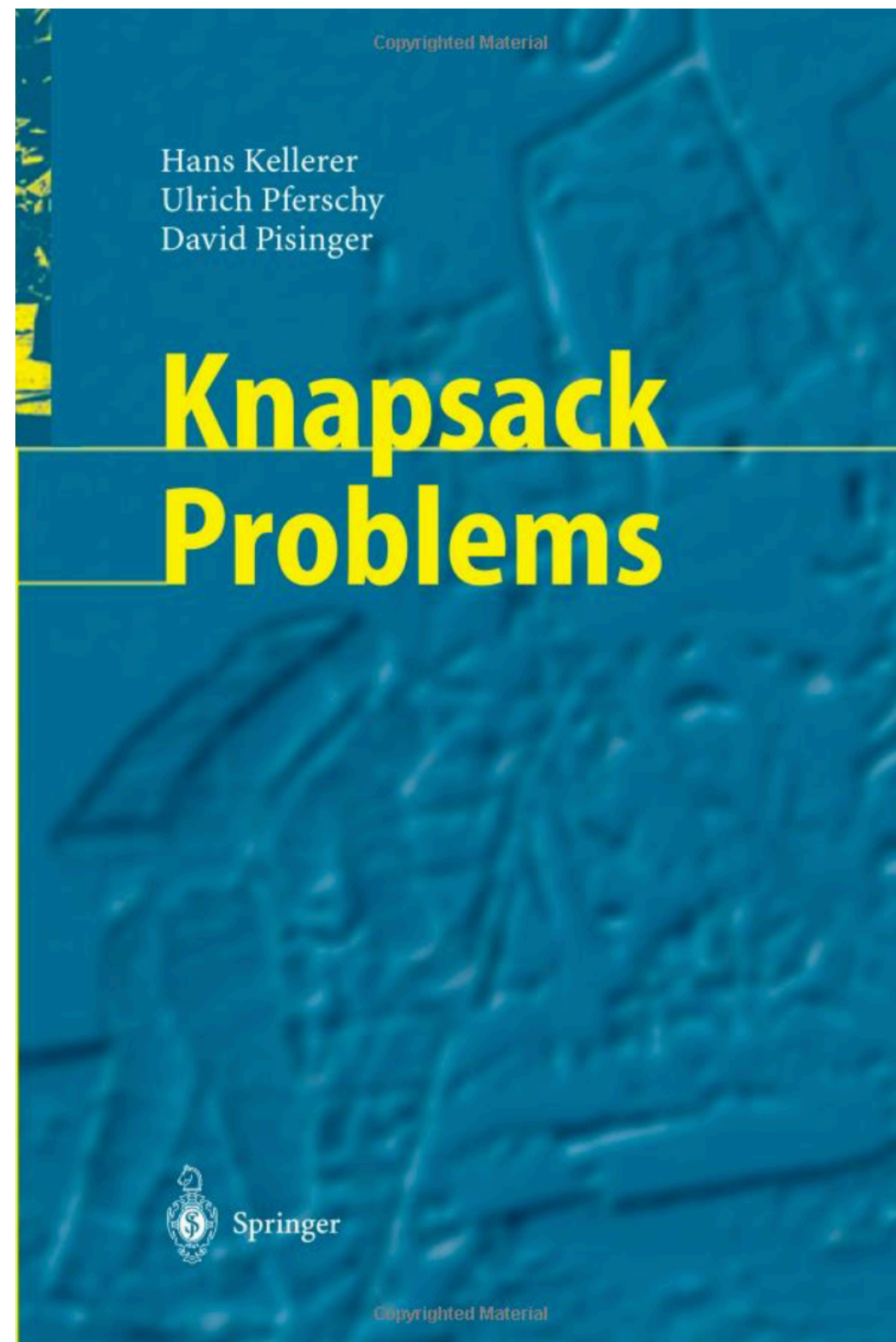
Literatur



Literatur



Literatur



KnapsackProblems.pdf (Seite 5 von 306)

Hervorhebung Drehen Markierungen Suchen nach

Contents

Preface	xi
1 Introduction	1
1.1 What are knapsack problems?	1
1.2 Terminology	2
1.3 Computational complexity	6
1.4 Lower and upper bounds	9
2 0-1 Knapsack problem	13
2.1 Introduction	13
2.2 Relaxations and upper bounds	16
2.2.1 Linear programming relaxation and Dantzig's bound	16
2.2.2 Finding the critical item in $O(n)$ time	17
2.2.3 Lagrangian relaxation	19
2.3 Improved bounds	20
2.3.1 Bounds from additional constraints	20
2.3.2 Bounds from Lagrangian relaxations	23
2.3.3 Bounds from partial enumeration	24
2.4 The greedy algorithm	27

Literatur

Literatur

Algorithmen und Datenstrukturen 2

Sándor P. Fekete

L^AT_EX Version: Arne Schmidt

30. Juni 2020

Vielen Dank!

Vielen Dank!

s.fekete@tu-bs.de