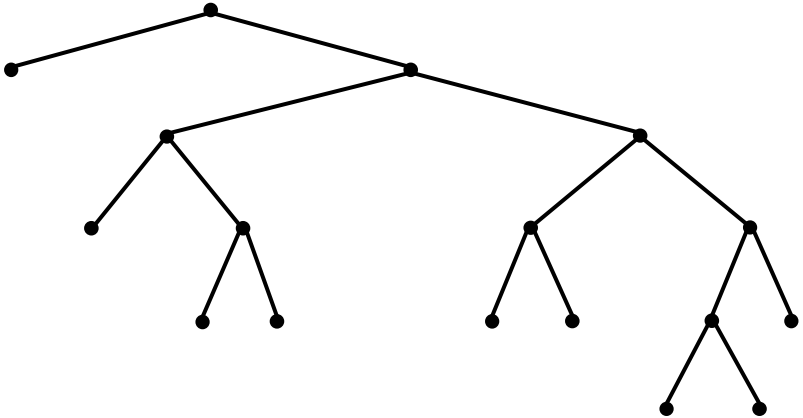
Technische Universität Braunschweig

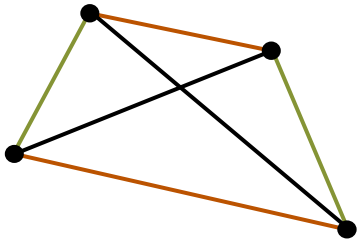
Algorithmen und Datenstrukturen 2 – Übung #3

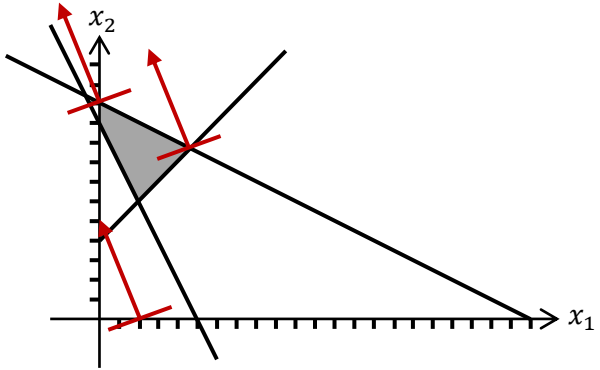
Phillip Keldenich
24.05.2023

Heute

- Branch-and-Bound für Knapsack
- Euklidisches TSP
  - Definition
  - Schranken
  - Branch-and-Bound
  - Linear Programming

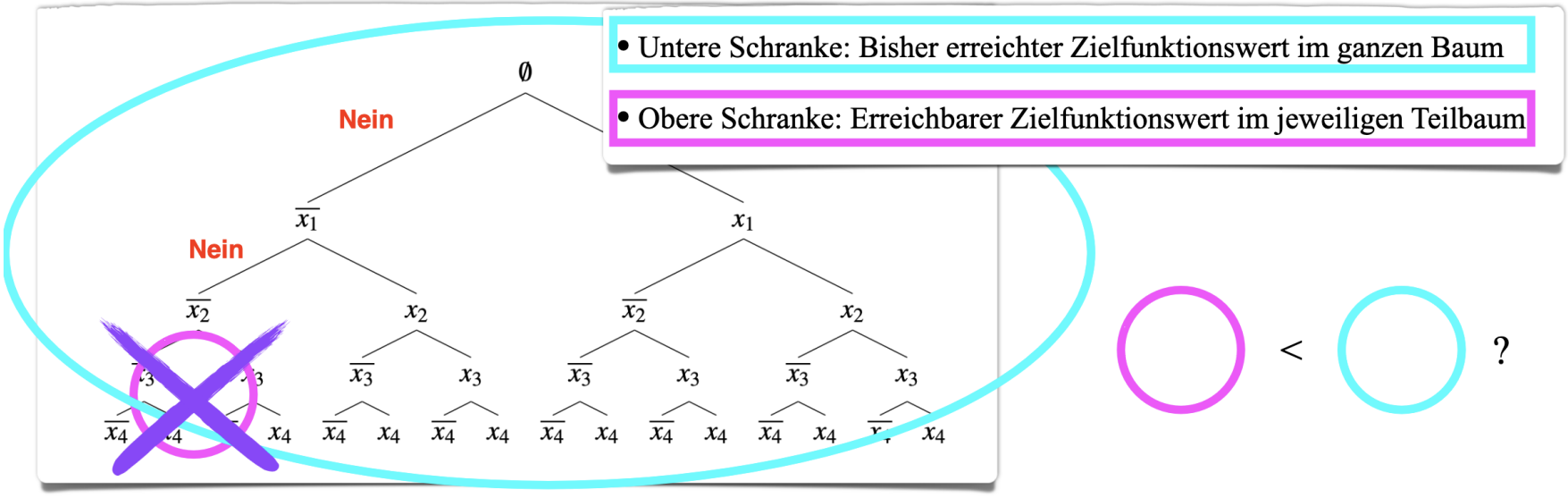






Branch & Bound: Schematisches Bild aus der Vorlesung

Für Maximierungsproblem:



Branch-and-Bound

Allgemein (an Baumknoten):

1. Test auf Zulässigkeit
2. Schranken berechnen
3. Update globale Schranke
4. Prüfe auf Pruning
5. Verzweigen falls nötig

$$\sum_{i=1}^{l-1} b_i z_i \leq Z$$

$$L = LB(I, b_1, \dots, b_{\ell-1})$$
$$U = UB(I, b_1, \dots, b_{\ell-1})$$

$$P = \max(P, L)$$

$U \leq P \Rightarrow$ ignoriere Teilbaum

1. Betrachte Fall $b_l := 0$
2. Betrachte Fall $b_l := 1$

MAXIMUM KNAPSACK

Herausforderungen

Finde gute Schranken, d.h. finde **kleine obere** und **große untere** Schranken.

Rolle der jeweiligen Schranken

Bei Maximierungsproblemen (bei Minimierung genau umgekehrt):

- Untere Schranke: Global, entspricht bester bisher gefundener Lösung
- Obere Schranke: Lokal, beschränkt Wert bester möglicher Lösung im aktuellen Teilbaum
- Untere Schranke: Gibt uns am Ende die optimale Lösung
- Obere Schranke: Hilft, den Baum kleiner zu halten

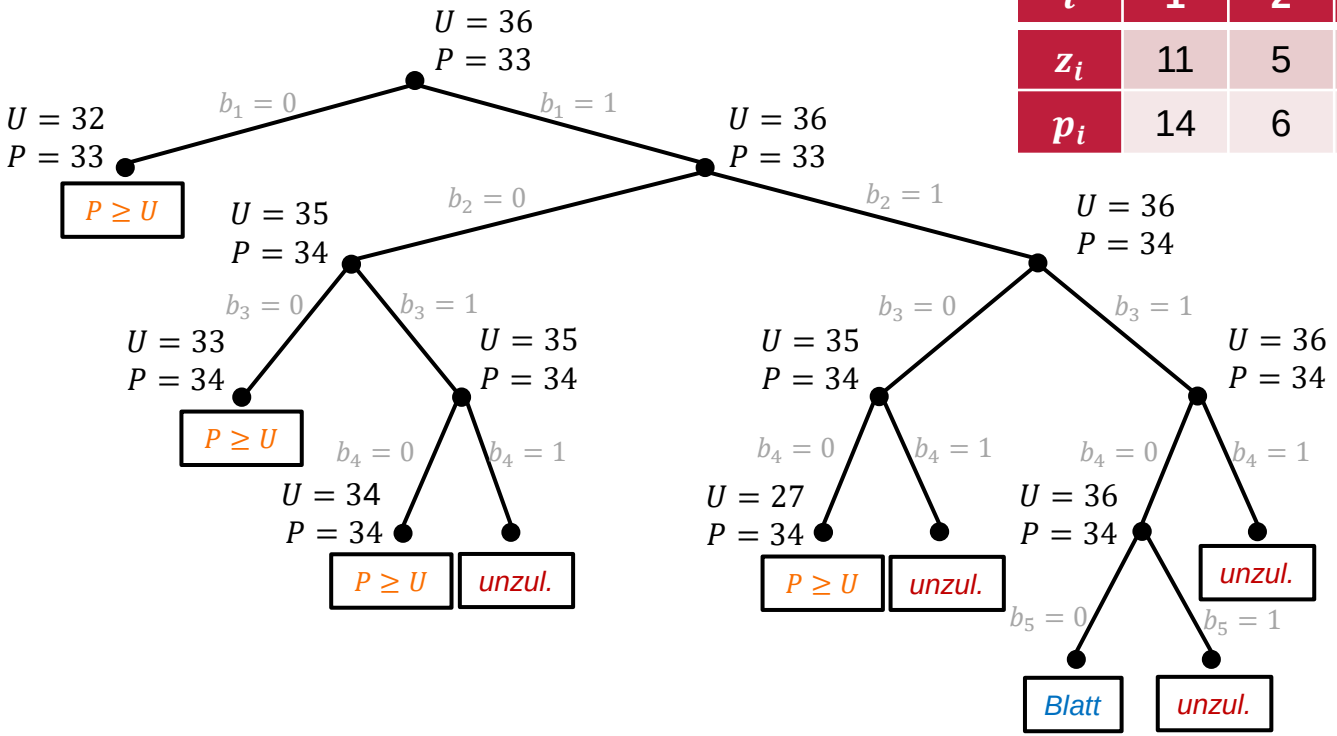
Wofür berechnen wir Schranken an Baumknoten?

- Obere Schranke: Prüfen, ob wir diesen Knoten weiter betrachten müssen
- Untere Schranke: Erkennen von neuen, möglicherweise besseren Lösungen
- Innere Knoten des Suchbaums: Partielle Zuweisung der Variablen
- Blätter: Vollständige Zuweisungen der Variablen (also potentielle Lösungen)
- Theoretisch reicht es, untere Schranken an Blättern auszuwerten
- Das verzögert möglicherweise das Finden besserer Lösungen ⇒ größerer Baum

Branch-and-Bound – Beispiel

i	1	2	3	4	5
z_i	11	5	13	18	9
p_i	14	6	13	16	7

$Z = 33$



Menge	Wert

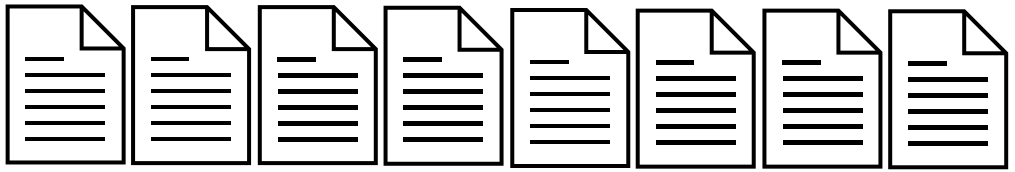
Branch-and-Bound – Laufzeit

Satz 3.2. *Algorithmus 3.1 (als rekursiv arbeitende Unterroutine) berechnet eine Optimale Lösung für das Knapsackproblem in einer Worst-Case-Laufzeit $O(2^n f(n))$, wobei $f(n)$ die Zeit für die Berechnung der Schranken ist.*

In unserem Fall: $f(n) \in O(n \log n)$; mit geschickter Vorsortierung $O(n)$

2^n ist hierbei der schlimmste Teil!

Achtung:
Jetzt ist euer Bauchgefühl gefragt!



2^{100}: 100 mal verdoppeln und stapeln. Wie hoch ist der Papierstapel?

Dicke von Papier: ~0.1mm

2^{100} Blätter gestapelt

6.371 km

384.400 km

Distanz Sonne-Erde:	150 Mio. km
Distanz Sonne-Pluto:	6 Mrd. km
Distanz zu Alpha Centauri:	4,2 Lichtjahre
Distanz zum Andromeda-Nebel:	2,5 Mio. Lichtjahre
Distanz zum Virgohaufen:	60 Mio. Lichtjahre

Wie hoch ist nun der Stapel mit 2^{100} Blättern?
Die Antwort: Etwa 14 Mrd. Lichtjahre $\approx 10^{23}$km

2^{100} Blätter gestapelt

6.371 km

384

Mio. km

d. km

ichtjahre

Mio. Lichtjahre

io. Lichtjahre

Achtung: Das ist der Worst Case!
Branch & Bound erreicht in der Praxis oft eine deutlich bessere Laufzeit, da durch Pruning viel weniger Knoten betrachtet werden müssen!

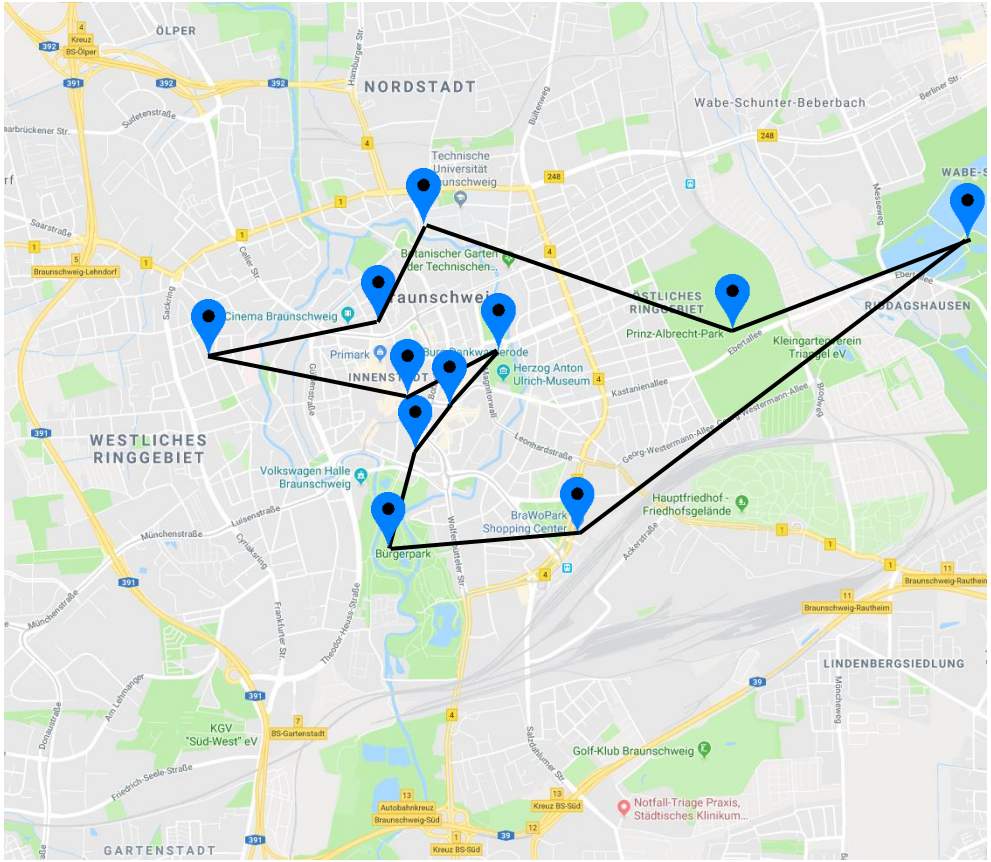
Euclidean Traveling Salesman Problem

Gegeben:
Punkte $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$

Gesucht:
Permutation π mit

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| p_{\pi(i)} - p_{\pi(i+1)} \right\|_2$$

minimal. Dabei ist $p_{\pi(n+1)} = p_{\pi(1)}$.
Finde also eine **kürzeste** Rundreise, die alle Punkte besucht.



https://imgs.xkcd.com/comics/travelling_salesman_problem.png

Euclidean Traveling Salesman Problem

Gegeben:
Punkte $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$

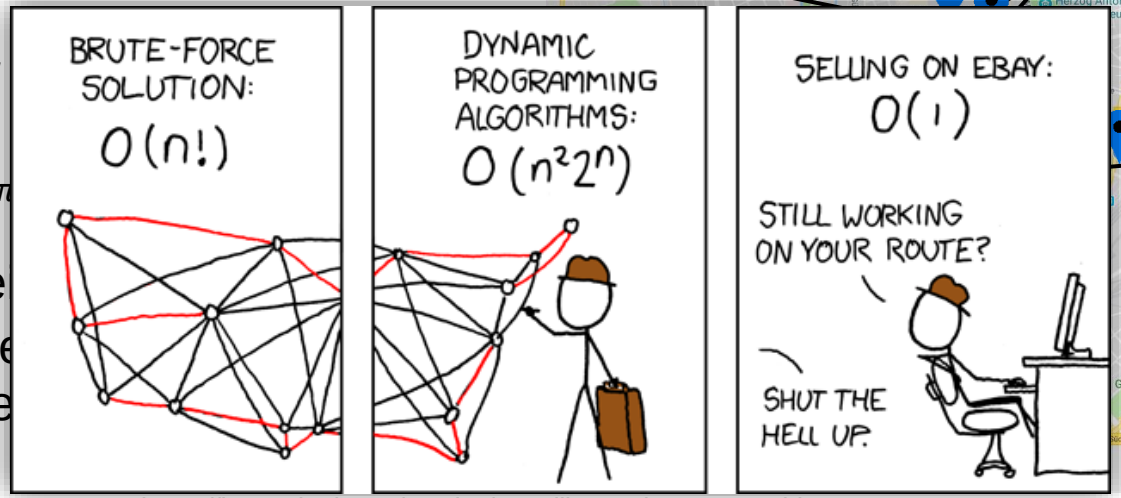
Gesucht:
Permutation π

$$\sum_{i=1}^{n} \|p_\pi$$

minimal. Dabe

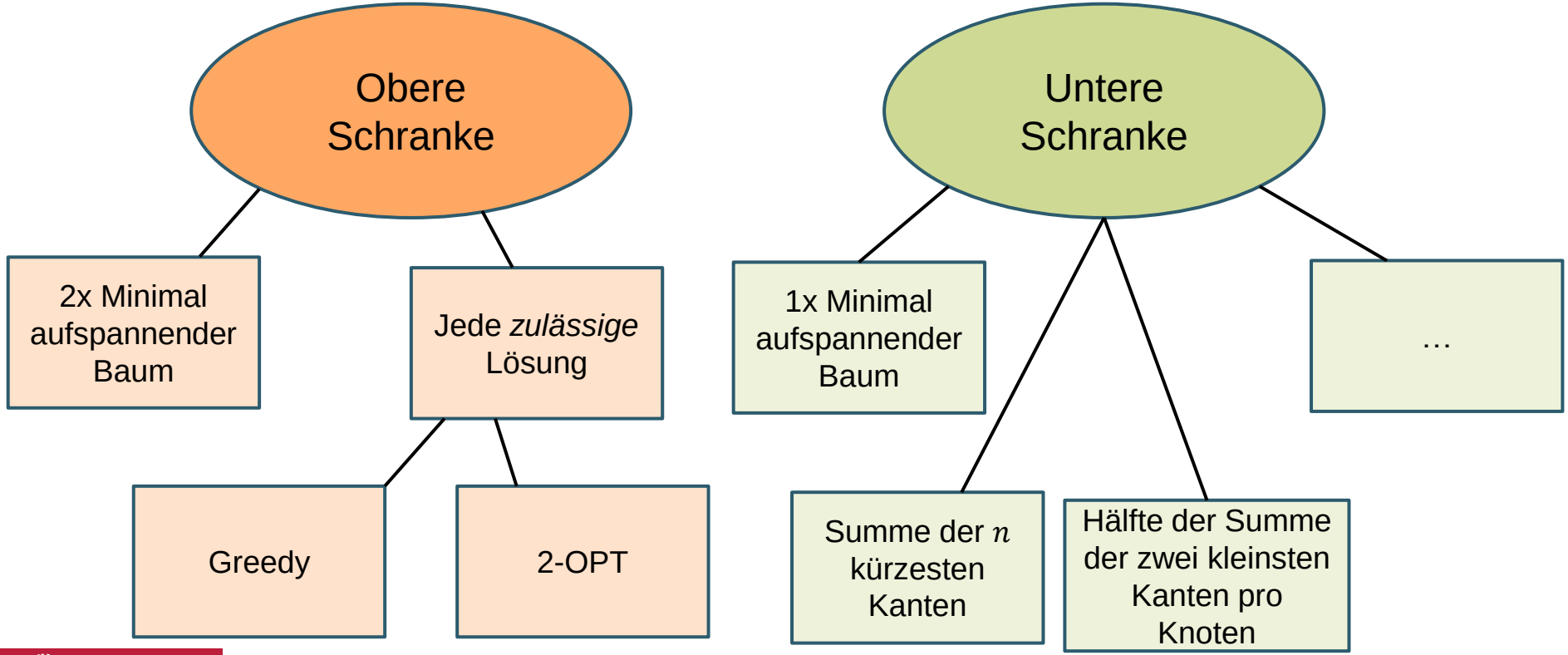
Finde also eine

die alle Punkte



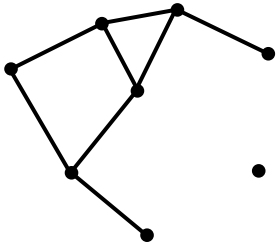
https://imgs.xkcd.com/comics/travelling_salesman_problem.png

ETSP – Schranken

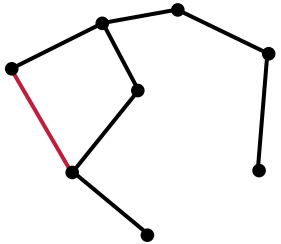


ETSP – Untere Schranken

Summe der n kürzesten Kanten



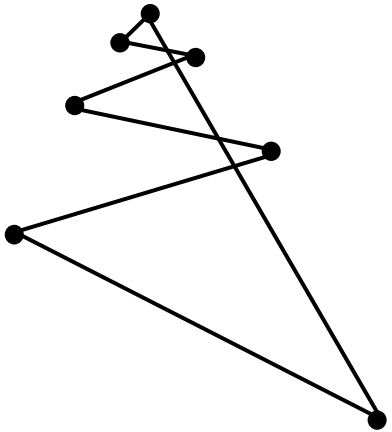
1x Minimal aufspannender Baum
(+n. kürzeste Kante)



ETSP – Obere Schranken

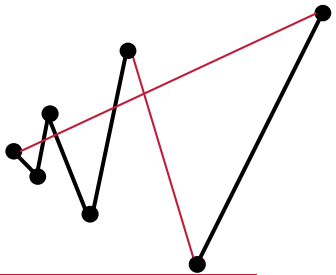
Greedy
Nearest-Neighbor

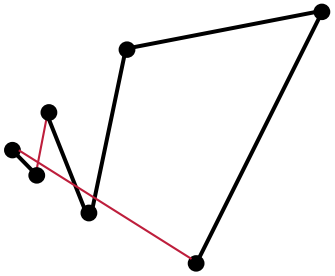
Starte bei p_1 und gehe iterativ zum nächstgelegenen Punkt.

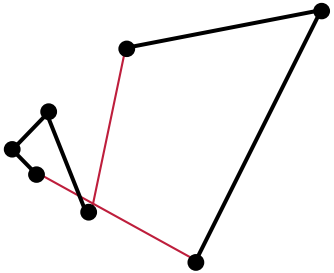


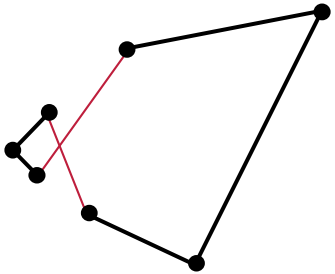
2-OPT

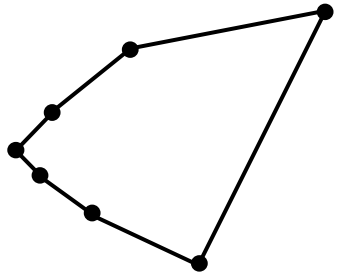
In einer beliebigen Tour, tausche zwei existierende Kanten mit zwei nicht-existierenden Kanten, um eine bessere Tour zu erhalten.











ETSP – Branch-and-Bound

Zunächst: Worüber verzweigen? Wo können wir Entscheidungen treffen?

Knoten

- Entscheide für jeden Knoten, wann er besucht wird.
- Verschiedene Knoten dürfen nicht gleichzeitig besucht werden.

Kanten

- Kante ist entweder da, oder nicht.
- Entscheidungen sind unabhängig.
- Einfach Schranken zu finden.

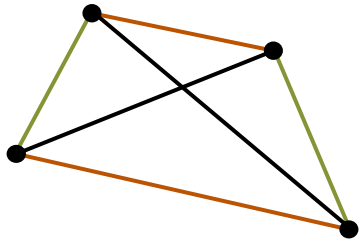
(Teil-)Kreise/Pfade

- Also alle Permutationen testen?
- Vorgänger von Knoten raten?
- Wie kann ich darüber Schranken finden?

ETSP – zulässige Teillösungen

Betrachte eine beliebige Reihenfolge der Kanten. Sei $x_i \in \{0,1\}$ die Entscheidungsvariable für die i-te Kante.
Wann ist eine Auswahl von Kanten nicht zulässig?

1. Maximal n Kanten ausgewählt, also
   $\sum_i x_i \leq n$
2. An jedem Punkt p dürfen nur zwei Kanten liegen, also
   $\sum_{i \in \delta(p)} x_i \leq 2$
3. Falls $< n$ Kanten ausgewählt sind, darf kein Kreis existieren. (Erkennbar mit BFS/DFS aus AuD)
4. Falls $= n$ Kanten ausgewählt sind, muss exakt ein Kreis existieren. (Wieder mit BFS/DFS)
5. Es dürfen sich keine zwei Kanten schneiden.



Die grünen bzw. braunen Kanten sind höchstens so lang wie die schwarzen.
Grund: Dreiecksungleichung
$d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$

ETSP – Lineares Ungleichungssystem

Etwas anderer Ansatz:

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

s.t.

$$\sum_{e \in \delta(p)} x_e = 2 \qquad \text{für alle } p \in \mathrm{P}$$

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \qquad \text{für alle } \emptyset \neq S \subsetneq P$$

$$x_e \in \{0,1\} \qquad \text{für alle } e \in E$$

E: Menge aller Knotenpaare
c_e: Distanz des Knotenpaares e

Das ist ein
Integer Linear Program

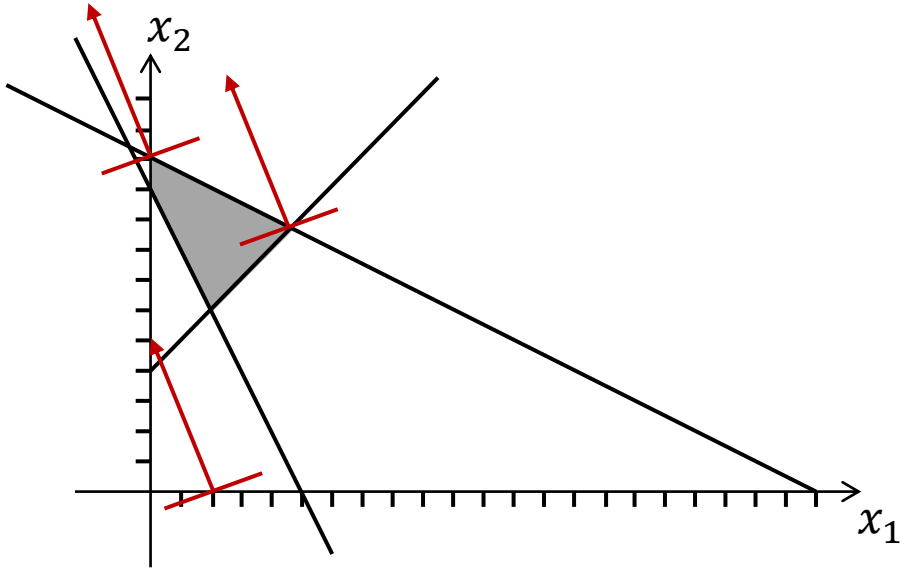
Linear/Integer Programming

Man stellt ein (Un-)Gleichungssystem mit m Variablen in der folgenden Form auf:

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &\text{s.t. } Ax \leq b \\ &\qquad x \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} &\min\ 2x_1 - 5x_2 \\ &\text{s.t.}\quad x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ &\qquad 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ &\qquad -x_1 + x_2 \geq 4 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



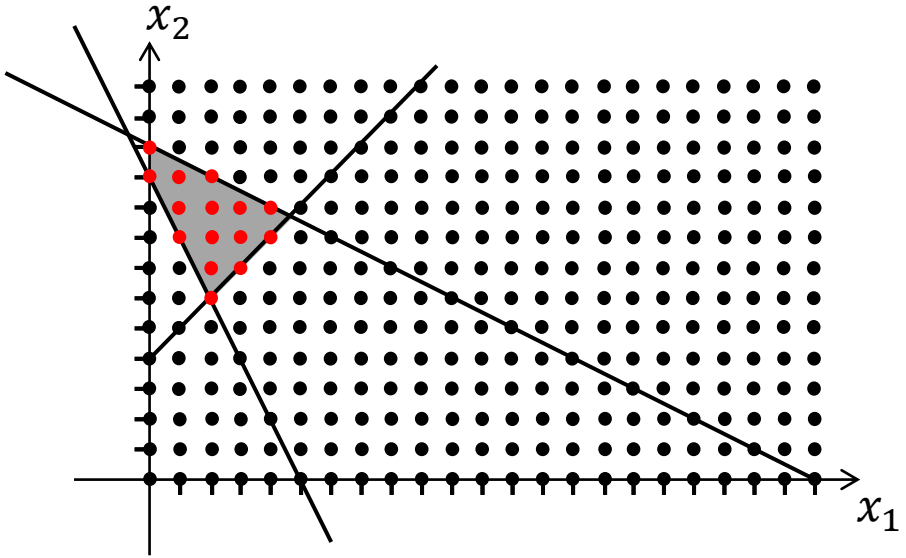
Linear/Integer Programming

Man stellt ein (Un-)Gleichungssystem mit m Variablen in der folgenden Form auf:

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &\text{s.t. } Ax \leq b \\ &\qquad x \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} &\min\ 2x_1 - 5x_2 \\ &\text{s.t.}\quad x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ &\qquad 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ &\qquad -x_1 + x_2 \geq 4 \\ &\qquad x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

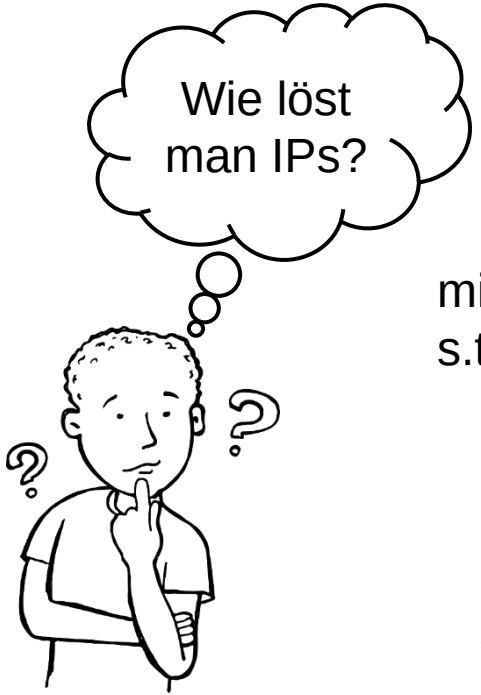


Linear/Integer Programming

LP

$$\begin{aligned}\min\ & 2x_1 - 5x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ & -x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

Effizient lösbar

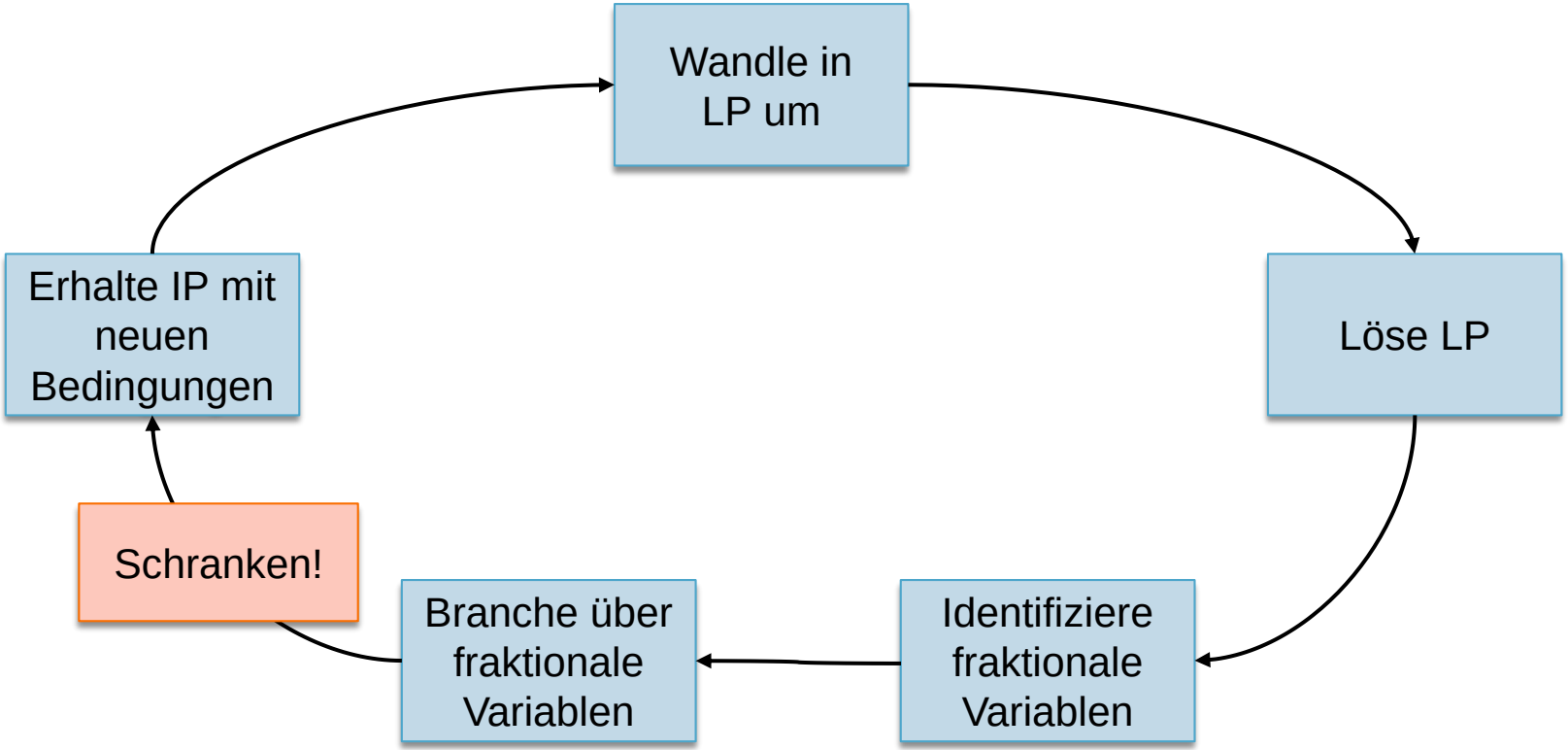


IP

$$\begin{aligned}\min\ & 2x_1 - 5x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 \leq 22 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ & -x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Vermutlich nicht
effizient lösbar

Lösen von IPs (Vereinfachte Darstellung)



Solver für Linear/Integer Programming

Microsoft Excel

ETSP

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

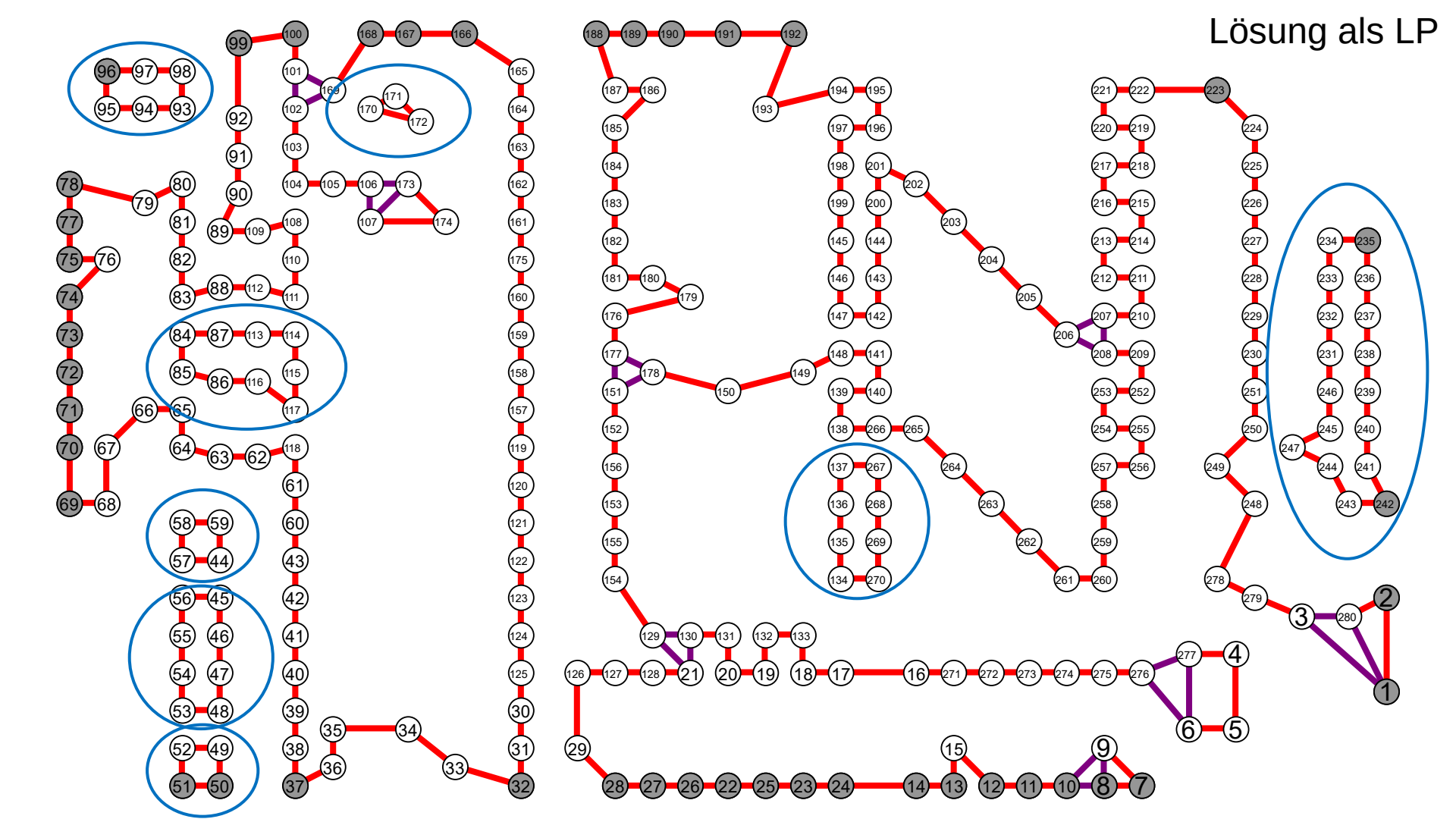
s.t.

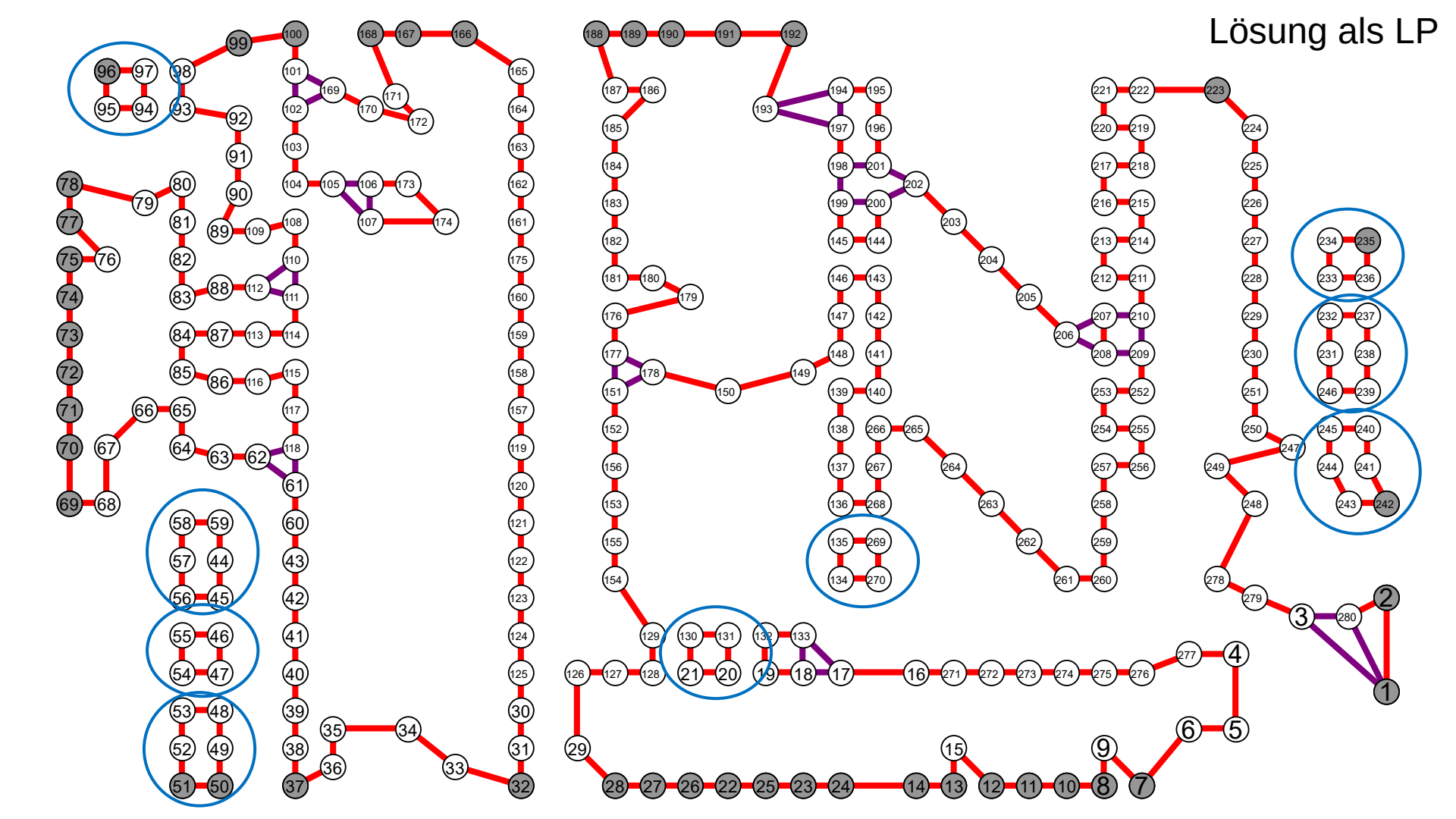
$$\sum_{e \in \delta(p)} x_e = 2 \qquad \text{für alle } p \in \mathrm{P}$$

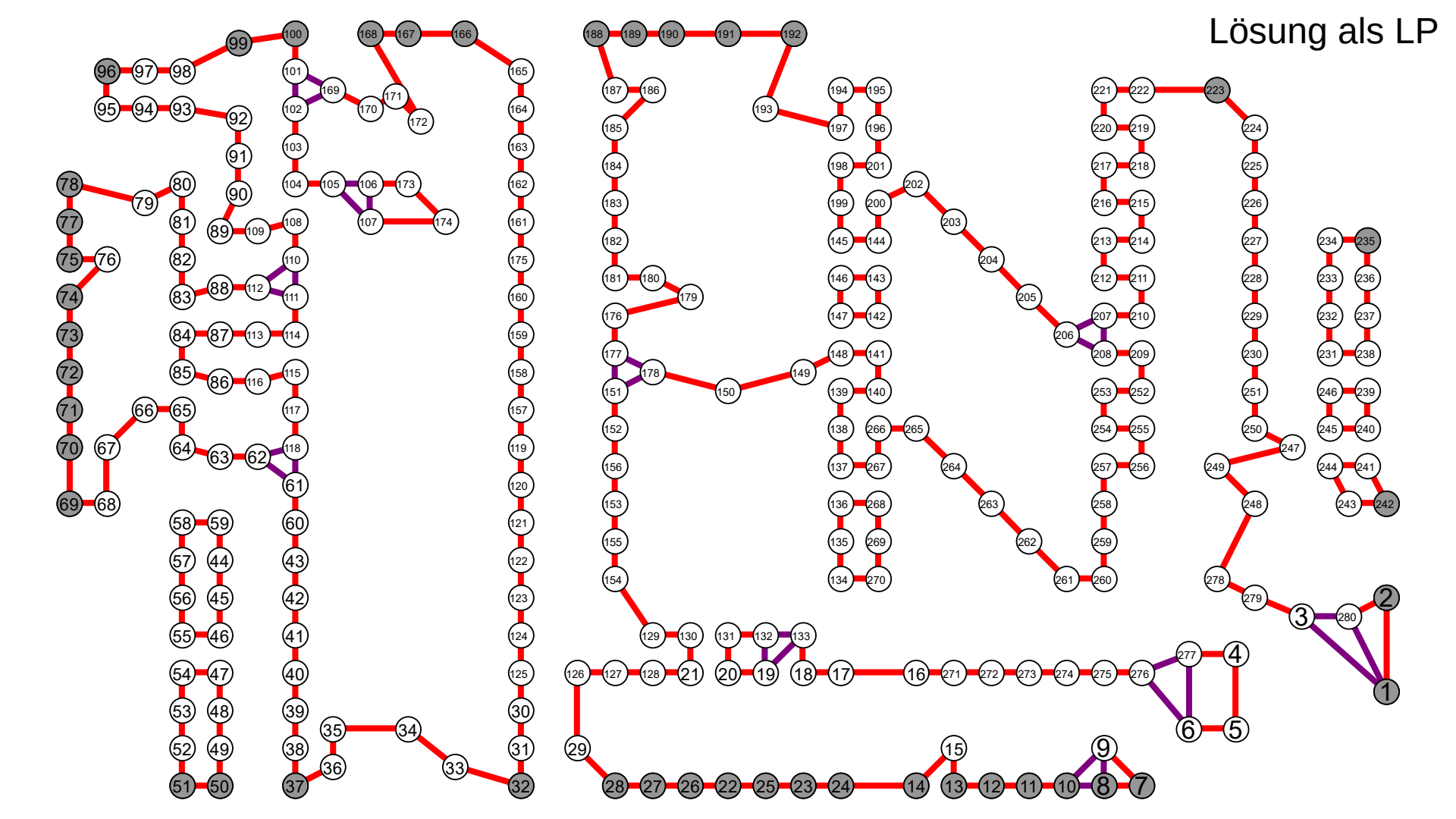
$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \qquad \text{für alle } \emptyset \neq S \subsetneq P$$

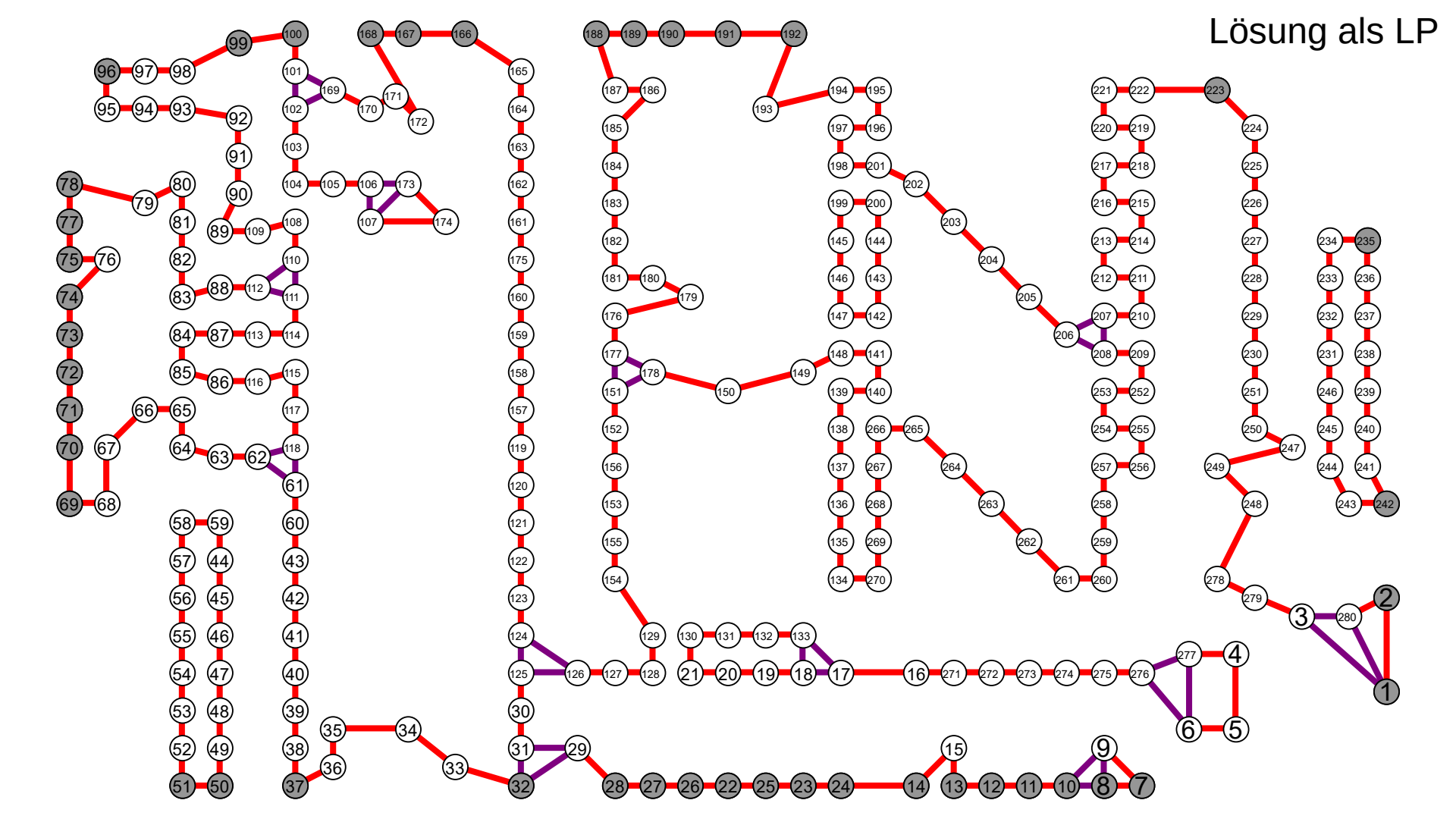
$$x_e \in \{0,1\} \qquad \text{für alle } e \in E$$

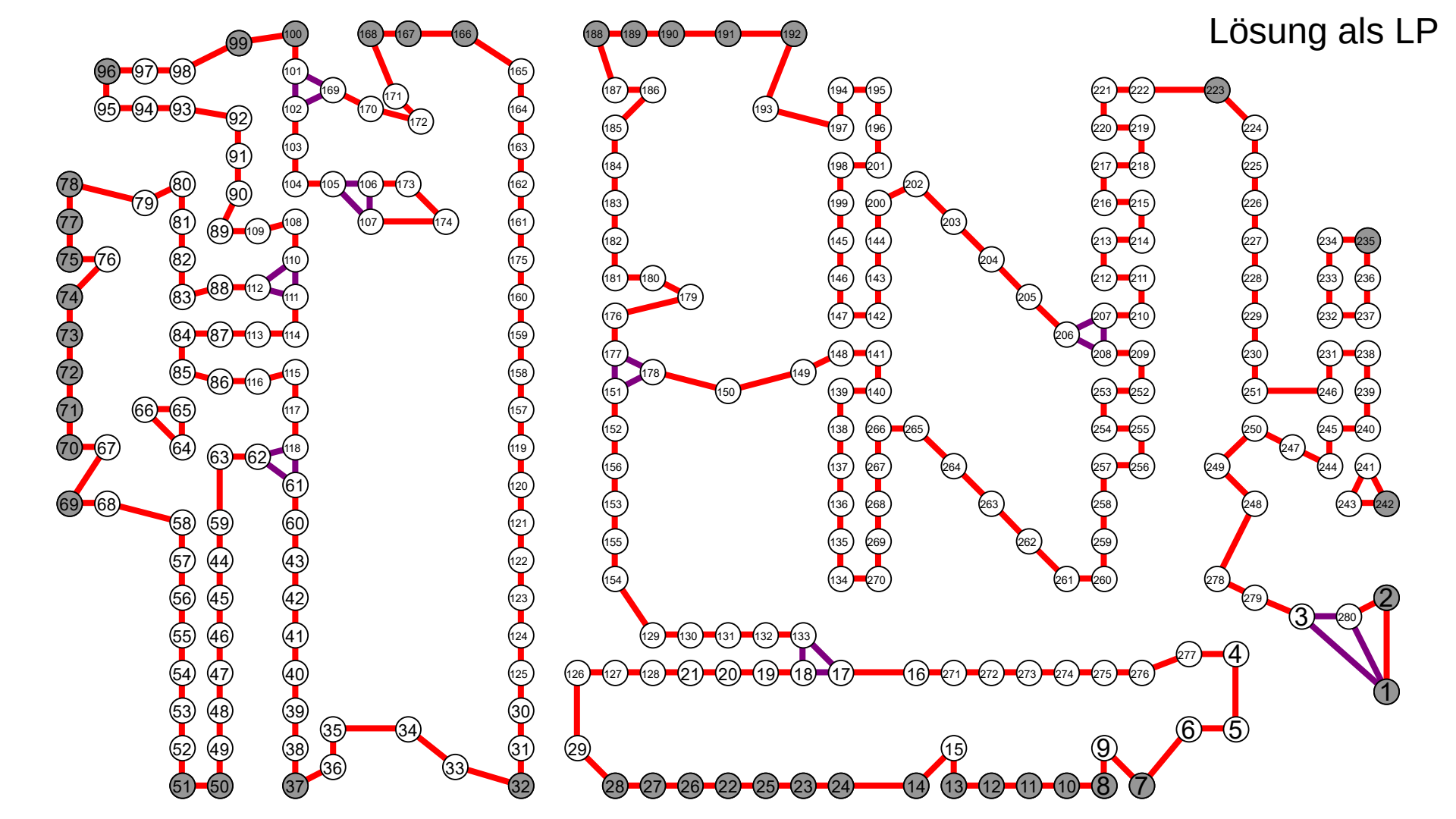
Exponentiell viele…
Füge sie während des Lösungsprozesses hinzu!

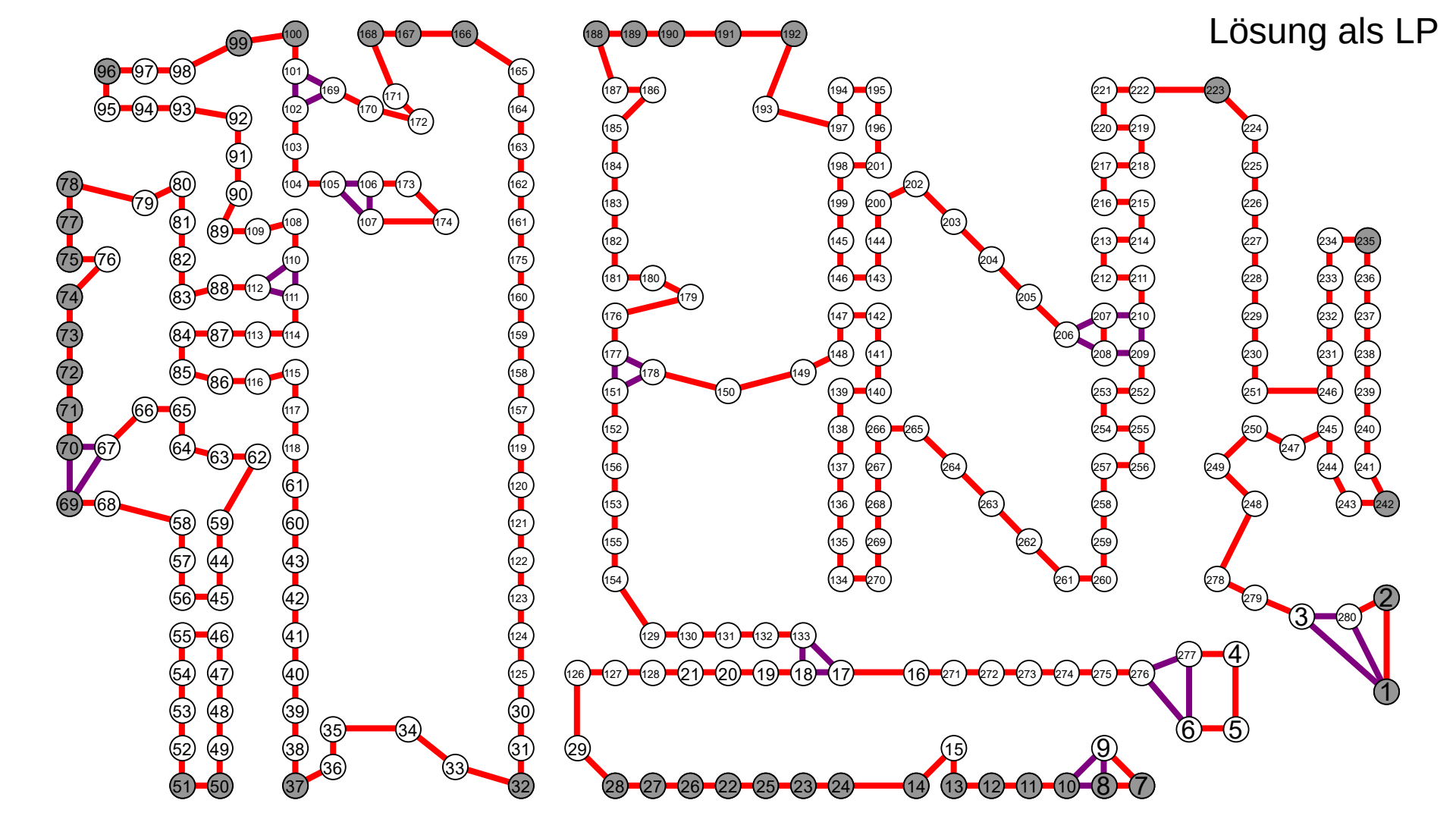

Lösung als LP

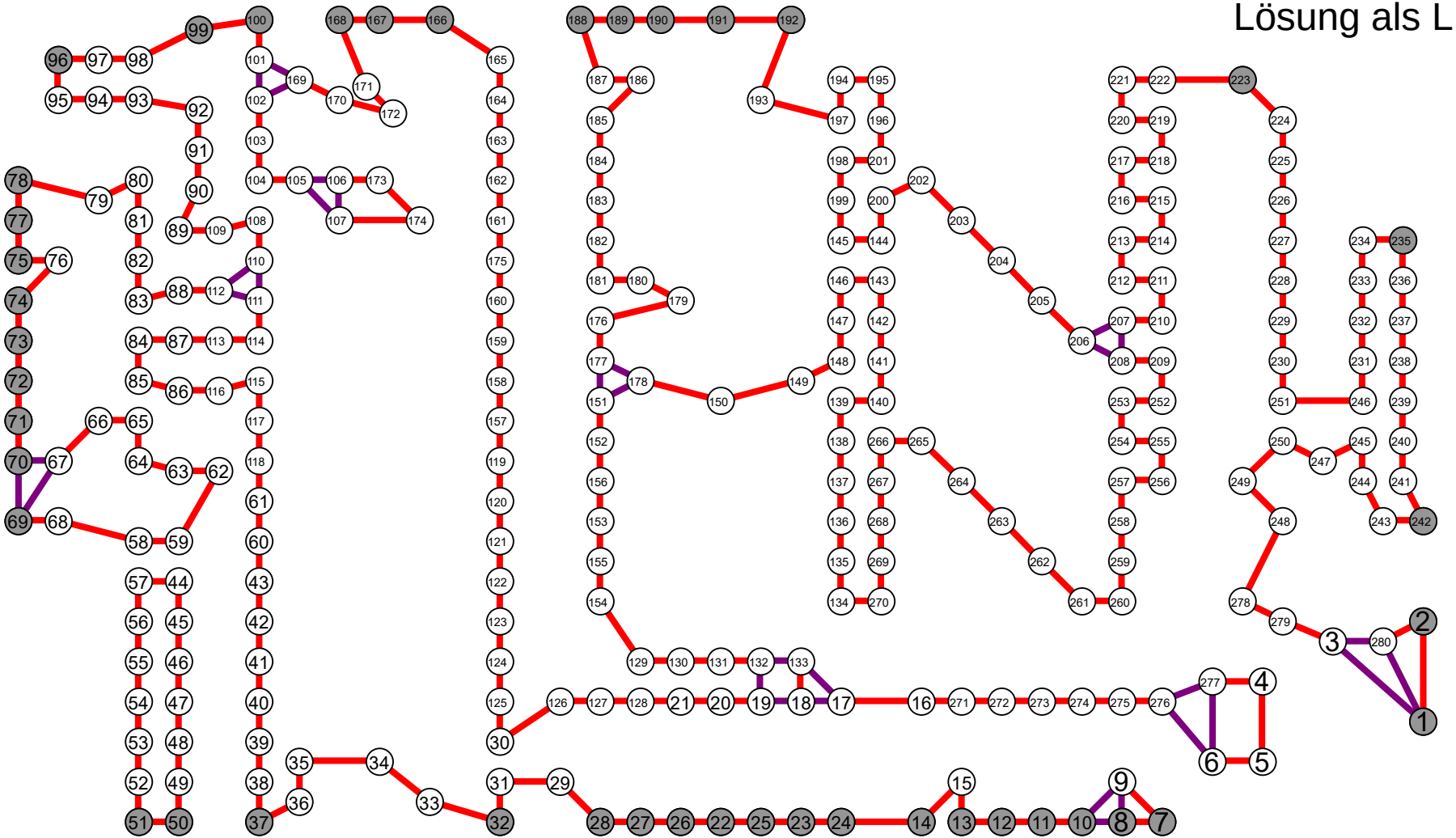

Lösung als LP

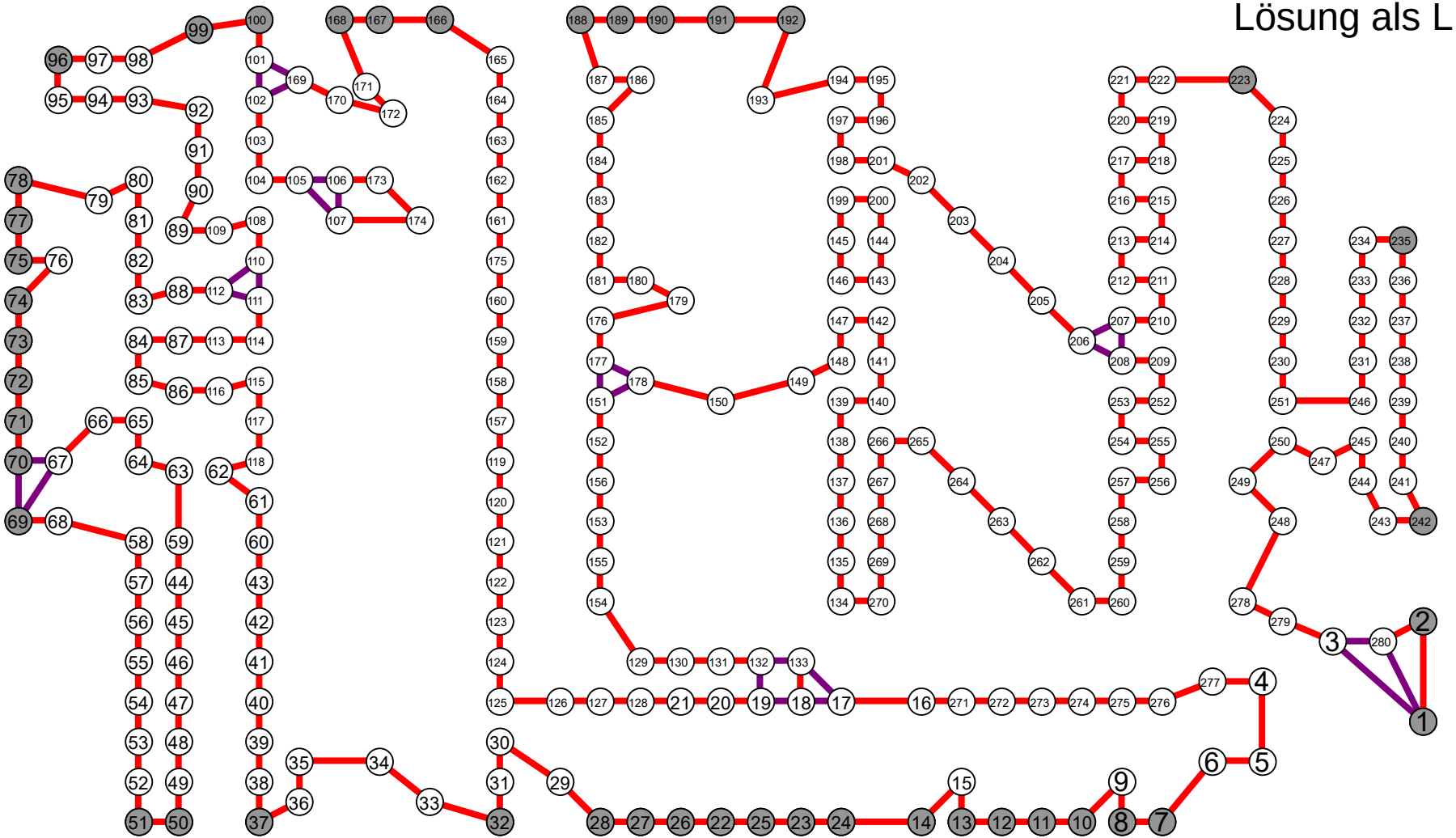

Lösung als LP

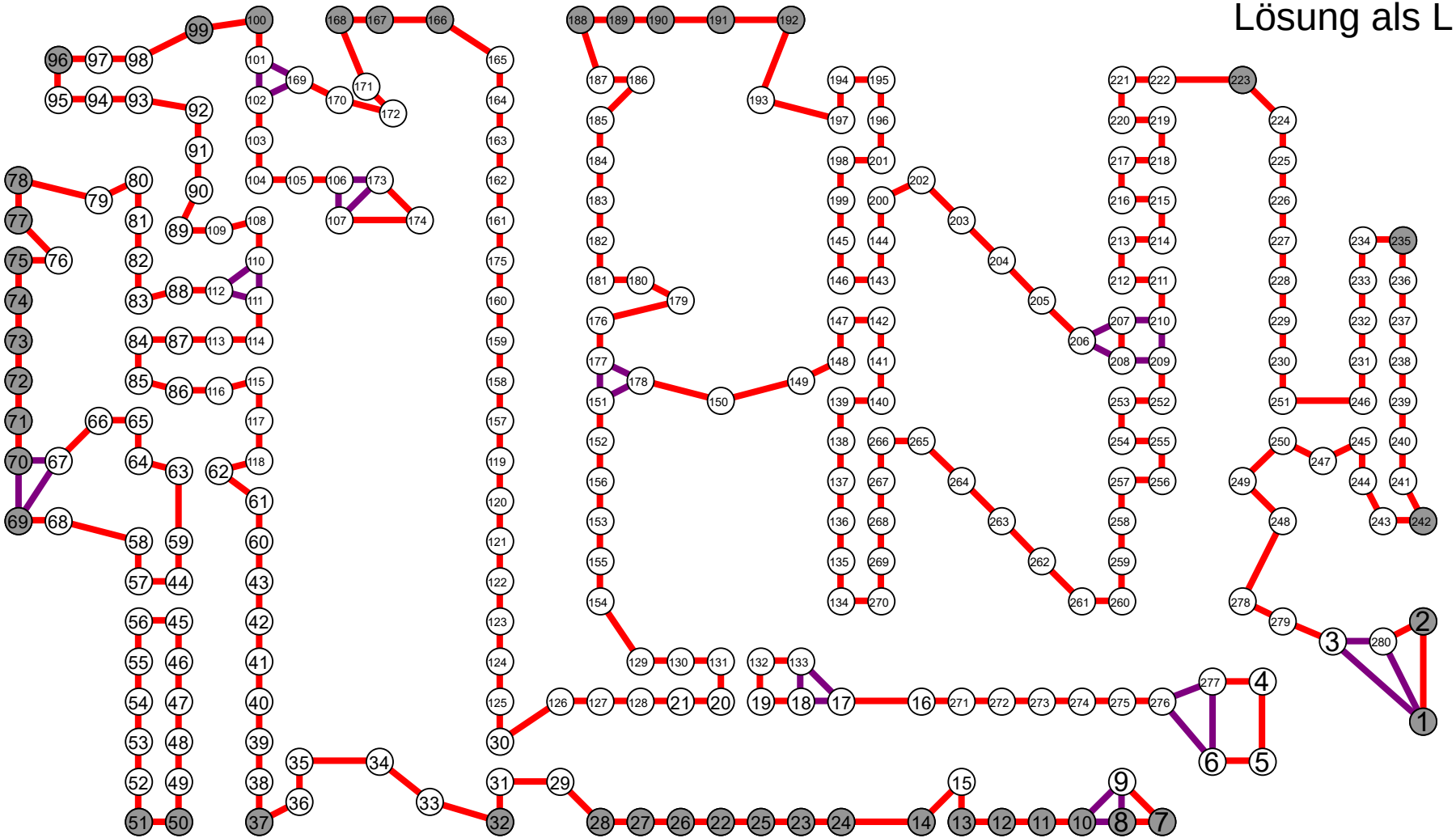

Lösung als LP

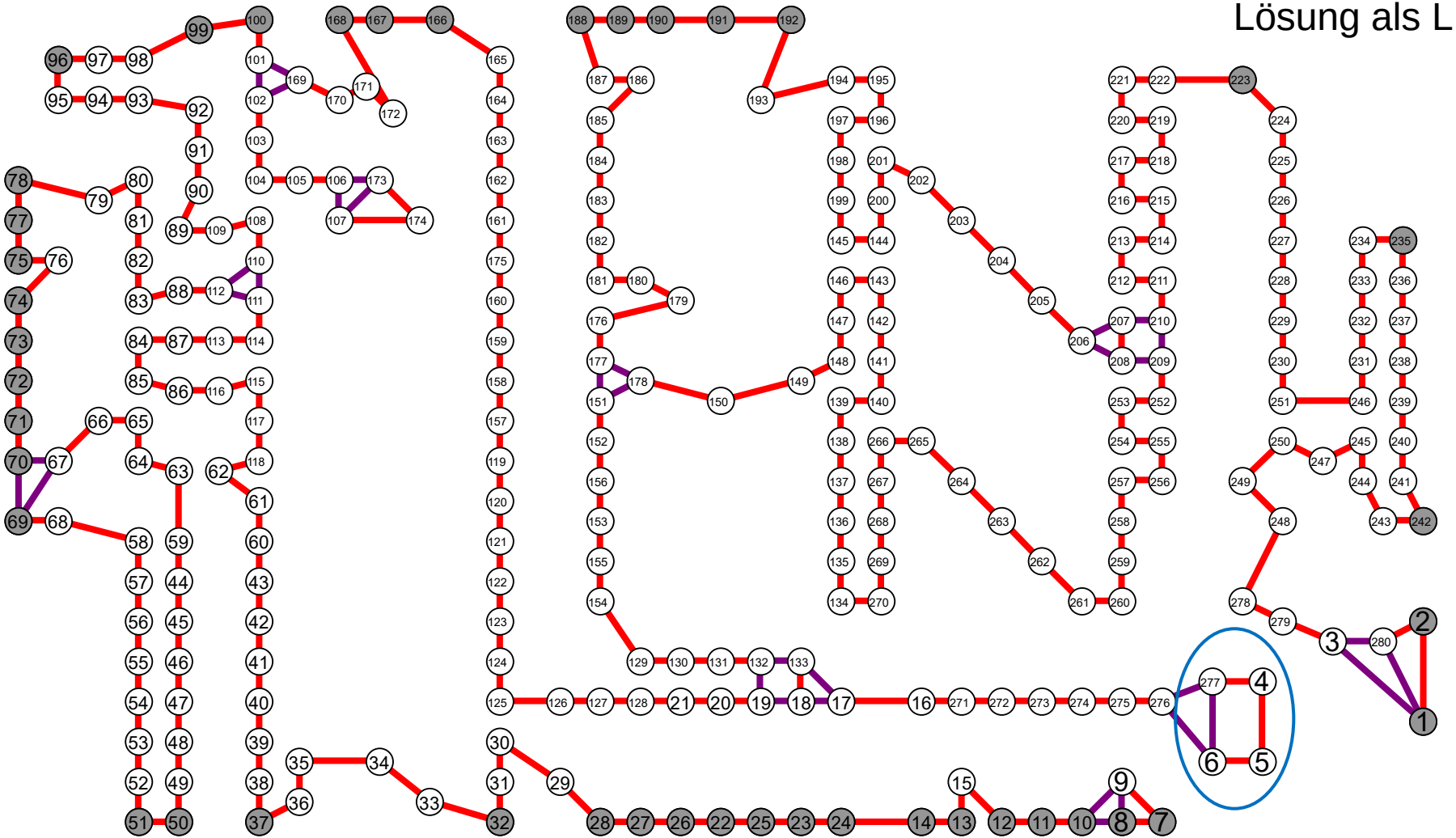

Lösung als LP


Lösung als LP

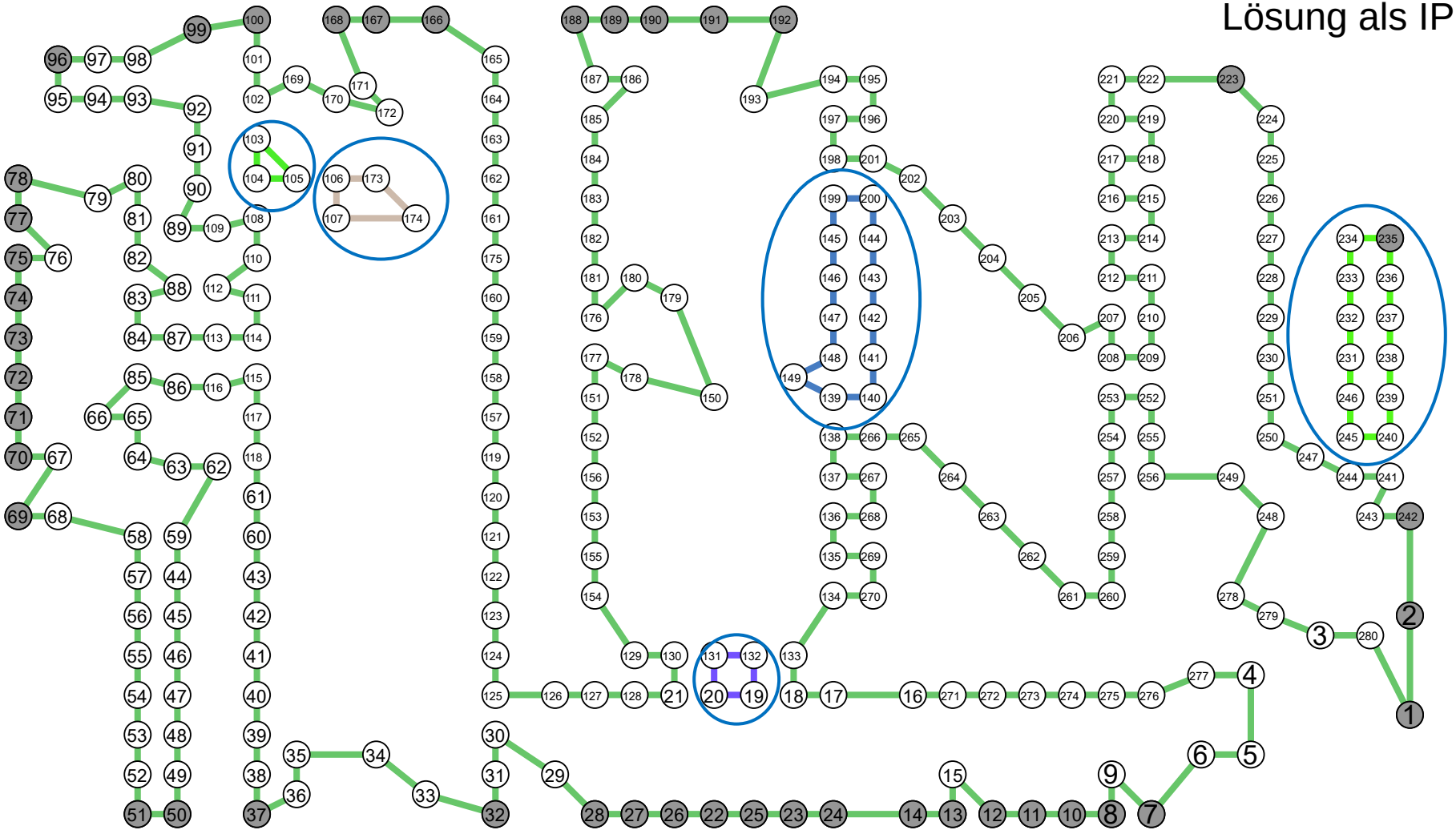

Lösung als LP


Lösung als LP

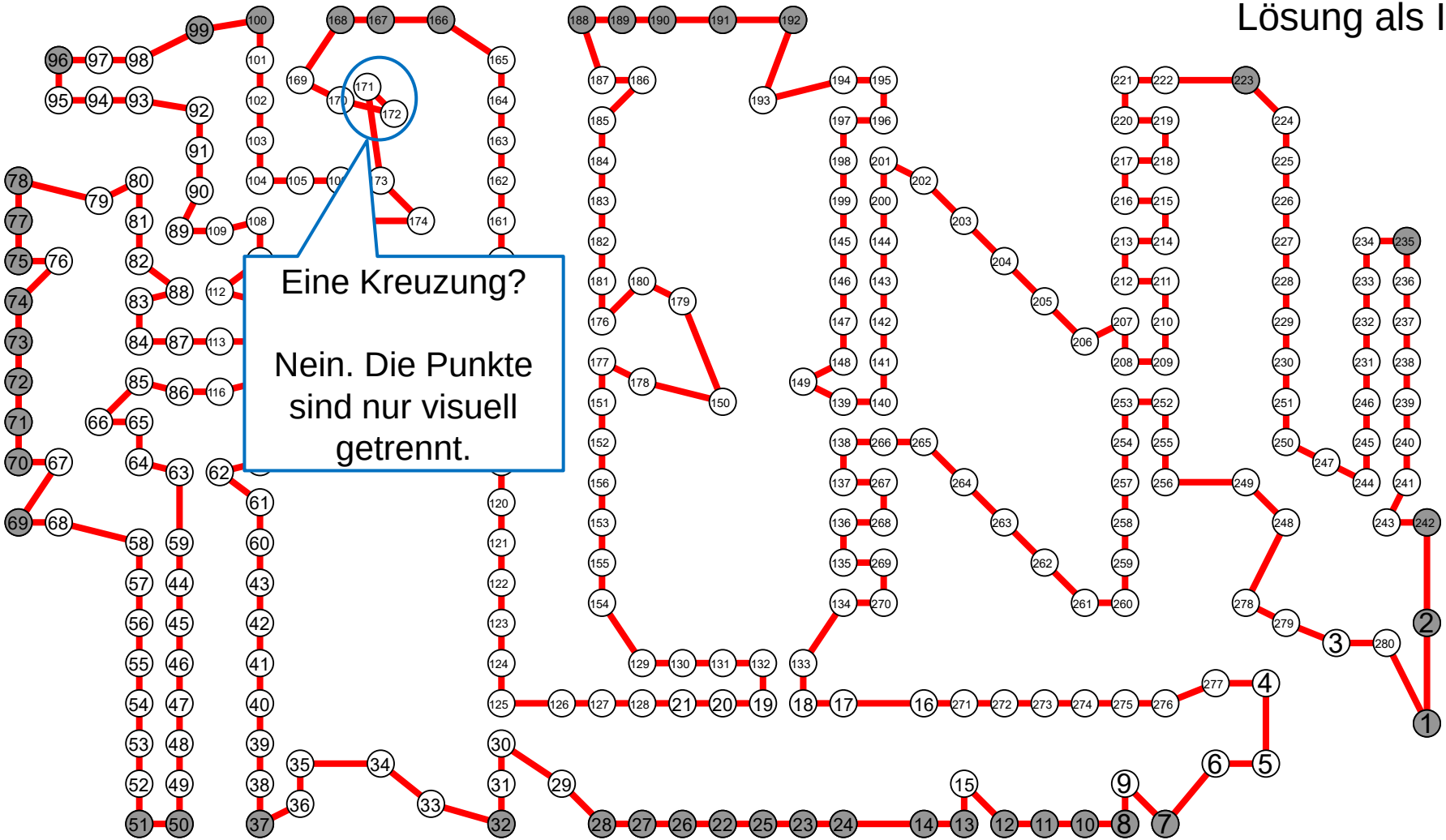

Lösung als LP


Lösung als LP

Lösung als IP

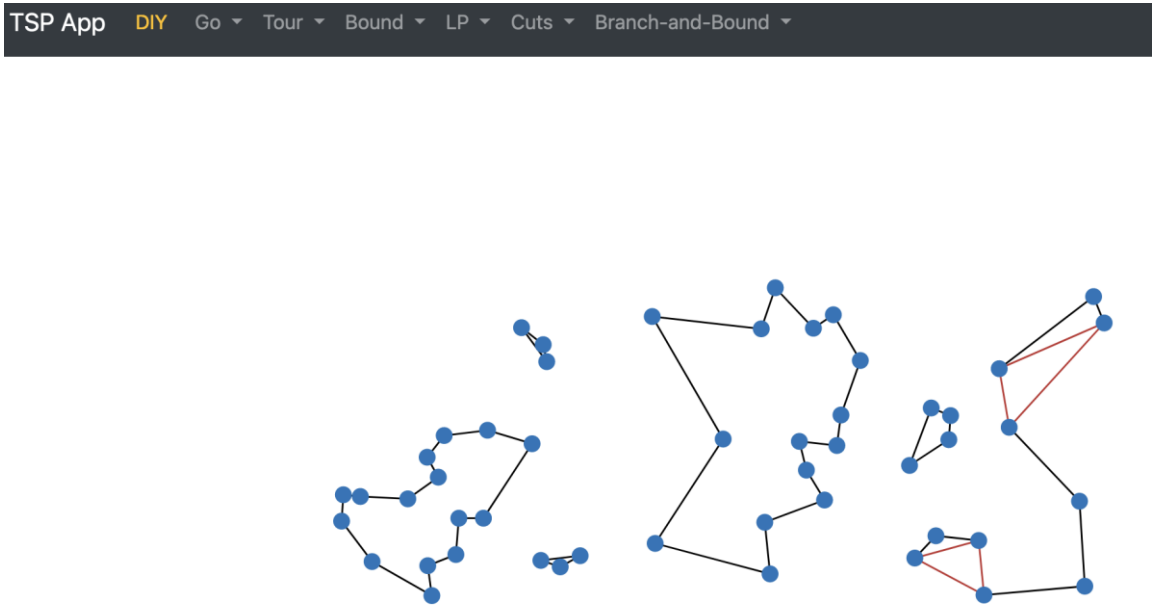


Lösung als IP



Interaktives Tool zum TSP

https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/app/diy.html



Interesse an mehr?

Mathematische Methoden der Algorithmik

Semester Winter 2022/2023

Programmes Business Information Systems Master, Computer and Communication Systems Engineering Master, Computer Science Master

IBR Group ALG (Prof. Fekete)

Type Lecture & Exercise

Lecturers

Dr. Phillip Keldenich
Wissenschaftlicher Mitarbeiter
keldenich@ibr.cs.tu-bs.de
+49 531 3913112
Room 318

Dr. Ahmad Moradi
Wissenschaftlicher Mitarbeiter
moradi@ibr.cs.tu-bs.de
+49 531 3913180
Room 315

Master-Veranstaltung

Algorithmikpraktikum: Solving NP-hard Problems in Practice

Semester Summer 2023

Programme Computer Science Bachelor

IBR Group ALG (Prof. Fekete)

Type Lecture & Exercise

Lecturer

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Abteilungsleiter
s.fekete@tu-bs.de
+49 531 3913111
Room 335

Assistant

Dr. Dominik Krupke
Wissenschaftlicher Mitarbeiter
krupke@ibr.cs.tu-bs.de
+49 531 3913116
Room 332

Bachelor/Master-Veranstaltung