Technische Universität Braunschweig

Algorithmen und Datenstrukturen 2 – Übung #5

Approximation: Greedy$_k$, Vertex Cover

Phillip Keldenich

28.06.2023

Heute

- Greedy$_k$
  - Beispiel
  - Worst-Case-Instanz
- Vertex Cover
  - Definition
  - Approximation

Approximationsalgorithmen

Wir haben ein Problem, das wir nicht immer effizient optimal lösen können

Idee (Approximationsalgorithmen): Verlange keine Optimalität!

- Wir wollen aber nicht ‘irgendwas’ machen (z.B. irgendeine Greedy-Heuristik)
- Wir wollen auch im schlimmsten Fall noch ‘relativ gut’ sein

Was heißt ‘relativ gut’?

- Konstanter Approximationsfaktor c (nicht von der Eingabe abhängig)
- Selbst auf der schlimmsten Instanz nicht weiter vom Optimum entfernt als Faktor c
- D.h. für Maximierungsprobleme $ALG(I) \geq c \cdot OPT(I)$ für alle Instanzen I
- Polynomielle Laufzeit ($O(n^k)$ für ein nicht von der Eingabe abhängiges k)

Entwurf eines Approximationsalgorithmus

Was müssen wir bei Entwurf/Beweis eines Approximationsalgorithmus bedenken?

- **Korrektheit**
  - Wie sonst auch beim Algorithmenentwurf
  - Grob gesagt: Wir finden immer korrekte Lösungen
  - Ist oft relativ einfach zu argumentieren
- **Polynomielle Laufzeit** ($O(n^k)$)
  - Ist oft auch nicht zu schwer
- **Approximationsfaktor**
  - Das ist in der Regel der schwierige Teil
  - Braucht Beweis, dass der Algorithmus *auf jeder Instanz* den Faktor einhält
  - Dabei benutzt man oft Abschätzungen und arbeitet mit Ungleichungen
  - Oft noch schwieriger, den exakten Faktor eines Algorithmus zu bestimmen

Greedy$_k$

Algorithmus GREEDY$_K$

1. Teste jede Teilmenge $\bar{S}$ mit $|\bar{S}| \leq k$
2. Fülle $\bar{S}$ mit Greedy$_0$ auf
3. Aktualisiere Lösung bei Bedarf

Laufzeit

→ $O(n^k)$ zu testende Teilmengen

→ $O(n)$ Zeit pro Teilmenge

→ $O(1)$

→ Insgesamt $O(n^{k+1})$

Warum nicht $O(n \log n)$?

Greedy$_k$ – Beispiel

i	1	2	3	4
$z_i = p_i$	13	11	10	8

$Z = 30, k = 2$

$\bar{S}$: Fixierte Menge

$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Menge

$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität

$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Menge + auffüllen

G_k, S : Bisher bester Lösungswert und Menge

Greedy_k – Beispiel

i	1	2	3	4
$z_i = p_i$	13	11	10	8

$Z = 30, k = 2$

$\bar{S}$: Fixierte Menge

$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Menge

$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität

$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Menge + auffüllen

G_k, S : Bisher bester Lösungswert und Menge

$\bar{S}$	$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$	G_k	S

Greedy_k – Beispiel

i	1	2	3	4
$z_i = p_i$	13	11	10	8

$Z = 30, k = 2$

$\bar{S}$: Fixierte Menge

$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Menge

$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität

$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Menge + auffüllen

G_k, S : Bisher bester Lösungswert und Menge

$\bar{S}$	$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$	G_k	S
$\emptyset$	0	30	24	24	$\{1,2\}$

Greedy$_k$ – Beispiel

i	1	2	3	4
$z_i = p_i$	13	11	10	8

$Z = 30, k = 2$

$\bar{S}$: Fixierte Menge

$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Menge

$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität

$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Menge + auffüllen

G_k, S : Bisher bester Lösungswert und Menge

$\bar{S}$	$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$	G_k	S
$\emptyset$	0	30	24	24	$\{1,2\}$
$\{1\}$	13	17	24	24	$\{1,2\}$

Greedy$_k$ – Beispiel

i	1	2	3	4
$z_i = p_i$	13	11	10	8

$Z = 30, k = 2$

$\bar{S}$: Fixierte Menge

$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Menge

$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität

$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Menge + auffüllen

G_k, S : Bisher bester Lösungswert und Menge

$\bar{S}$	$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$	G_k	S
$\emptyset$	0	30	24	24	$\{1,2\}$
$\{1\}$	13	17	24	24	$\{1,2\}$
$\{2\}$	11	19	24	24	$\{1,2\}$

Greedy$_k$ – Beispiel

i	1	2	3	4
$z_i = p_i$	13	11	10	8

$Z = 30, k = 2$

$\bar{S}$: Fixierte Menge

$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Menge

$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität

$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Menge + auffüllen

G_k, S : Bisher bester Lösungswert und Menge

$\bar{S}$	$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$	G_k	S
$\emptyset$	0	30	24	24	$\{1,2\}$
$\{1\}$	13	17	24	24	$\{1,2\}$
$\{2\}$	11	19	24	24	$\{1,2\}$
$\{3\}$	10	20	23	24	$\{1,2\}$

Greedy$_k$ – Beispiel

i	1	2	3	4
$z_i = p_i$	13	11	10	8

$Z = 30, k = 2$

$\bar{S}$: Fixierte Menge

$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Menge

$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität

$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Menge + auffüllen

G_k, S : Bisher bester Lösungswert und Menge

$\bar{S}$	$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$	G_k	S
$\emptyset$	0	30	24	24	{1,2}
{1}	13	17	24	24	{1,2}
{2}	11	19	24	24	{1,2}
{3}	10	20	23	24	{1,2}
{4}	8	22	21	24	{1,2}

Greedy$_k$ – Beispiel

i	1	2	3	4
$z_i = p_i$	13	11	10	8

$Z = 30, k = 2$

$\bar{S}$: Fixierte Menge

$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Menge

$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität

$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Menge + auffüllen

G_k, S : Bisher bester Lösungswert und Menge

$\bar{S}$	$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$	G_k	S
$\emptyset$	0	30	24	24	{1,2}
{1}	13	17	24	24	{1,2}
{2}	11	19	24	24	{1,2}
{3}	10	20	23	24	{1,2}
{4}	8	22	21	24	{1,2}
{1,2}	24	6	24	24	{1,2}

Greedy$_k$ – Beispiel

i	1	2	3	4
$z_i = p_i$	13	11	10	8

$Z = 30, k = 2$

$\bar{S}$: Fixierte Menge

$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Menge

$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität

$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Menge + auffüllen

G_k, S : Bisher bester Lösungswert und Menge

$\bar{S}$	$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$	G_k	S
$\emptyset$	0	30	24	24	{1,2}
{1}	13	17	24	24	{1,2}
{2}	11	19	24	24	{1,2}
{3}	10	20	23	24	{1,2}
{4}	8	22	21	24	{1,2}
{1,2}	24	6	24	24	{1,2}
{1,3}	23	7	23	24	{1,2}

Greedy$_k$ – Beispiel

i	1	2	3	4
$z_i = p_i$	13	11	10	8

$Z = 30, k = 2$

$\bar{S}$: Fixierte Menge

$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Menge

$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität

$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Menge + auffüllen

G_k, S : Bisher bester Lösungswert und Menge

$\bar{S}$	$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$	G_k	S
$\emptyset$	0	30	24	24	{1,2}
{1}	13	17	24	24	{1,2}
{2}	11	19	24	24	{1,2}
{3}	10	20	23	24	{1,2}
{4}	8	22	21	24	{1,2}
{1,2}	24	6	24	24	{1,2}
{1,3}	23	7	23	24	{1,2}
{1,4}	21	9	21	24	{1,2}

Greedy$_k$ – Beispiel

i	1	2	3	4
$z_i = p_i$	13	11	10	8

$Z = 30, k = 2$

$\bar{S}$: Fixierte Menge

$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Menge

$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität

$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Menge + auffüllen

G_k, S : Bisher bester Lösungswert und Menge

$\bar{S}$	$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$	G_k	S
$\emptyset$	0	30	24	24	{1,2}
{1}	13	17	24	24	{1,2}
{2}	11	19	24	24	{1,2}
{3}	10	20	23	24	{1,2}
{4}	8	22	21	24	{1,2}
{1,2}	24	6	24	24	{1,2}
{1,3}	23	7	23	24	{1,2}
{1,4}	21	9	21	24	{1,2}
{2,3}	21	9	29	29	{2,3,4}

Greedy$_k$ – Beispiel

i	1	2	3	4
$z_i = p_i$	13	11	10	8

$Z = 30, k = 2$

$\bar{S}$: Fixierte Menge

$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Menge

$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität

$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Menge + auffüllen

G_k, S : Bisher bester Lösungswert und Menge

$\bar{S}$	$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$	G_k	S
$\emptyset$	0	30	24	24	{1,2}
{1}	13	17	24	24	{1,2}
{2}	11	19	24	24	{1,2}
{3}	10	20	23	24	{1,2}
{4}	8	22	21	24	{1,2}
{1,2}	24	6	24	24	{1,2}
{1,3}	23	7	23	24	{1,2}
{1,4}	21	9	21	24	{1,2}
{2,3}	21	9	29	29	{2,3,4}
{2,4}	19	11	29	29	{2,3,4}

Greedy$_k$ – Beispiel

i	1	2	3	4
$z_i = p_i$	13	11	10	8

$Z = 30, k = 2$

$\bar{S}$: Fixierte Menge

$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Gewicht der fixierten Menge

$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$: Restkapazität

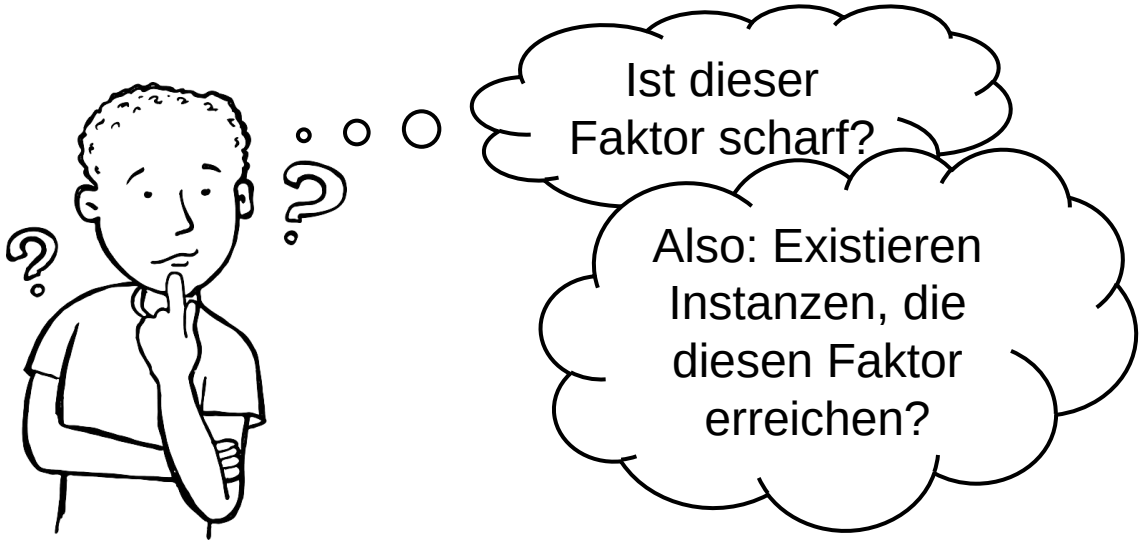
$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$: Wert der fixierten Menge + auffüllen

G_k, S : Bisher bester Lösungswert und Menge

$\bar{S}$	$\sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$Z - \sum_{i \in \bar{S}} z_i$	$G + \sum_{i \in \bar{S}} p_i$	G_k	S
$\emptyset$	0	30	24	24	{1,2}
{1}	13	17	24	24	{1,2}
{2}	11	19	24	24	{1,2}
{3}	10	20	23	24	{1,2}
{4}	8	22	21	24	{1,2}
{1,2}	24	6	24	24	{1,2}
{1,3}	23	7	23	24	{1,2}
{1,4}	21	9	21	24	{1,2}
{2,3}	21	9	29	29	{2,3,4}
{2,4}	19	11	29	29	{2,3,4}
{3,4}	18	12	29	29	{2,3,4}

Greedy$_k$

Satz: Greedy$_k$ ist eine $\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$-Approximation



Greedy$_k$

Satz: Der Approximationsfaktor $\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ für Greedy$_k$ ist scharf.

Beweis

Für ein $N \in \mathbb{N}$ wählen wir $Z = N \cdot (k+1)$, sowie
$p_1 = \cdots = p_{k+1} = z_1 = \cdots = z_{k+1} = N$ und $p_{k+2} = 2,\ z_{k+2} = 1$.

Lösung von Greedy$_k$

1. Falls $k+2 \in \bar{S}$: Es kommen k Objekte mit $p_i = z_i = N$ hinzu. ⇒ Wert $kN + 2$
2. Falls $k+2 \notin \bar{S}$:
   1. Es sind $\leq k$ Objekte mit $p_i = z_i = N$ fixiert.
   2. Greedy$_0$ packt Objekt $k+2$ hinzu und füllt mit anderen auf. ⇒ Wert $kN + 2$

Greedy$_k$ liefert Wert $kN + 2$

Greedy$_k$

Satz: Der Approximationsfaktor $\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ für Greedy$_k$ ist scharf.

Beweis

Für ein $N \in \mathbb{N}$ wählen wir $Z = N \cdot (k+1)$, sowie
$p_1 = \cdots = p_{k+1} = z_1 = \cdots = z_{k+1} = N$ und $p_{k+2} = 2,\ z_{k+2} = 1$.

Greedy$_k$ liefert Wert $kN + 2$

Optimale Lösung

Nimm Objekte 1 bis $k+1$ auf. ⇒ Wert $N \cdot (k+1)$

Optimum hat Wert $N \cdot (k+1)$

Greedy$_k$

Satz: Der Approximationsfaktor $\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ für Greedy$_k$ ist scharf.

Beweis

Für ein $N \in \mathbb{N}$ wählen wir $Z = N(k+1)$, sowie
$p_1 = \cdots = p_{k+1} = z_1 = \cdots = z_{k+1} = N$ und $p_{k+2} = 2,\ z_{k+2} = 1$.

Greedy$_k$ liefert Wert $kN + 2$

Optimum hat Wert $N \cdot (k+1)$

Damit ist:

$$\frac{ALG}{OPT} = \frac{kN+2}{N\cdot(k+1)} = \frac{kN}{N\cdot(k+1)} + \frac{2}{N\cdot(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1} + \underbrace{\frac{2}{N\cdot(k+1)}}_{\to 0 \text{ für } N \to \infty}$$

Fragen?

Vertex Cover

Vertex Cover

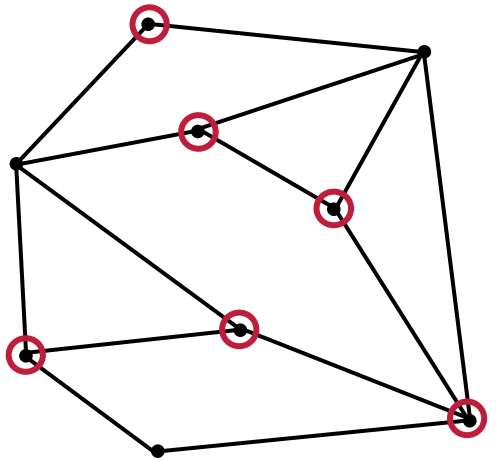
Gegeben

- Graph $G = (V, E)$
- Zahl $k \in \mathbb{N}$

Frage

- Existiert eine Menge $VC \subseteq V$ mit $|VC| \leq k$, sodass für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt:
  $u \in VC$ oder $v \in VC$?

Als Optimierungsproblem: Such die kleinste Zahl k.



Vertex Cover

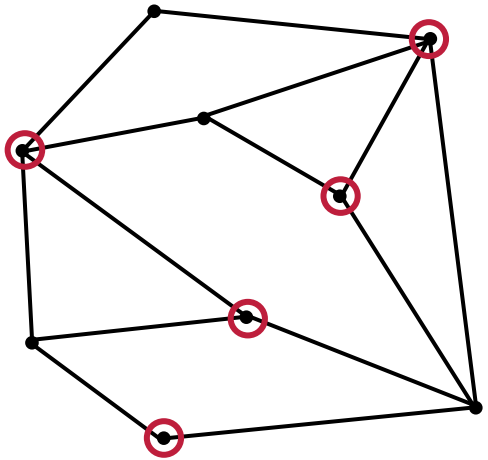
Gegeben

- Graph $G = (V, E)$
- Zahl $k \in \mathbb{N}$

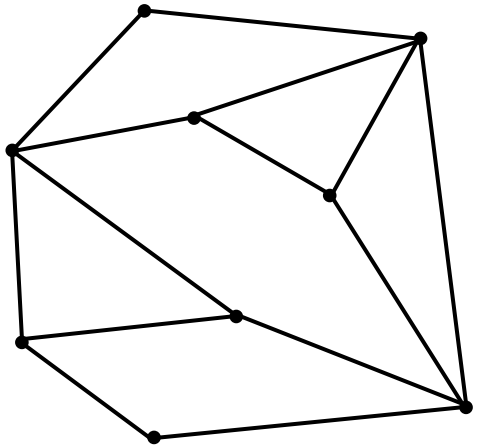
Frage

- Existiert eine Menge $VC \subseteq V$ mit $|VC| \leq k$, sodass für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt:
  $u \in VC$ oder $v \in VC$?

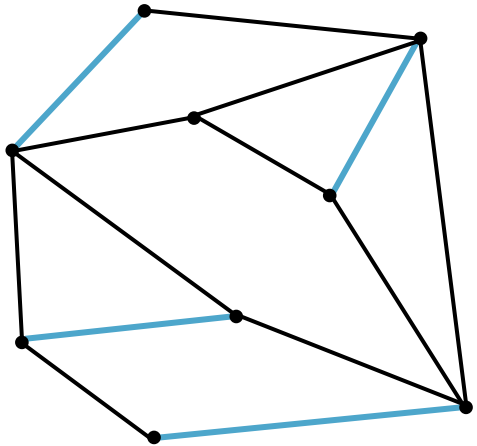
Als Optimierungsproblem: Such die kleinste Zahl k.



Schranken



Schranken

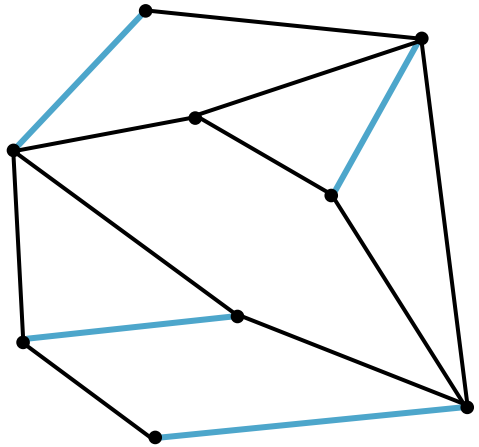


Schranken

Beobachtungen

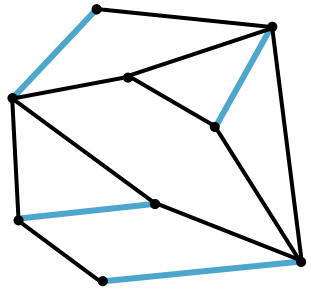
Für jede blaue Kante benötigen wir mind. einen adjazenten Knoten in VC!

Nehmen wir beide Knoten in VC auf, erhalten wir ein Vertex Cover



Matching

Gegeben	Gesucht
Graph $G = (V, E)$	Eine Menge von Kanten, die sich paarweise keinen Knoten teilen.



Ein Matching M ist *inklusionsmaximal*, wenn es keine Kante $e \notin M$ gibt, sodass $M \cup \{e\}$ ein Matching ist.

Engl.: maximal

Ein Matching M ist *kardinalitätsmaximal*, wenn es kein Matching M' gibt, sodass $|M| < |M'|$ gilt.

Engl.: maximum

Vertex Cover und Matchings

Satz: Sei VC_{opt} ein kleinstes Vertex Cover und M ein inklusionsmaximales Matching. Dann gilt:

$$|M| \leq VC_{opt} \leq 2|M|$$

Für jede Kante $\{u, v\} \in M$ muss u oder v in VC_{opt} enthalten sein.

$$\Rightarrow |M| \leq VC_{opt}$$

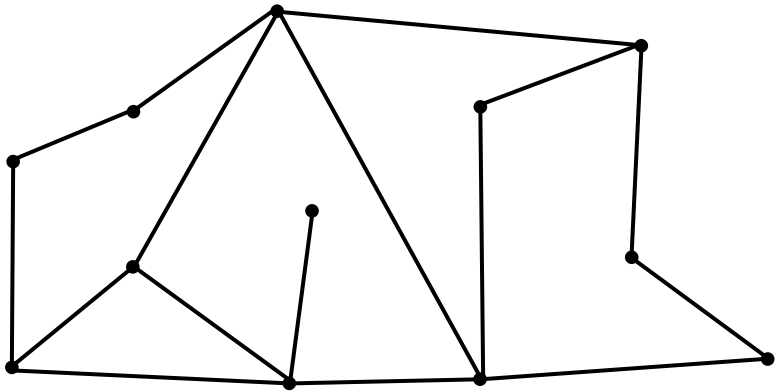
Betrachte nun $VC' = \bigcup_{\{u,v\} \in M} \{u, v\}$.
Annahme: VC' ist kein Vertex Cover
Dann existiert eine Kante $\{u', v'\}$ mit $u', v' \notin VC'$.
Damit kann M mit $\{u', v'\}$ erweitert werden. Widerspruch, dass M inklusionsmaximal ist.

$$\Rightarrow 2|M| \geq |VC'| \geq \left|VC_{opt}\right|$$

Vertex Cover und Matchings

Korollar: Es existiert eine 2-Approximation für die Optimierungsvariante von Vertex Cover.

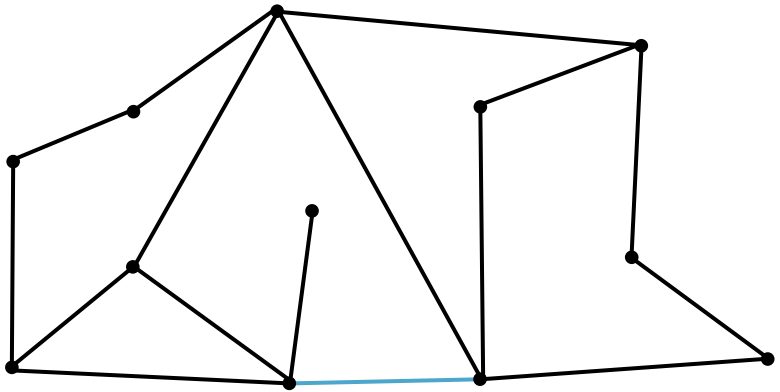
$VC \coloneqq \emptyset$
for each $\{u, v\} \in E$ **do**
  if $u \notin VC$ und $v \notin VC$ **then**
    $VC \coloneqq VC \cup \{u, v\}$
return VC



Vertex Cover und Matchings

Korollar: Es existiert eine 2-Approximation für die Optimierungsvariante von Vertex Cover.

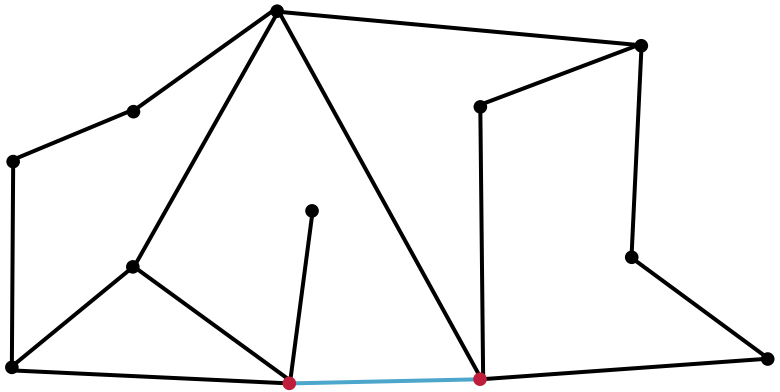
$VC \coloneqq \emptyset$
for each $\{u, v\} \in E$ **do**
  if $u \notin VC$ und $v \notin VC$ **then**
    $VC \coloneqq VC \cup \{u, v\}$
return VC



Vertex Cover und Matchings

Korollar: Es existiert eine 2-Approximation für die Optimierungsvariante von Vertex Cover.

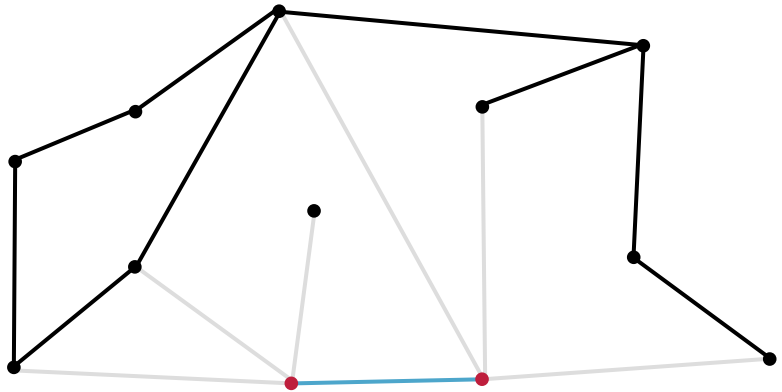
$VC \coloneqq \emptyset$
for each $\{u, v\} \in E$ **do**
  if $u \notin VC$ und $v \notin VC$ **then**
    $VC \coloneqq VC \cup \{u, v\}$
return VC



Vertex Cover und Matchings

Korollar: Es existiert eine 2-Approximation für die Optimierungsvariante von Vertex Cover.

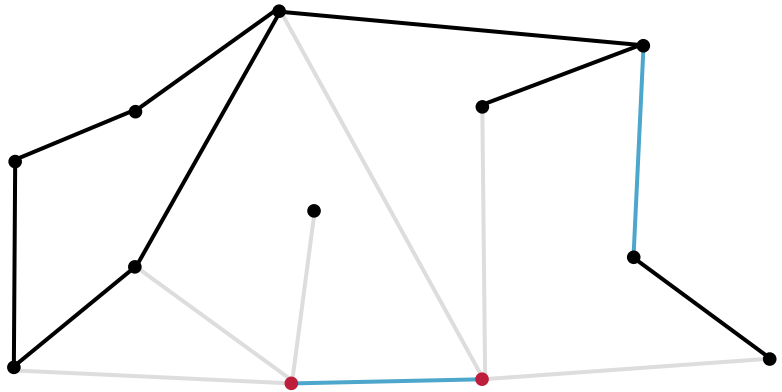
$VC \coloneqq \emptyset$
for each $\{u, v\} \in E$ **do**
  if $u \notin VC$ und $v \notin VC$ **then**
    $VC \coloneqq VC \cup \{u, v\}$
return VC



Vertex Cover und Matchings

Korollar: Es existiert eine 2-Approximation für die Optimierungsvariante von Vertex Cover.

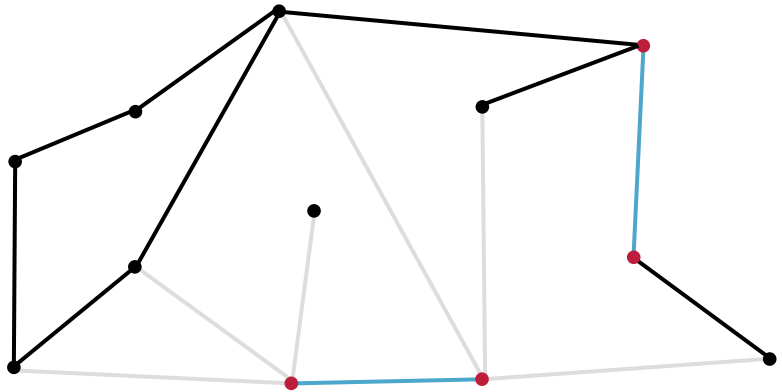
$VC \coloneqq \emptyset$
for each $\{u, v\} \in E$ **do**
  if $u \notin VC$ und $v \notin VC$ **then**
    $VC \coloneqq VC \cup \{u, v\}$
return VC



Vertex Cover und Matchings

Korollar: Es existiert eine 2-Approximation für die Optimierungsvariante von Vertex Cover.

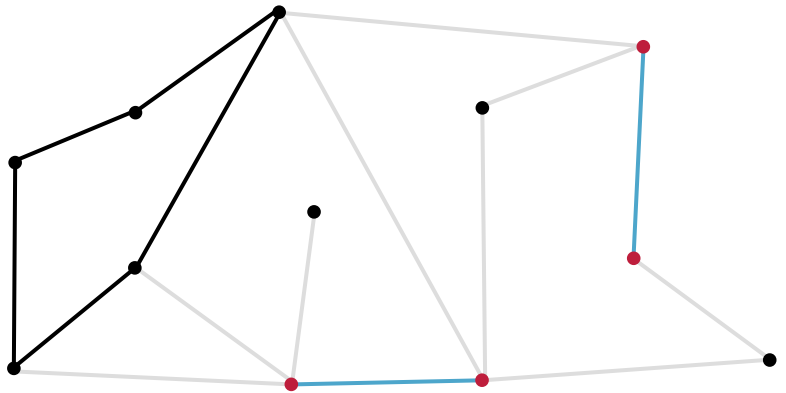
$VC \coloneqq \emptyset$
for each $\{u, v\} \in E$ **do**
  if $u \notin VC$ und $v \notin VC$ **then**
    $VC \coloneqq VC \cup \{u, v\}$
return VC



Vertex Cover und Matchings

Korollar: Es existiert eine 2-Approximation für die Optimierungsvariante von Vertex Cover.

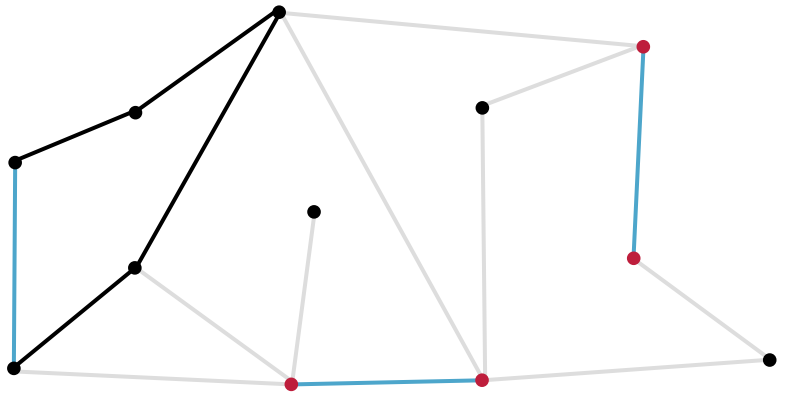
$VC \coloneqq \emptyset$
for each $\{u, v\} \in E$ **do**
  if $u \notin VC$ und $v \notin VC$ **then**
    $VC \coloneqq VC \cup \{u, v\}$
return VC



Vertex Cover und Matchings

Korollar: Es existiert eine 2-Approximation für die Optimierungsvariante von Vertex Cover.

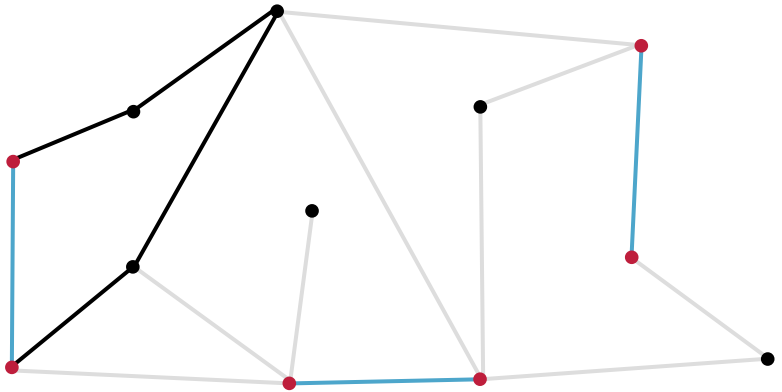
$VC \coloneqq \emptyset$
for each $\{u, v\} \in E$ **do**
  if $u \notin VC$ und $v \notin VC$ **then**
    $VC \coloneqq VC \cup \{u, v\}$
return VC



Vertex Cover und Matchings

Korollar: Es existiert eine 2-Approximation für die Optimierungsvariante von Vertex Cover.

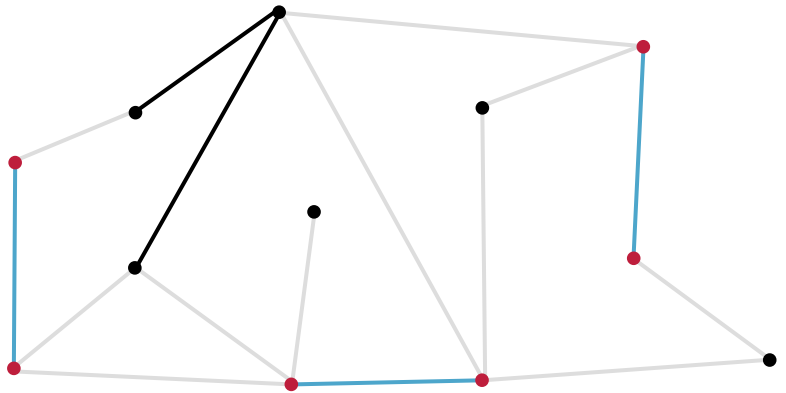
$VC \coloneqq \emptyset$
for each $\{u, v\} \in E$ **do**
  if $u \notin VC$ und $v \notin VC$ **then**
    $VC \coloneqq VC \cup \{u, v\}$
return VC



Vertex Cover und Matchings

Korollar: Es existiert eine 2-Approximation für die Optimierungsvariante von Vertex Cover.

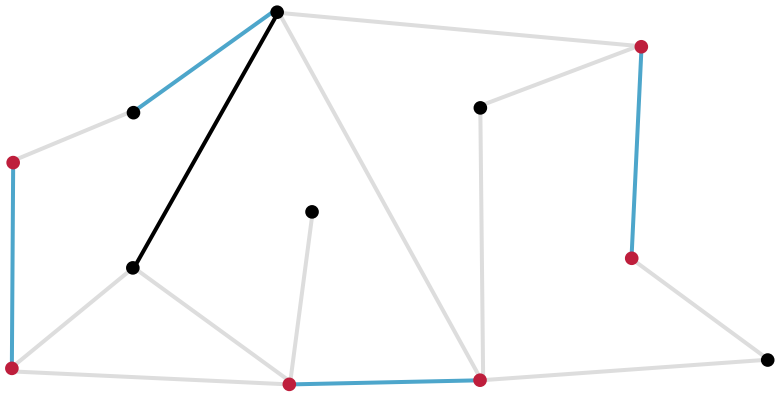
$VC \coloneqq \emptyset$
for each $\{u, v\} \in E$ **do**
  if $u \notin VC$ und $v \notin VC$ **then**
    $VC \coloneqq VC \cup \{u, v\}$
return VC



Vertex Cover und Matchings

Korollar: Es existiert eine 2-Approximation für die Optimierungsvariante von Vertex Cover.

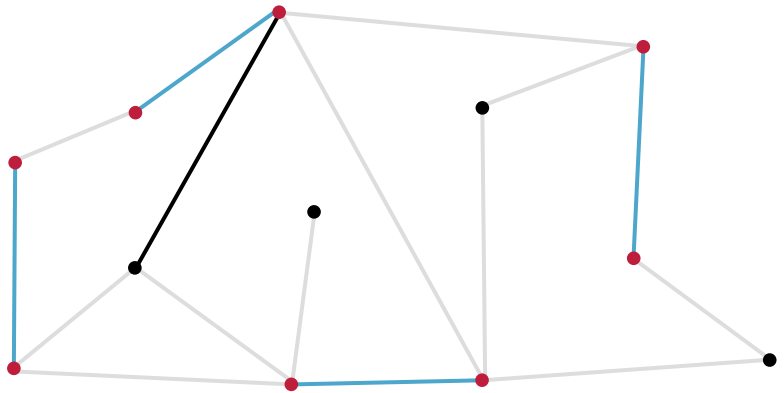
$VC \coloneqq \emptyset$
for each $\{u, v\} \in E$ **do**
  if $u \notin VC$ und $v \notin VC$ **then**
    $VC \coloneqq VC \cup \{u, v\}$
return VC



Vertex Cover und Matchings

Korollar: Es existiert eine 2-Approximation für die Optimierungsvariante von Vertex Cover.

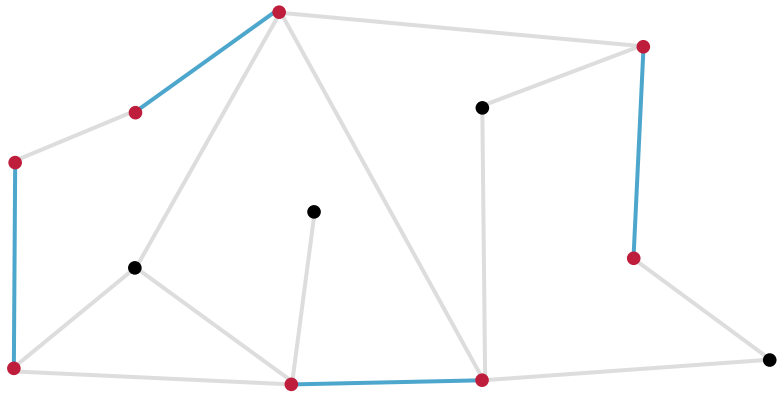
$VC \coloneqq \emptyset$
for each $\{u, v\} \in E$ **do**
  if $u \notin VC$ und $v \notin VC$ **then**
    $VC \coloneqq VC \cup \{u, v\}$
return VC



Vertex Cover und Matchings

Korollar: Es existiert eine 2-Approximation für die Optimierungsvariante von Vertex Cover.

$VC \coloneqq \emptyset$
for each $\{u, v\} \in E$ **do**
  if $u \notin VC$ und $v \notin VC$ **then**
    $VC \coloneqq VC \cup \{u, v\}$
return VC

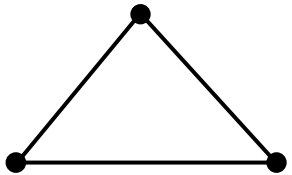


Optimale Vertex Cover

Für spezielle Graphen kann man kleinste Vertex Cover effizient bestimmen.

Welche?

Vollständige Graphen

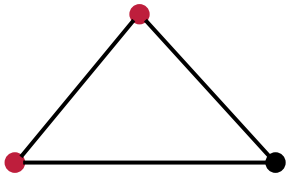


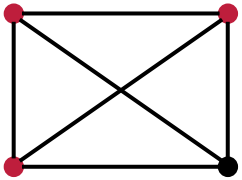
Optimale Vertex Cover

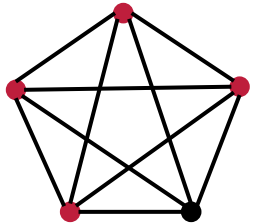
Für spezielle Graphen kann man kleinste Vertex Cover effizient bestimmen.

Welche?

Vollständige Graphen







$$|VC| = n - 1$$

Optimale Vertex Cover

Für spezielle Graphen kann man kleinste Vertex Cover effizient bestimmen.

Welche?

Vollständige Graphen

$|VC| = n - 1$

Pfad Graphen

Optimale Vertex Cover

Für spezielle Graphen kann man kleinste Vertex Cover effizient bestimmen.

Welche?

Vollständige Graphen

$|VC| = n - 1$

Pfad Graphen

$$|VC| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Optimale Vertex Cover

Für spezielle Graphen kann man kleinste Vertex Cover effizient bestimmen.

Welche?

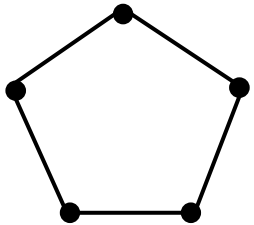
Vollständige Graphen

$$|VC| = n - 1$$

Pfad Graphen

$$|VC| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Kreis Graphen



Optimale Vertex Cover

Für spezielle Graphen kann man kleinste Vertex Cover effizient bestimmen.

Welche?

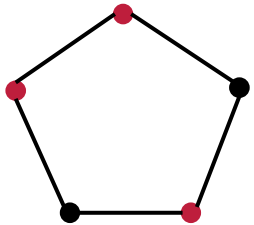
Vollständige Graphen

$|VC| = n - 1$

Pfad Graphen

$|VC| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

Kreis Graphen



$|VC| = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Optimale Vertex Cover

Für spezielle Graphen kann man kleinste Vertex Cover effizient bestimmen.

Welche?

Vollständige Graphen

$|VC| = n - 1$

Pfad Graphen

$|VC| = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Kreis Graphen

$|VC| = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Baum Graphen

$O(n)$ Algorithmus

Intervall Graphen

$O(n \log n)$ Algorithmus

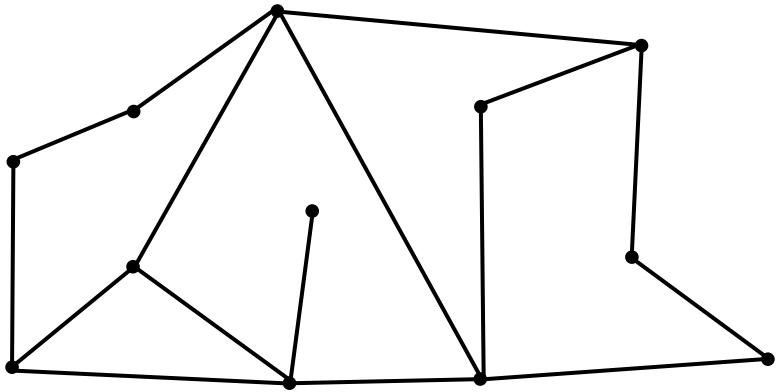
Schranken Vertex Cover

Vollständige Graphen

Pfad Graphen

Kreis Graphen

Teile Graph in einfache, unabhängige Teilgraphen!



$$8 \geq |VC| \geq 2 + 1 + 3 = 6$$

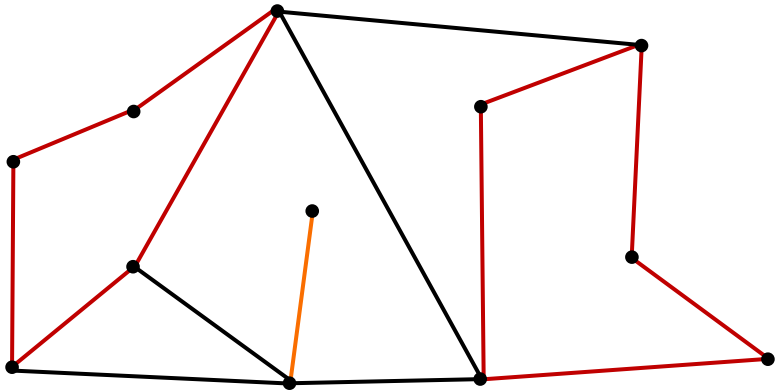
Wie groß ist ein kleinstes Vertex Cover? 6, 7 oder 8?

Schranken Vertex Cover

Vollständige Graphen

Pfad Graphen

Kreis Graphen



$$8 \geq |VC| \geq 1 + 6 = 7$$

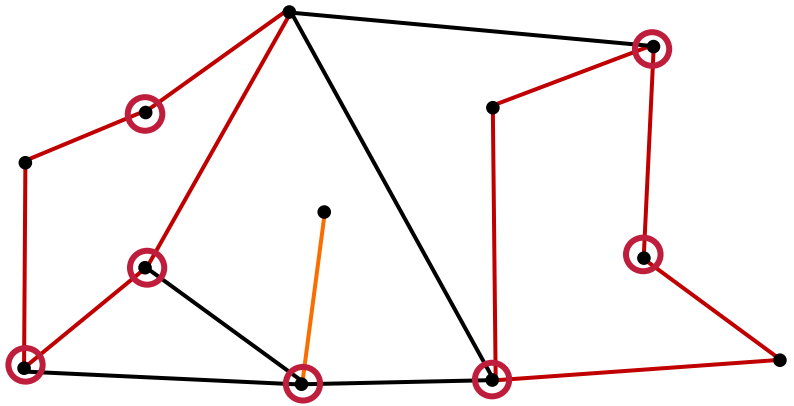
Wie groß ist ein kleinstes Vertex Cover? ~~6~~, 7 oder 8?

Schranken Vertex Cover

Vollständige Graphen

Pfad Graphen

Kreis Graphen



$$7 \geq |VC| \geq 1 + 6 = 7$$

Wie groß ist ein kleinstes Vertex Cover? ~~6~~, 7 oder ~~8~~?

Fragen?