Technische Universität Braunschweig

Algorithmen und Datenstrukturen – Übung #7

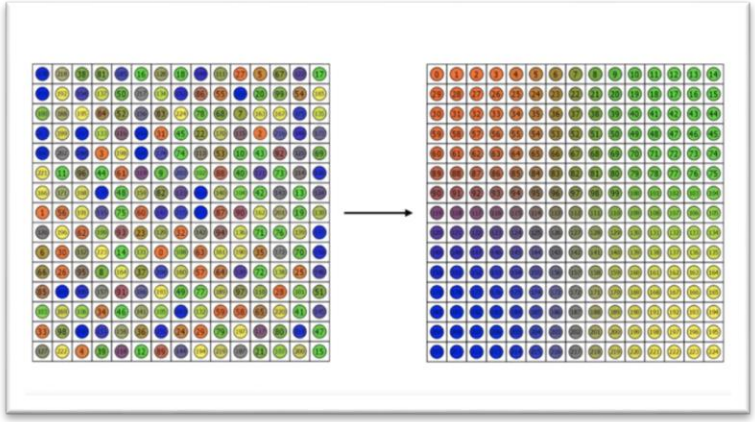
Sortieren, Mediane, kd-Bäume

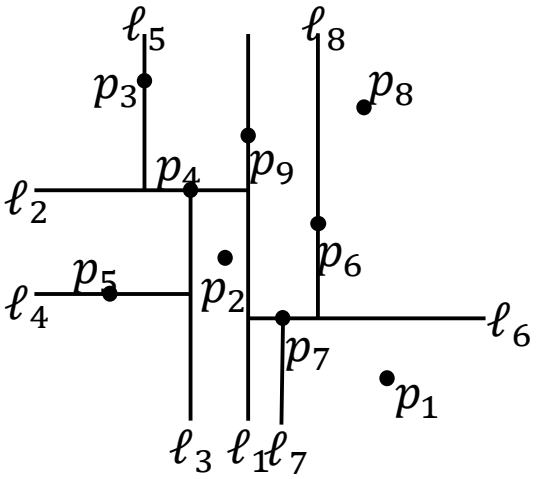
Christian Rieck, Arne Schmidt

31.01.2019

Heute

- Bubblesort
- Odd-Even-Sort
- Robot-Motion-Planning
- Mediane
  - Algorithmus
  - Laufzeit
- kd-Trees





Bisherige Sortierverfahren

Algorithmus	Laufzeit	Idee
Mergesort	$O(n \log n)$	Löse Teilarrays und merge sie. Beginne mit kleinstem Teilarray (z.B. der Größe 1)
Quicksort	$O(n^2)$	Pivotisiere und sortiere rekursiv auf beiden Teilarrays weiter.
Selection	$O(n^2)$	Setze das i-t kleinste Element in der i-ten Iteration an die i-te Stelle
Insertion	$O(n^2)$	Setze das i-te Element des Arrays in $A[1] \dots A[i]$ an die richtige Stelle.
Radixsort	$O(nd)$	Sortiere Zahlen iterativ nach den d Ziffern.

Bubblesort

Idee: Lasse Zahlen wie Blasen aufsteigen. Größere Blasen verdrängen kleinere.

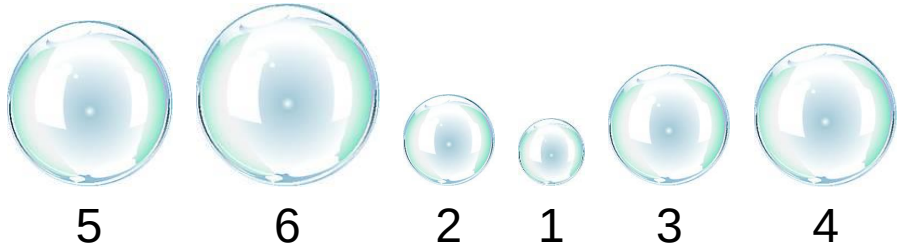
Formal:

For $i = 0$ to $n - 1$ do

  For j $= 0$ to $n - i - 1$ do

    if $(A[j] > A[j + 1])$ then

      vertausche $A[j]$ und $A[j + 1]$



Laufzeit: $O(n^2)$

Man kann zeigen:

Jeder Algorithmus, der nur benachbarte Felder vertauscht, benötigt $\Omega(n^2)$ Zeit

Bubblesort

Idee: Lasse Zahlen wie Blasen aufsteigen. Größere Blasen verdrängen kleinere.

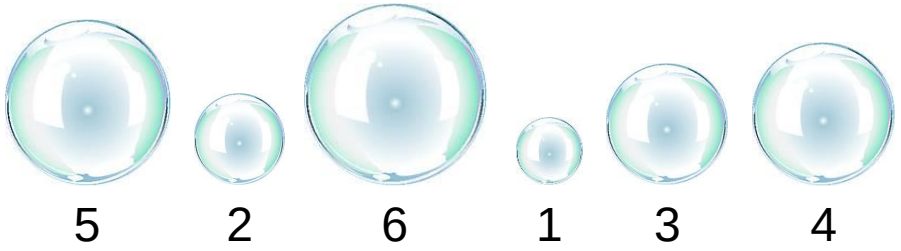
Formal:

For $i = 0$ to $n - 1$ do

  For j $= 0$ to $n - i - 1$ do

    if $(A[j] > A[j + 1])$ then

      vertausche $A[j]$ und $A[j + 1]$



Laufzeit: $O(n^2)$

Man kann zeigen:

Jeder Algorithmus, der nur benachbarte Felder vertauscht, benötigt $\Omega(n^2)$ Zeit

Bubblesort

Idee: Lasse Zahlen wie Blasen aufsteigen. Größere Blasen verdrängen kleinere.

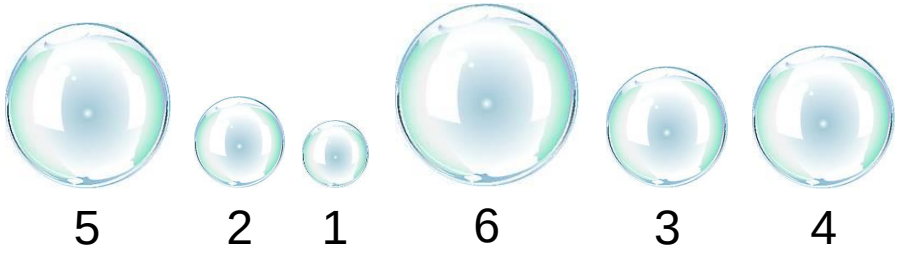
Formal:

For $i = 0$ to $n - 1$ do

  For j $= 0$ to $n - i - 1$ do

    if $(A[j] > A[j + 1])$ then

      vertausche $A[j]$ und $A[j + 1]$



Laufzeit: $O(n^2)$

Man kann zeigen:

Jeder Algorithmus, der nur benachbarte Felder vertauscht, benötigt $\Omega(n^2)$ Zeit

Bubblesort

Idee: Lasse Zahlen wie Blasen aufsteigen. Größere Blasen verdrängen kleinere.

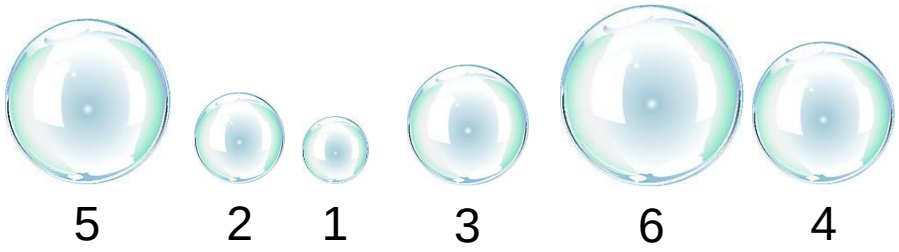
Formal:

For $i = 0$ to $n - 1$ do

  For j $= 0$ to $n - i - 1$ do

    if $(A[j] > A[j + 1])$ then

      vertausche $A[j]$ und $A[j + 1]$



Laufzeit: $O(n^2)$

Man kann zeigen:

Jeder Algorithmus, der nur benachbarte Felder vertauscht, benötigt $\Omega(n^2)$ Zeit

Bubblesort

Idee: Lasse Zahlen wie Blasen aufsteigen. Größere Blasen verdrängen kleinere.

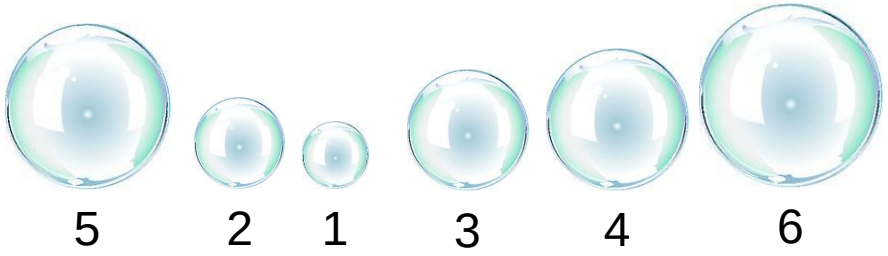
Formal:

For $i = 0$ to $n - 1$ do

  For j $= 0$ to $n - i - 1$ do

    if $(A[j] > A[j + 1])$ then

      vertausche $A[j]$ und $A[j + 1]$



Laufzeit: $O(n^2)$

Man kann zeigen:

Jeder Algorithmus, der nur benachbarte Felder vertauscht, benötigt $\Omega(n^2)$ Zeit

Bubblesort

Idee: Lasse Zahlen wie Blasen aufsteigen. Größere Blasen verdrängen kleinere.

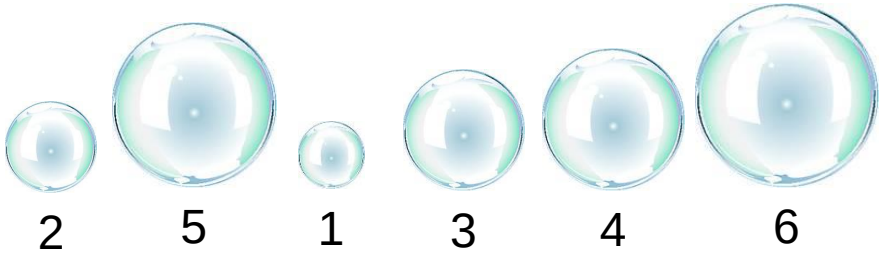
Formal:

For $i = 0$ to $n - 1$ do

  For j $= 0$ to $n - i - 1$ do

    if $(A[j] > A[j+1])$ then

      vertausche $A[j]$ und $A[j+1]$



Laufzeit: $O(n^2)$

Man kann zeigen:

Jeder Algorithmus, der nur benachbarte Felder vertauscht, benötigt $\Omega(n^2)$ Zeit

Bubblesort

Idee: Lasse Zahlen wie Blasen aufsteigen. Größere Blasen verdrängen kleinere.

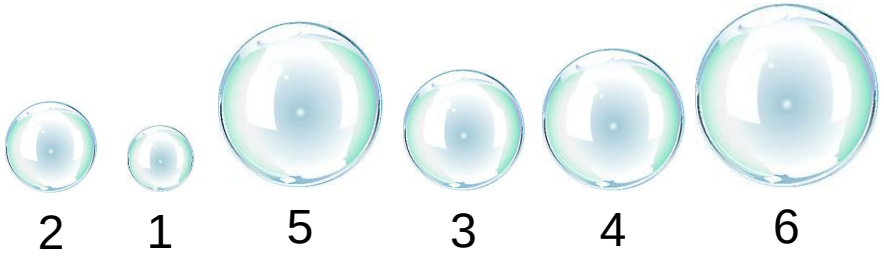
Formal:

For $i = 0$ to $n - 1$ do

  For j $= 0$ to $n - i - 1$ do

    if $(A[j] > A[j+1])$ then

      vertausche $A[j]$ und $A[j+1]$



Laufzeit: $O(n^2)$

Man kann zeigen:

Jeder Algorithmus, der nur benachbarte Felder vertauscht, benötigt $\Omega(n^2)$ Zeit

Bubblesort

Idee: Lasse Zahlen wie Blasen aufsteigen. Größere Blasen verdrängen kleinere.

Formal:

For $i = 0$ to $n - 1$ do

  For j $= 0$ to $n - i - 1$ do

    if $(A[j] > A[j+1])$ then

      vertausche $A[j]$ und $A[j+1]$

Laufzeit: $O(n^2)$

Man kann zeigen:

Jeder Algorithmus, der nur benachbarte Felder vertauscht, benötigt $\Omega(n^2)$ Zeit

Bubblesort

Idee: Lasse Zahlen wie Blasen aufsteigen. Größere Blasen verdrängen kleinere.

Formal:

For $i = 0$ to $n - 1$ do

  For j $= 0$ to $n - i - 1$ do

    if $(A[j] > A[j+1])$ then

      vertausche $A[j]$ und $A[j+1]$

Laufzeit: $O(n^2)$

Man kann zeigen:

Jeder Algorithmus, der nur benachbarte Felder vertauscht, benötigt $\Omega(n^2)$ Zeit

Bubblesort

Idee: Lasse Zahlen wie Blasen aufsteigen. Größere Blasen verdrängen kleinere.

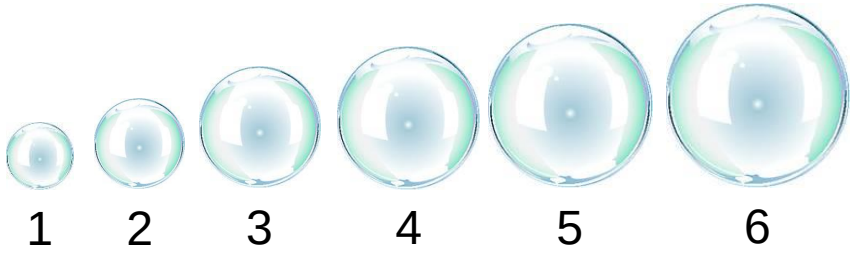
Formal:

For $i = 0$ to $n - 1$ do

  For j $= 0$ to $n - i - 1$ do

    if $(A[j] > A[j + 1])$ then

      vertausche $A[j]$ und $A[j + 1]$



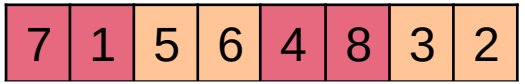
Laufzeit: $O(n^2)$

Man kann zeigen:

Jeder Algorithmus, der nur benachbarte Felder vertauscht, benötigt $\Omega(n^2)$ Zeit

Odd-Even-Sort

Szenario: Wir besitzen n Roboter, die nach ihren IDs sortiert werden sollen.
Vorteil: Das können die Roboter unter sich ausführen!



Idee: Parallelisiere Bubblesort, d.h. vertausche nicht nur ein Paar von Zahlen, sondern bis zu n Zahlen.

1. For $i = 1$ to n do
2. Betrachte alle $A[j]$ mit j ungerade.
3. Tausche $A[j]$ mit $A[j+1]$, falls $A[j] > A[j+1]$.
4. Wiederhole 2.+ 3. für j gerade.

Laufzeit: $O(n)$

Odd-Even-Sort

Szenario: Wir besitzen n Roboter, die nach ihren IDs sortiert werden sollen.
Vorteil: Das können die Roboter unter sich ausführen!

7	1	5	6	4	8	3	2
1	7	5	6	4	8	2	3

Idee: Parallelisiere Bubblesort, d.h. vertausche nicht nur ein Paar von Zahlen, sondern bis zu n Zahlen.

1. For $i = 1$ to n do
2. Betrachte alle $A[j]$ mit j ungerade.
3. Tausche $A[j]$ mit $A[j+1]$, falls $A[j] > A[j+1]$.
4. Wiederhole 2.+ 3. für j gerade.

Laufzeit: $O(n)$

Odd-Even-Sort

Szenario: Wir besitzen n Roboter, die nach ihren IDs sortiert werden sollen.
Vorteil: Das können die Roboter unter sich ausführen!

7	1	5	6	4	8	3	2
1	7	5	6	4	8	2	3
1	5	7	4	6	2	8	3

Idee: Parallelisiere Bubblesort, d.h. vertausche nicht nur ein Paar von Zahlen, sondern bis zu n Zahlen.

1. For $i = 1$ to n do
2. Betrachte alle $A[j]$ mit j ungerade.
3. Tausche $A[j]$ mit $A[j+1]$, falls $A[j] > A[j+1]$.
4. Wiederhole 2.+ 3. für j gerade.

Laufzeit: $O(n)$

Odd-Even-Sort

Szenario: Wir besitzen n Roboter, die nach ihren IDs sortiert werden sollen.
Vorteil: Das können die Roboter unter sich ausführen!

7	1	5	6	4	8	3	2
1	7	5	6	4	8	2	3
1	5	7	4	6	2	8	3
1	5	4	7	2	6	3	8

Idee: Parallelisiere Bubblesort, d.h. vertausche nicht nur ein Paar von Zahlen, sondern bis zu n Zahlen.

1. For $i = 1$ to n do
2. Betrachte alle $A[j]$ mit j ungerade.
3. Tausche $A[j]$ mit $A[j+1]$, falls $A[j] > A[j+1]$.
4. Wiederhole 2.+ 3. für j gerade.

Laufzeit: $O(n)$

Odd-Even-Sort

Szenario: Wir besitzen n Roboter, die nach ihren IDs sortiert werden sollen.
Vorteil: Das können die Roboter unter sich ausführen!

Idee: Parallelisiere Bubblesort, d.h. vertausche nicht nur ein Paar von Zahlen, sondern bis zu n Zahlen.

7	1	5	6	4	8	3	2
1	7	5	6	4	8	2	3
1	5	7	4	6	2	8	3
1	5	4	7	2	6	3	8
1	4	5	2	7	3	6	8

1. For $i = 1$ to n do
2. Betrachte alle $A[j]$ mit j ungerade.
3. Tausche $A[j]$ mit $A[j+1]$, falls $A[j] > A[j+1]$.
4. Wiederhole 2.+ 3. für j gerade.

Laufzeit: $O(n)$

Odd-Even-Sort

Szenario: Wir besitzen n Roboter, die nach ihren IDs sortiert werden sollen.
Vorteil: Das können die Roboter unter sich ausführen!

Idee: Parallelisiere Bubblesort, d.h. vertausche nicht nur ein Paar von Zahlen, sondern bis zu n Zahlen.

1. For $i = 1$ to n do
2. Betrachte alle $A[j]$ mit j ungerade.
3. Tausche $A[j]$ mit $A[j+1]$, falls $A[j] > A[j+1]$.
4. Wiederhole 2.+ 3. für j gerade.

Laufzeit: $O(n)$

7	1	5	6	4	8	3	2
1	7	5	6	4	8	2	3
1	5	7	4	6	2	8	3
1	5	4	7	2	6	3	8
1	4	5	2	7	3	6	8
1	4	2	5	3	7	6	8

Odd-Even-Sort

Szenario: Wir besitzen n Roboter, die nach ihren IDs sortiert werden sollen.
Vorteil: Das können die Roboter unter sich ausführen!

Idee: Parallelisiere Bubblesort, d.h. vertausche nicht nur ein Paar von Zahlen, sondern bis zu n Zahlen.

1. For $i = 1$ to n do
2. Betrachte alle $A[j]$ mit j ungerade.
3. Tausche $A[j]$ mit $A[j+1]$, falls $A[j] > A[j+1]$.
4. Wiederhole 2.+ 3. für j gerade.

Laufzeit: $O(n)$

7	1	5	6	4	8	3	2
1	7	5	6	4	8	2	3
1	5	7	4	6	2	8	3
1	5	4	7	2	6	3	8
1	4	5	2	7	3	6	8
1	4	2	5	3	7	6	8
1	2	4	3	5	6	7	8

Odd-Even-Sort

Szenario: Wir besitzen n Roboter, die nach ihren IDs sortiert werden sollen.
Vorteil: Das können die Roboter unter sich ausführen!

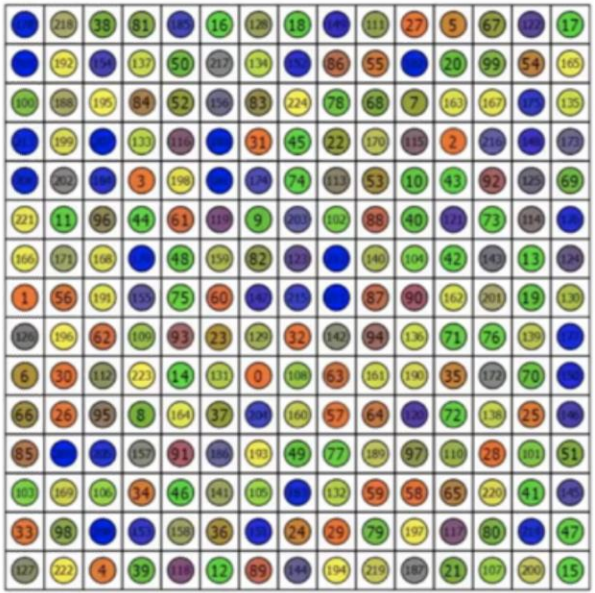
Idee: Parallelisiere Bubblesort, d.h. vertausche nicht nur ein Paar von Zahlen, sondern bis zu n Zahlen.

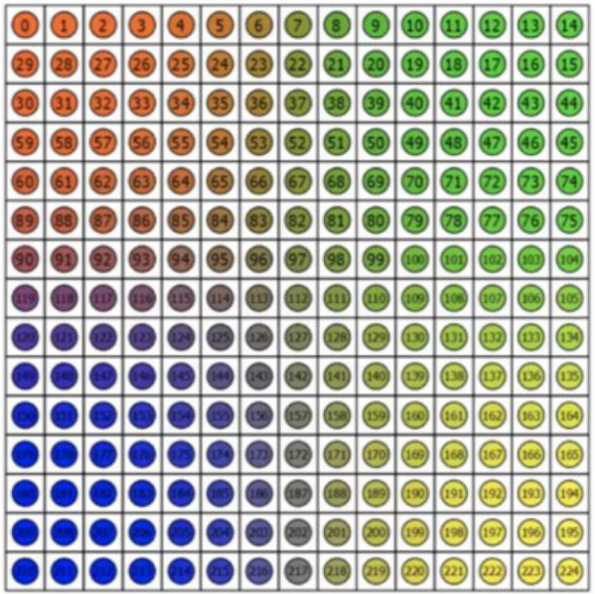
1. For $i = 1$ to n do
2. Betrachte alle $A[j]$ mit j ungerade.
3. Tausche $A[j]$ mit $A[j+1]$, falls $A[j] > A[j+1]$.
4. Wiederhole 2.+ 3. für j gerade.

Laufzeit: $O(n)$

7	1	5	6	4	8	3	2
1	7	5	6	4	8	2	3
1	5	7	4	6	2	8	3
1	5	4	7	2	6	3	8
1	4	5	2	7	3	6	8
1	4	2	5	3	7	6	8
1	2	4	3	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8

Robot Motion Planning – Ein Video





YouTube Video

(https://www.youtube.com/watch?v=_2CsL_vaQTo)

Mediane

Mediane – Definition

Rang-k Element m in X:

$$|\{x \in X : x \leq m\}| \geq k$$

$$|\{x \in X : x \geq m\}| \geq n - k$$

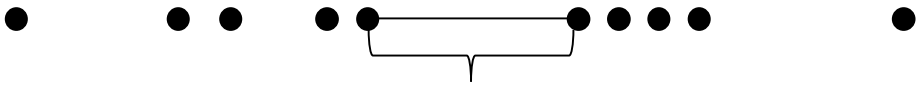
Für einen Median m in X gilt:

$$|\{x \in X : x < m\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$|\{x \in X : x > m\}| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

m besitzt Rang $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ und ist eindeutig,

wenn n ungerade ist.



Jeder Punkt in diesem Bereich ist ein Median!

Bei $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ sind sowohl 4 als auch 5 ein Median.

https://vignette.wikia.nocookie.net/dragonball/images/4/4b/Family-guy-the-more-you-know.jpg/revision/latest?cb=20140510200230

Mediane – Algorithmus (I)

Naive Idee: Sortieren und das Element an der k-te Stelle ausgeben.
Laufzeit: $\Theta(n \log n)$

Das geht besser!
Nutze die Idee von Quicksort: Pivotisiere und arbeite rekursiv auf **einem** Teil weiter.

Dazu stellen sich die Fragen:

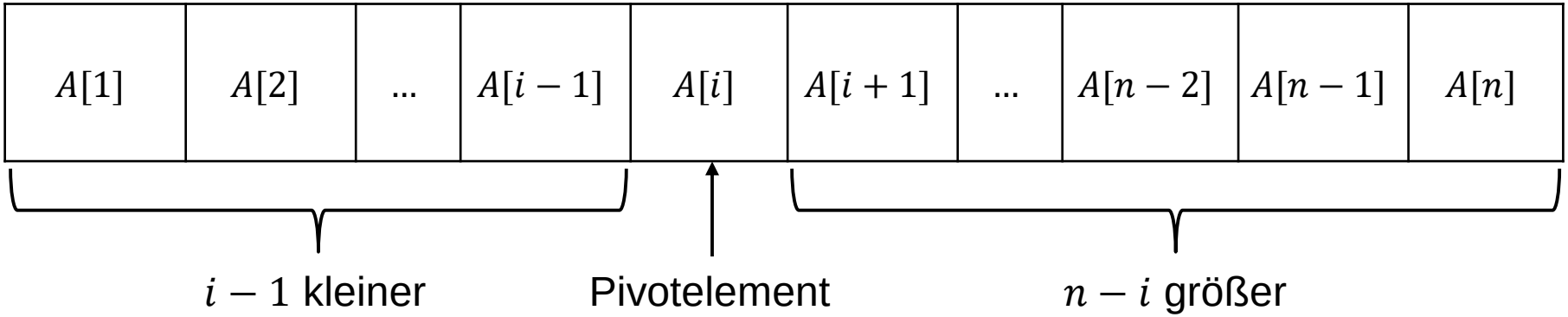
1. Auf welchem Teilarray geht es weiter?
2. Ist das schneller als $\Theta(n \log n)$?

Schauen wir uns die Fragen genauer an!

Mediane – Algorithmus (II)

1. Auf welchem Teilarray geht es weiter?

Nach Pivotisierung:



3 Fälle:

1. Falls $k < i$, suche im linken Teilarray nach dem k-ten Element.
2. Falls $k = i$, dann haben wir das k-te Element gefunden!
3. Falls $k > i$, suche im rechten Teilarray nach dem $(k - i)$-ten Element.

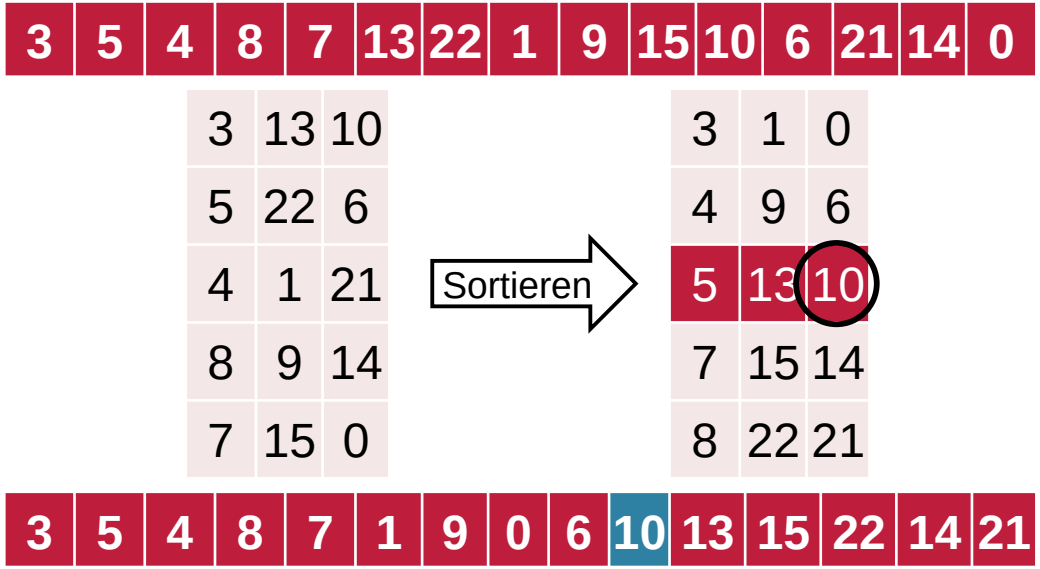
Mediane – Algorithmus (III)

2. Ist das schneller als $\Theta(n \log n)$?

Wie bei Quicksort kann größeres Teilarray $n - 1$ Elemente enthalten. Dadurch Laufzeit $\Omega(n^2)$

Andere Idee:

1. Teile Zahlen in 5er Gruppen
2. Bestimme Median in jeder Gruppe
3. Bestimme Median der Mediane m
4. Benutze m als Pivotelement



Mediane – Analyse

Wie viele Zahlen gibt es, die größer/kleiner als m sind?

Sortiere die t 5er Gruppen **gedanklich** nach deren Median

$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$					
$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$					
$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	$\leq m$	m	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$	$\geq m$

Der rote Bereich enthält nur Elemente, die höchstens m sind. Wie viele sind das?

Median m ist in der $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$-ten Gruppe. Also sind mindestens $3 \cdot \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ viele Elemente $\leq m$.

Damit gibt es maximal $n - 3 \cdot \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil \leq n - \frac{3}{2}t \leq n - \frac{3}{2} \cdot \frac{n}{5} = \frac{7}{10}n$ Elemente größer als m.

Analog: Maximal $\frac{7}{10}n$ Elemente kleiner als m.

Mediane - Laufzeit

Wir haben also als Laufzeit:

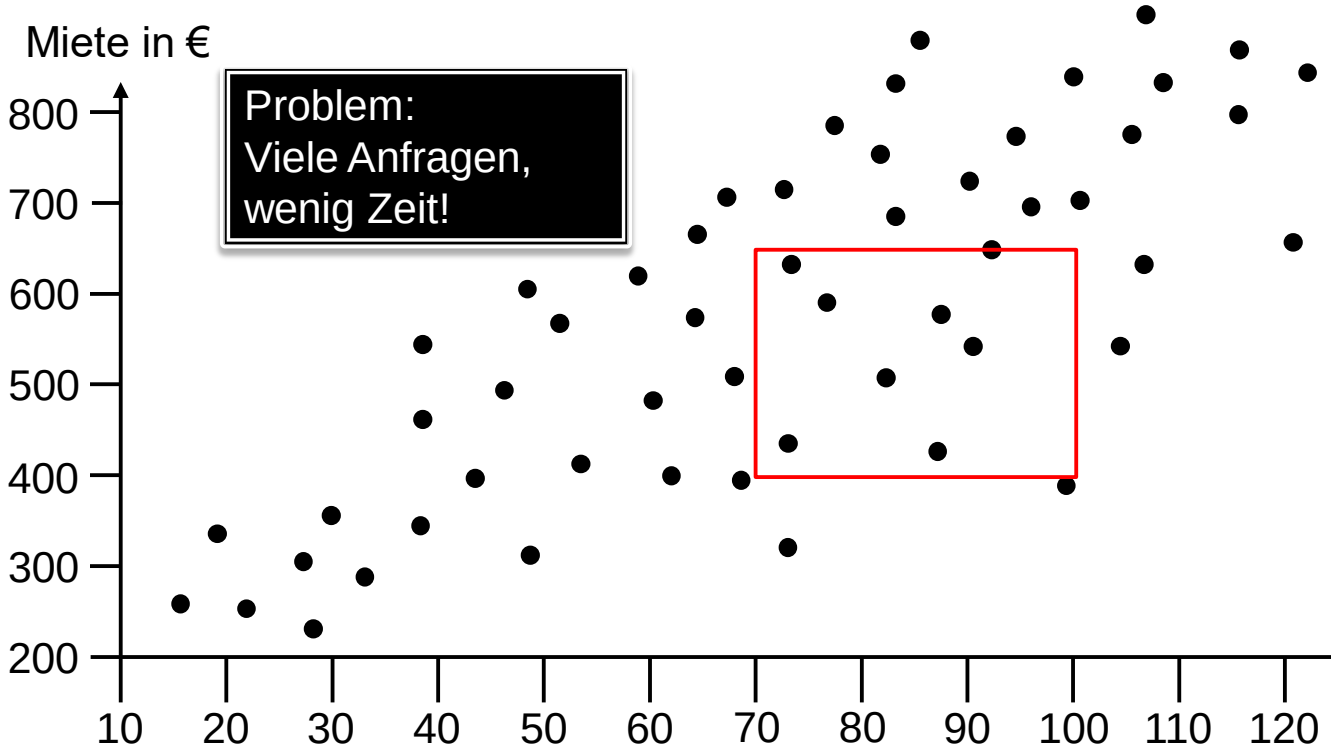
$$T(n) = T\left(\frac{1}{5}n\right) + T\left(\frac{7}{10}n\right) + \Theta(n)$$

Mit dem Master-Theorem folgt: $T(n) \in \Theta(n)$

Warum müssen das 5er Gruppen sein?

kd-Bäume

Motivation – Die Wohnungssuche



Such Wohnung:
Maximal 650€
Mindestens 400€
Maximal 100m²
Mindestens 70m²

Gib alle Wohnungen im roten Quadrat aus!

Naive Lösung:
Teste für jeden Punkt, ob er im Quadrat liegt.

kd-Bäume – Konstruktion/Preprocessing

Idee: Konstruiere binären Suchbaum
Trick: Suche abwechselnd nach x- und y-Koordinate.

Laufzeit des Algorithmus ist $O(n \log n)$

Beweis:

(1) Median-Linien können in $O(n)$ Zeit gefunden werden.

(2) Rekursionsgleichung für die Zeit ist also:

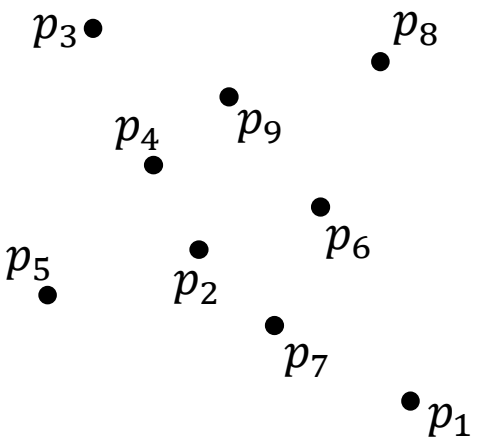
$$T(n) = O(n) + 2T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$$

Nach Mastertheorem ist das $O(n \log n)$.

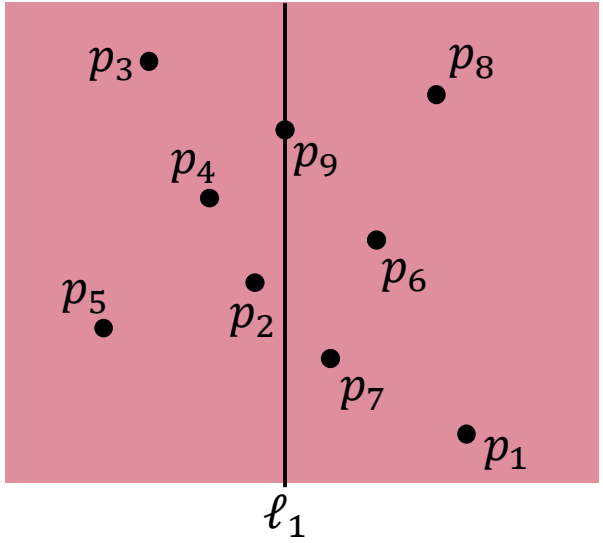
Algorithmus BUILDKDTREE
Eingabe: Punktmenge P, Rekursionstiefe *depth*
Ausgabe: Wurzel eines k-d-Baums

1. If $(|P| = 1)$
   a. Return Blatt mit diesem Punkt
2. Else if (*depth* ist gerade)
   a. Teile in zwei Teilmengen P_1 ($\leq \ell$) und P_2 ($> \ell$) an vertikaler Median-Linie ℓ
3. Else
   a. Teile über horizontale Median-Linie ℓ
4. Setze v_{left} := BUILDKDTREE(P_1,*depth+1)*
5. Setze v_{right} := BUILDKDTREE(P_2,*depth+1)*
6. Erzeuge Knoten v für ℓ mit v_{left} und v_{right} als Kinderknoten
7. Return v

kd-Bäume - Beispiel

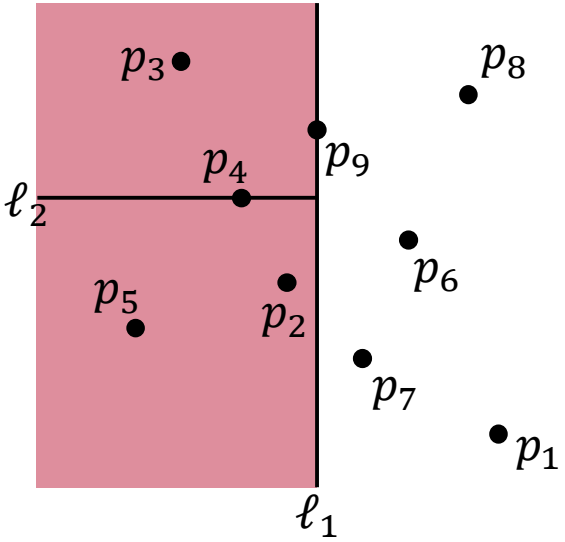


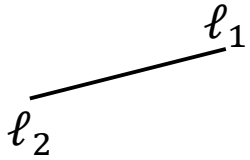
kd-Bäume - Beispiel



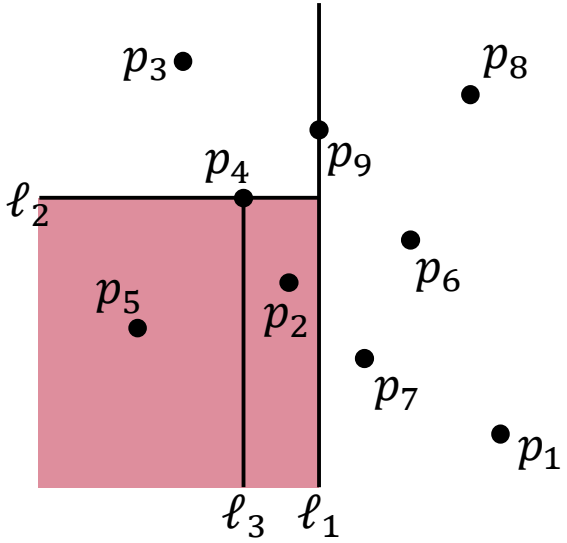
ℓ_1

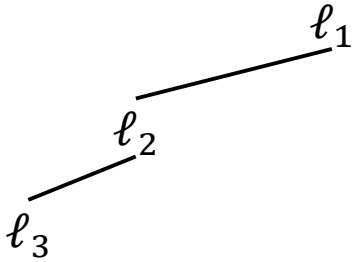
kd-Bäume - Beispiel



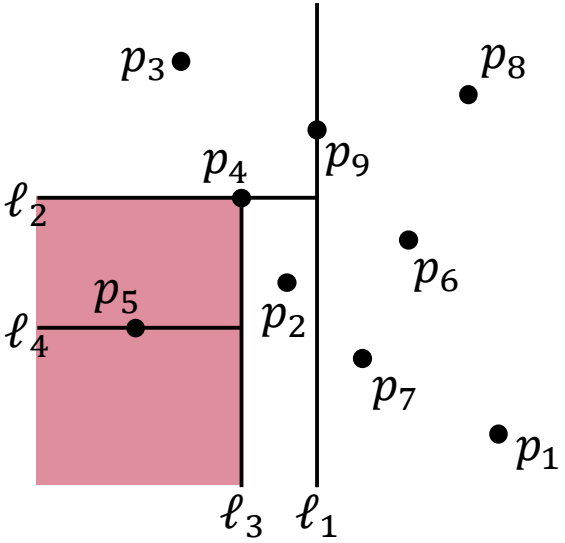


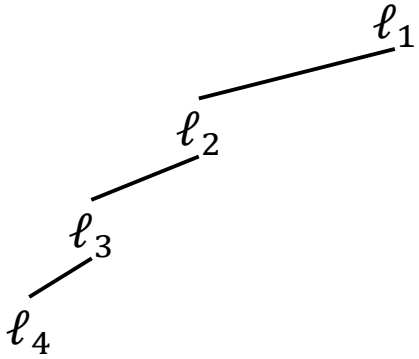
kd-Bäume - Beispiel



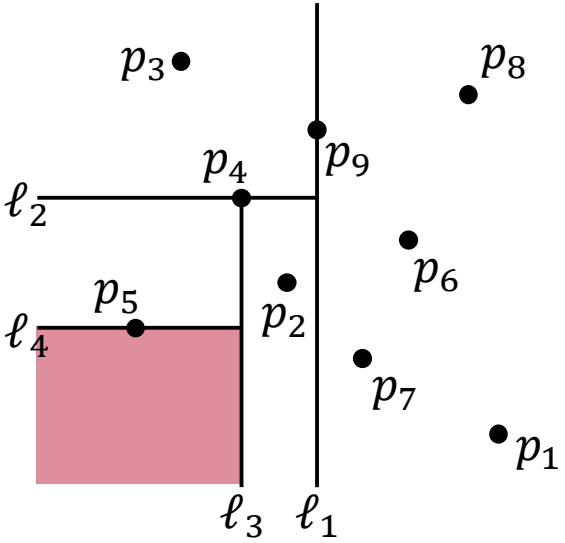


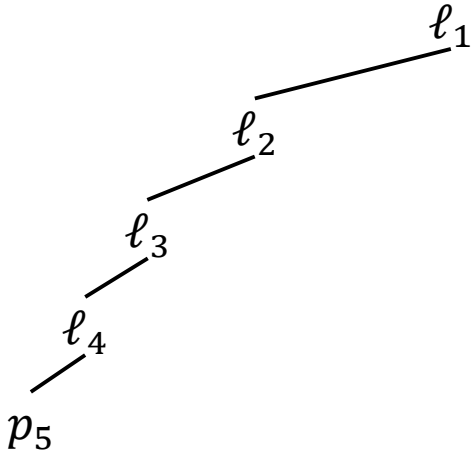
kd-Bäume - Beispiel



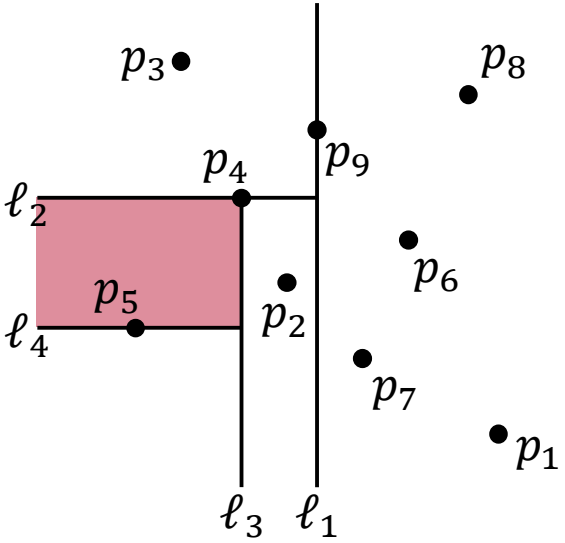


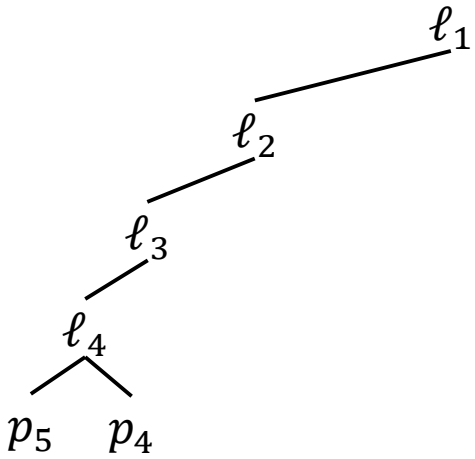
kd-Bäume - Beispiel



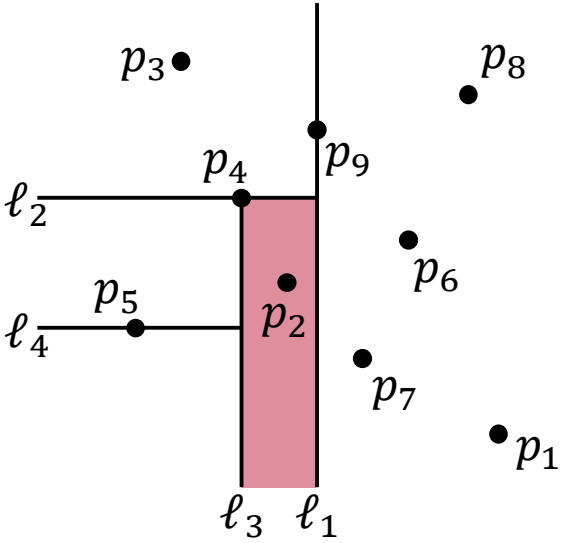


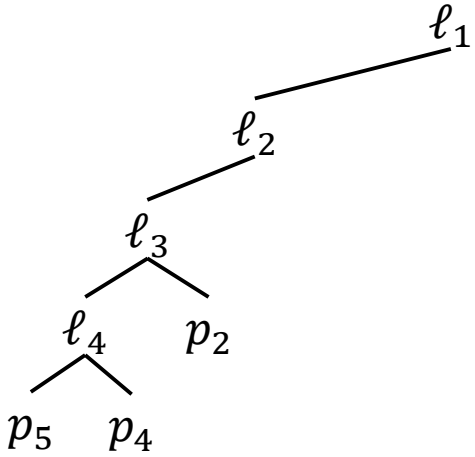
kd-Bäume - Beispiel



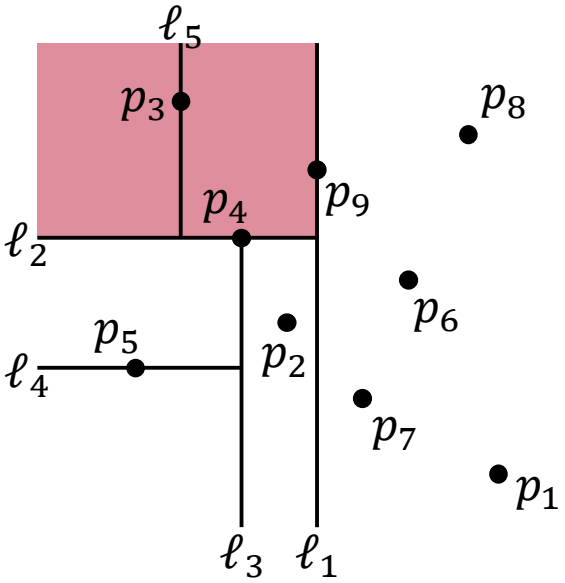


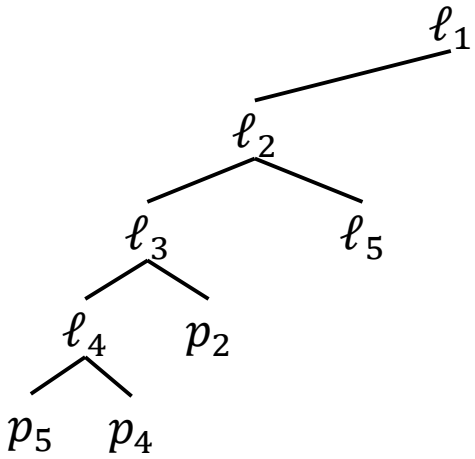
kd-Bäume - Beispiel



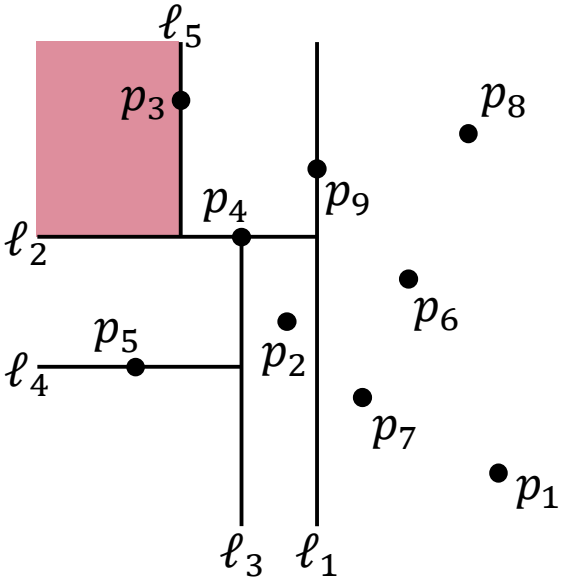


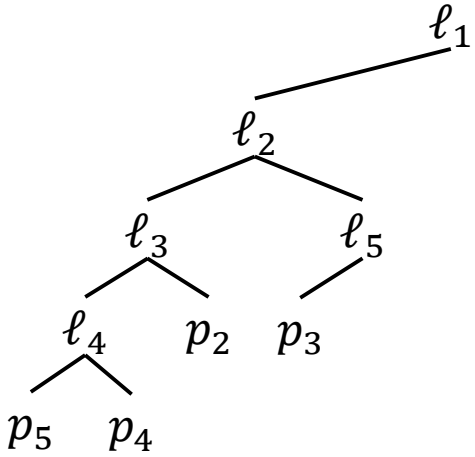
kd-Bäume - Beispiel



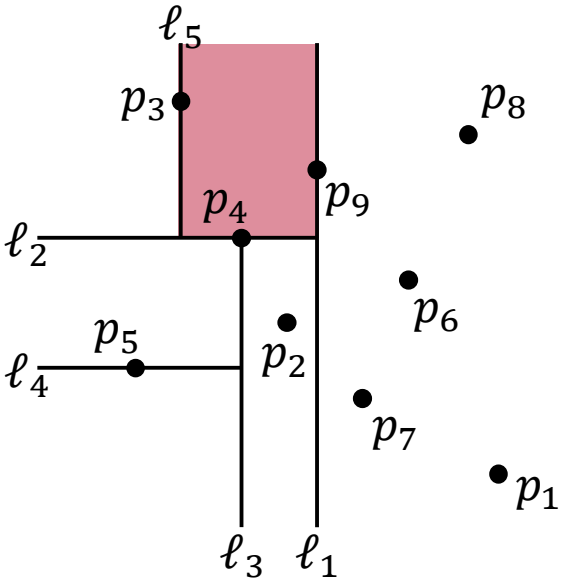


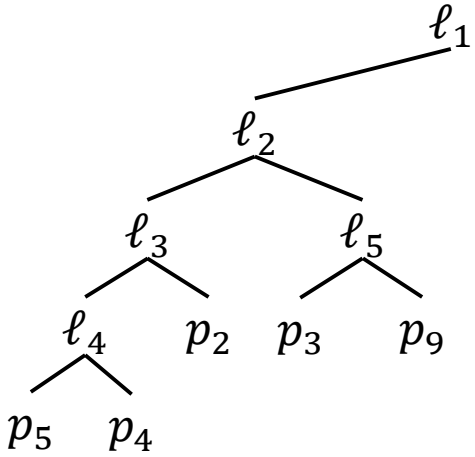
kd-Bäume - Beispiel



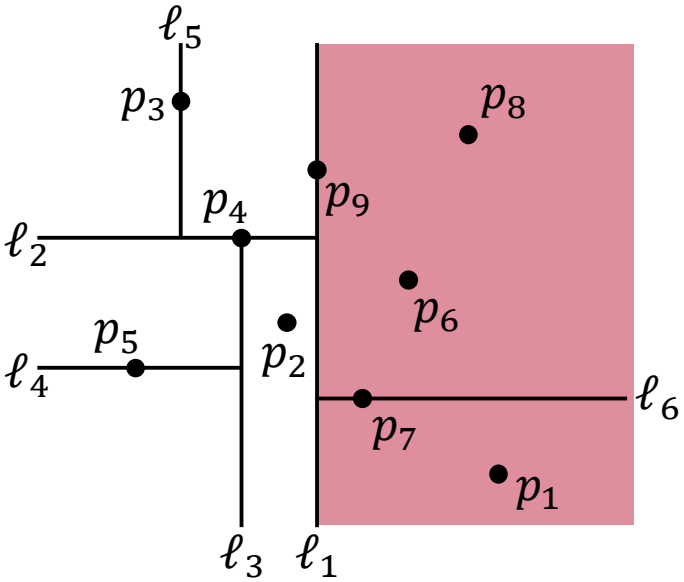


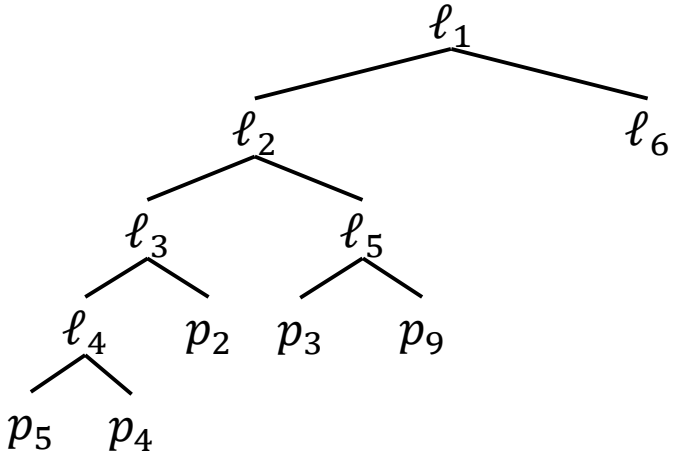
kd-Bäume - Beispiel



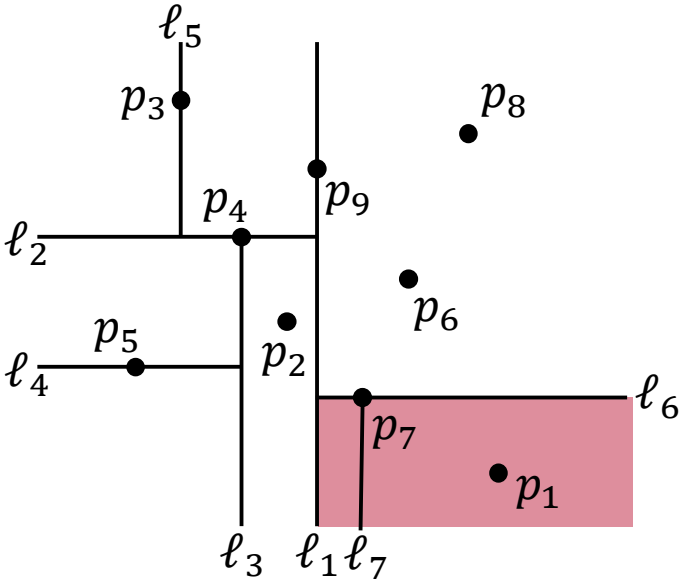


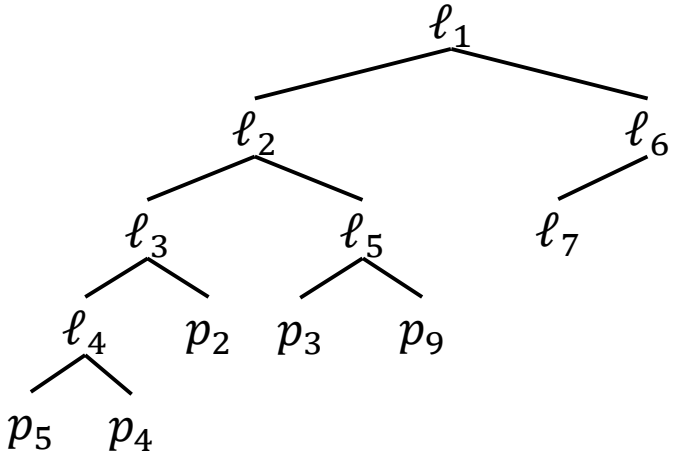
kd-Bäume - Beispiel



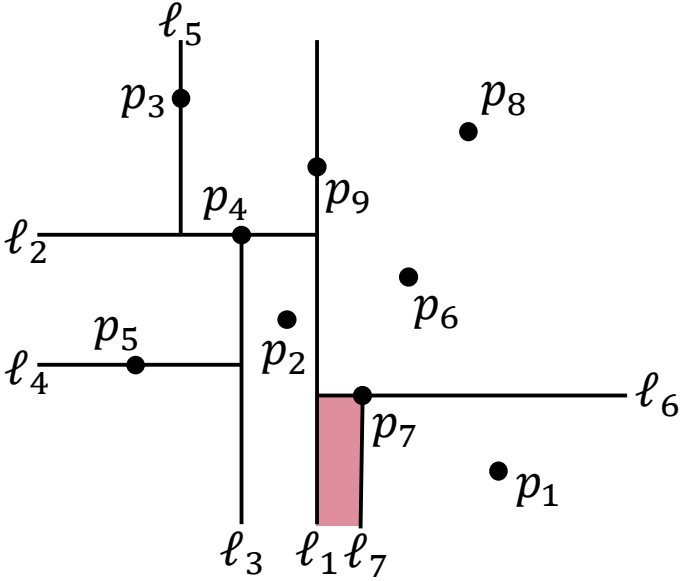


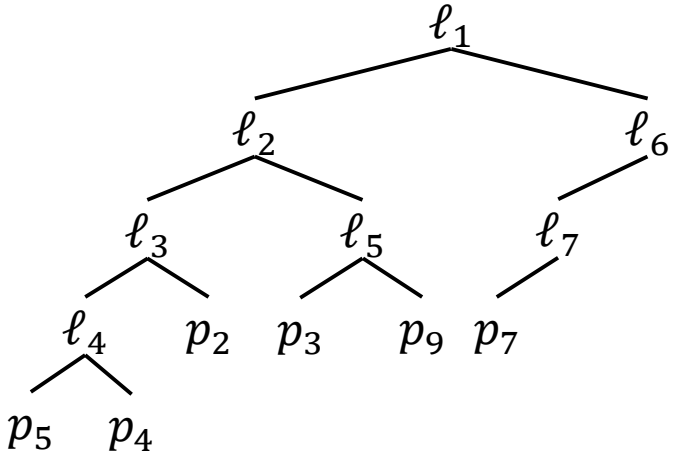
kd-Bäume - Beispiel



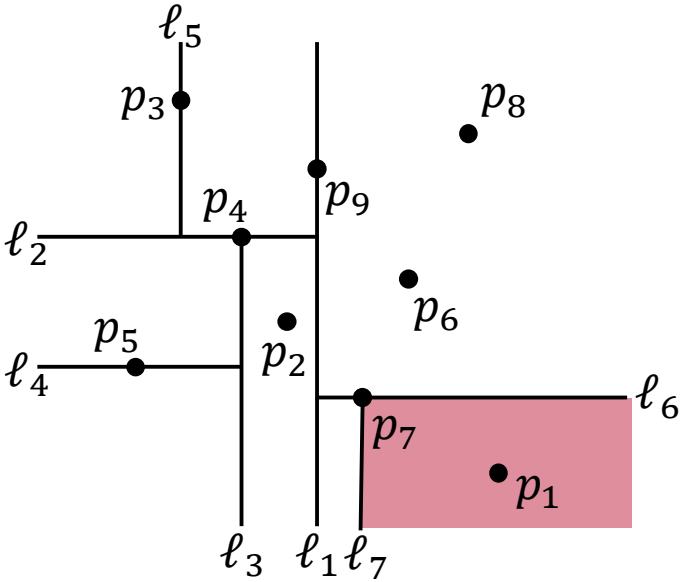


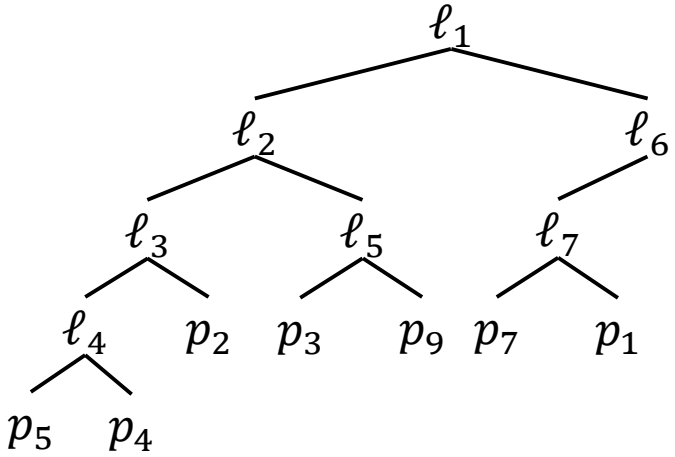
kd-Bäume - Beispiel



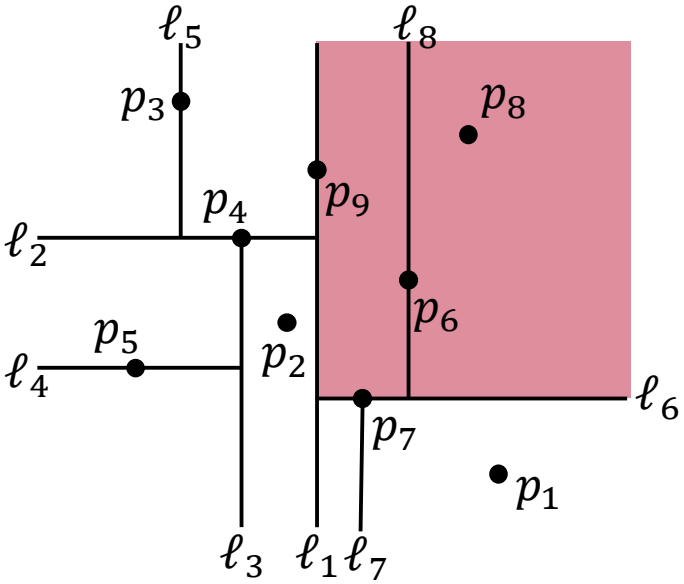


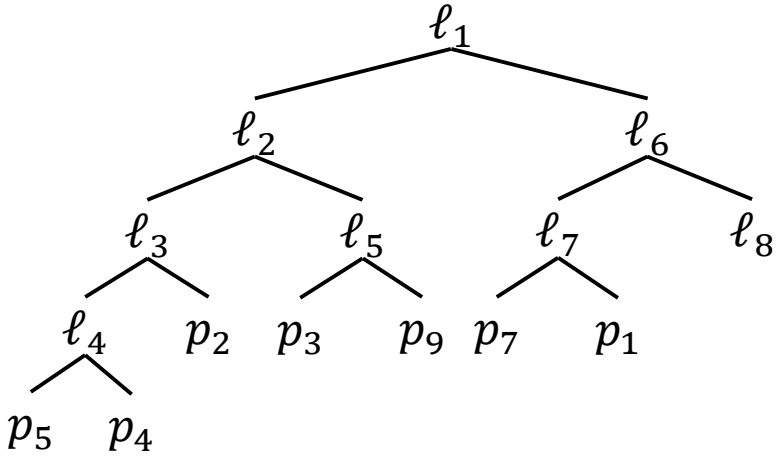
kd-Bäume - Beispiel



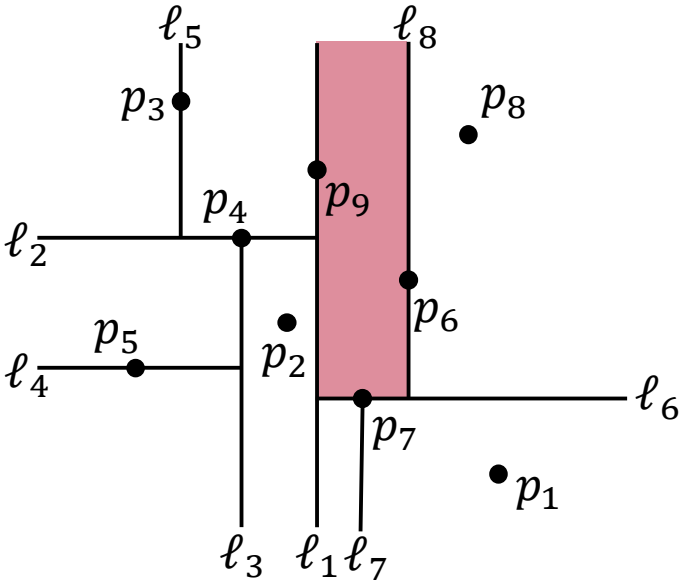


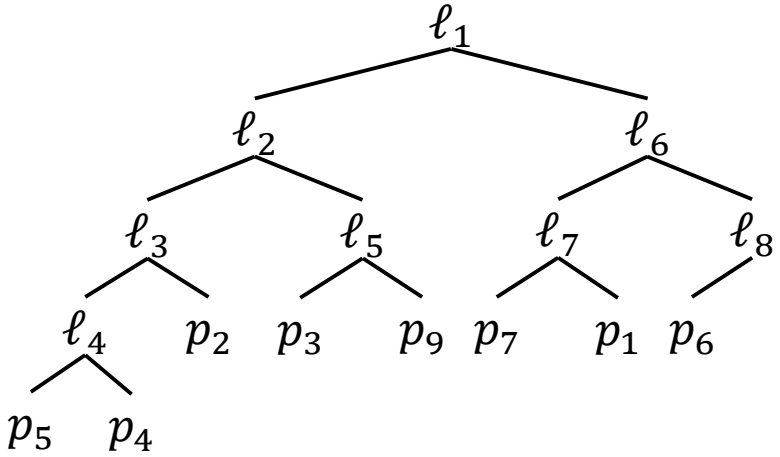
kd-Bäume - Beispiel



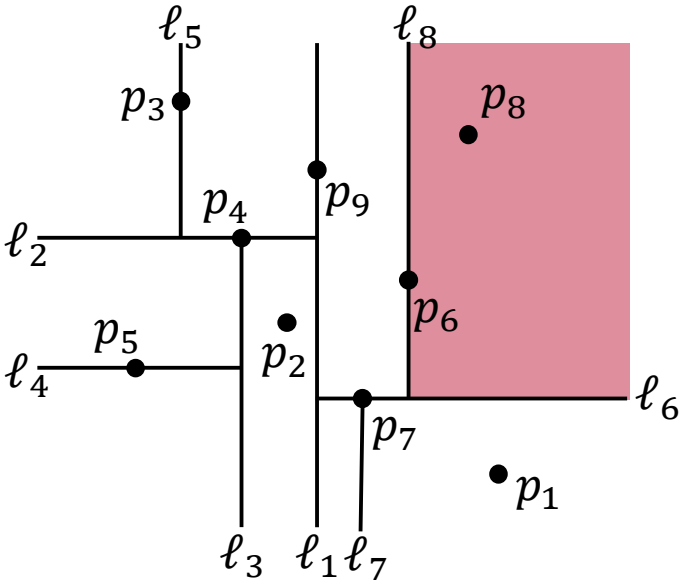


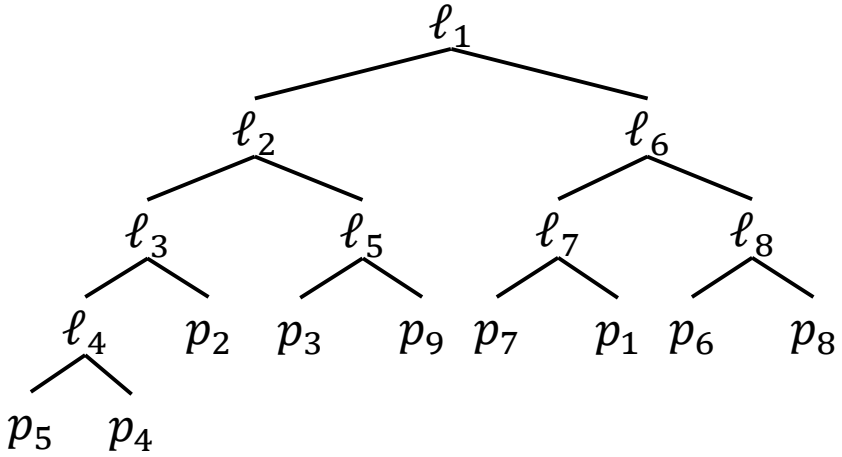
kd-Bäume - Beispiel





kd-Bäume - Beispiel





kd-Bäume – Search Query

Laufzeit ist $O(\sqrt{n}+x)$, wobei x die Anzahl an ausgegebenen Elementen ist.

Das nennt sich *output-sensitiv*, d.h. die Laufzeit ist von der Größe des Outputs abhängig.

Beweisidee:

Wie viele *geschnittene* Regionen müssen betrachtet werden? Man kann die Rekursionsgleichung aufstellen: $Q(n) = 2 + 2Q\left(\frac{n}{4}\right)$.

Also $Q(n) \in O(\sqrt{n})$. So viele Elemente können geprüft werden, die nicht in R liegen. Die $O(x)$ sind die Elemente in R.

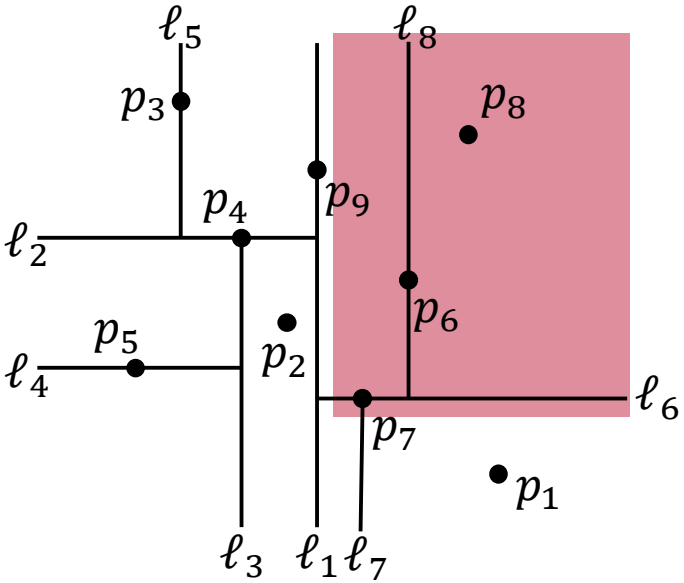
Algorithmus SEARCHKDTREE

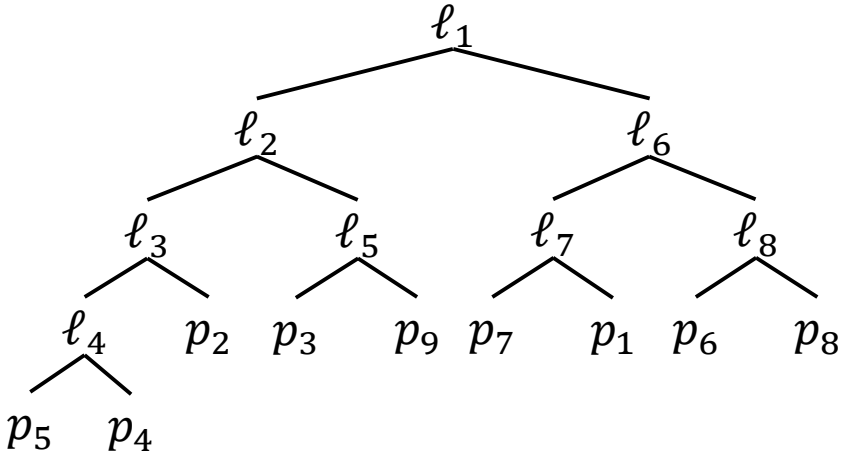
Eingabe: Wurzel v eines (Teil-)baums, Rechteck R

Ausgabe: Knoten unterhalb v, die in R liegen

1. If (v ist ein Blatt)
   a. Gib v aus, falls v in R
2. Else
   a. if (Region(lc(v)) ganz in R)
      i. REPORTSUBTREE(lc(v))
   b. Else if (Region(lc(v)) schneidet R)
      i. SEARCHKDTREE(lc(v), R)
   c. if (Region(rc(v)) ganz in R)
      i. REPORTSUBTREE(rc(v))
   d. Else if (Region(rc(v)) schneidet R)
      i. SEARCHKDTREE(rc(v), R)

kd-Bäume - Beispiel

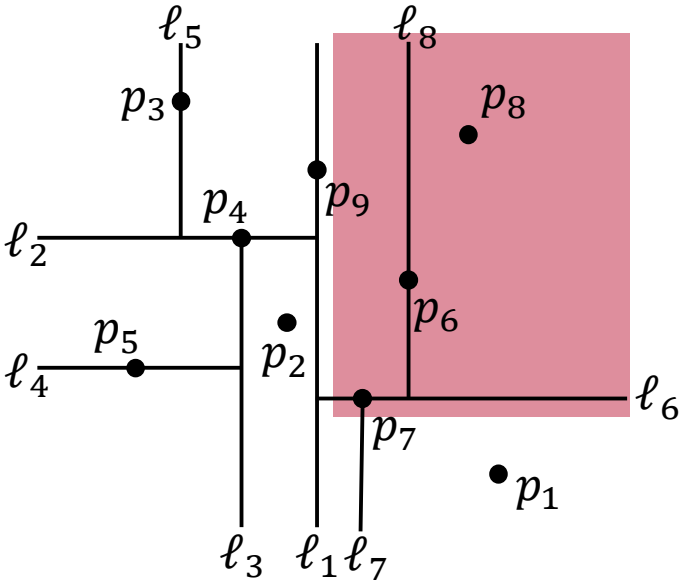


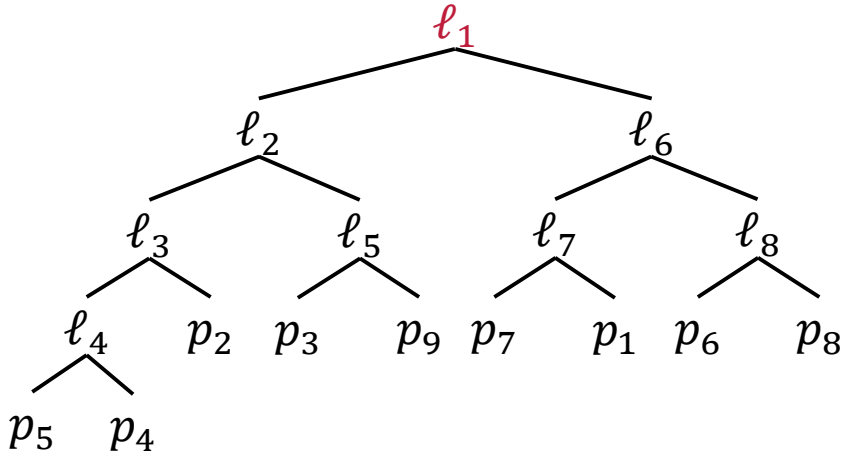


Welche Punkte liegen im Rechteck?

Antwort:

kd-Bäume - Beispiel

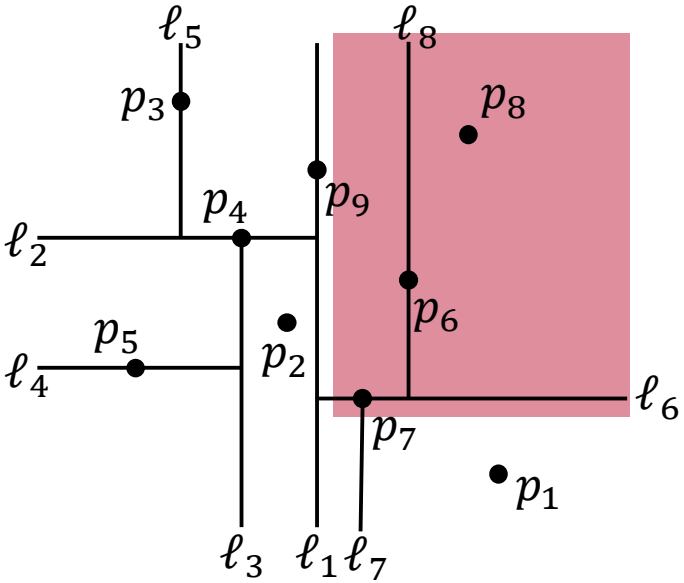


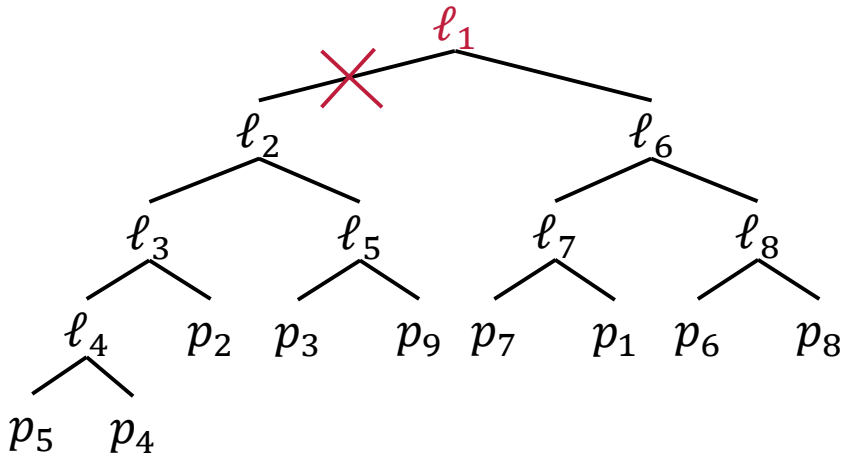


Welche Punkte liegen im Rechteck?

Antwort:

kd-Bäume - Beispiel

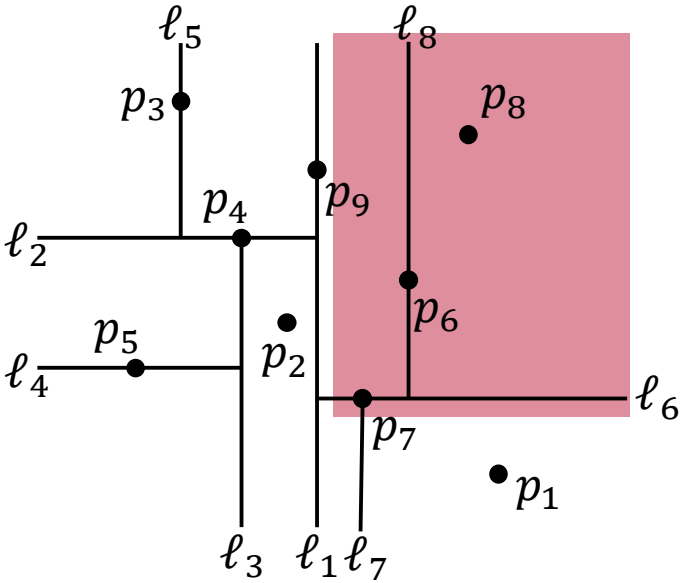


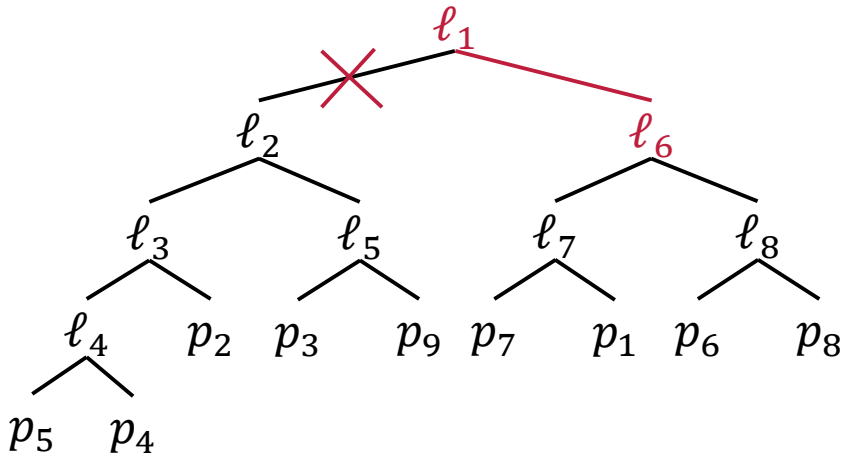


Welche Punkte liegen im Rechteck?

Antwort:

kd-Bäume - Beispiel

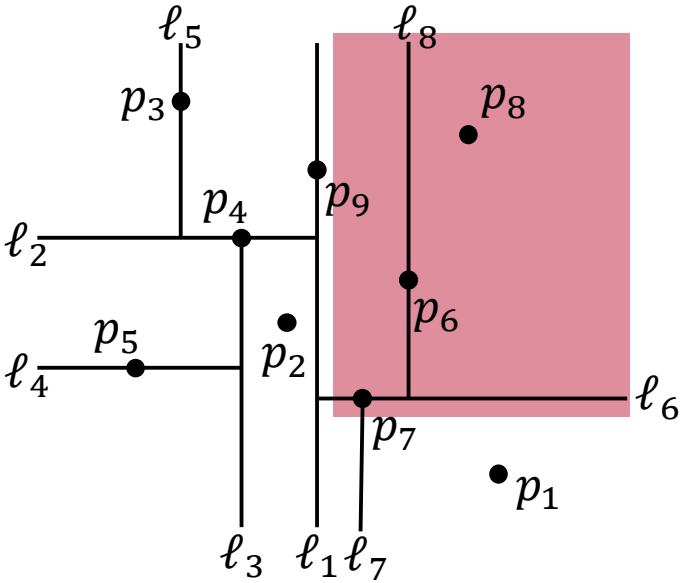


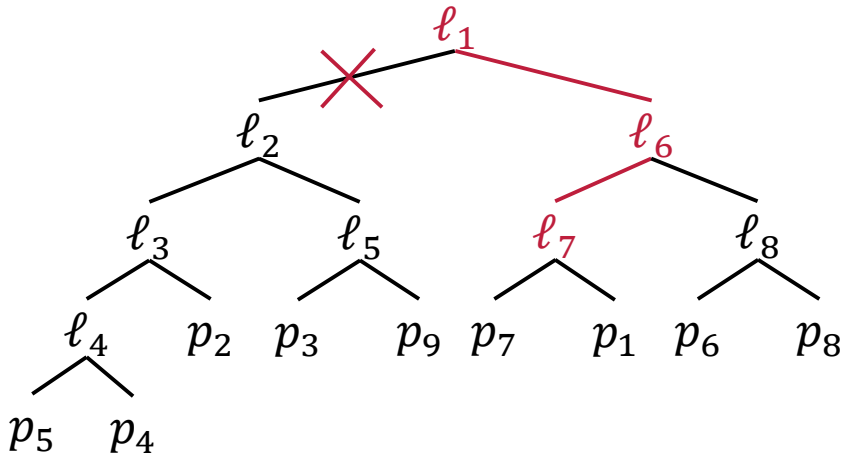


Welche Punkte liegen im Rechteck?

Antwort:

kd-Bäume - Beispiel

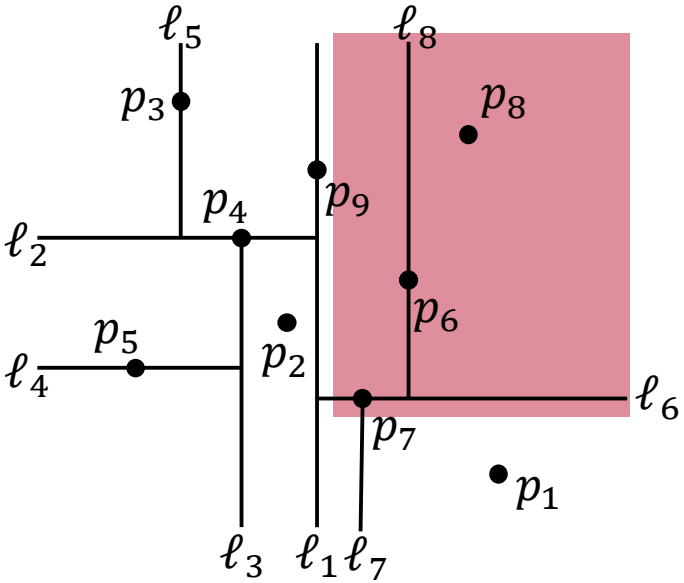


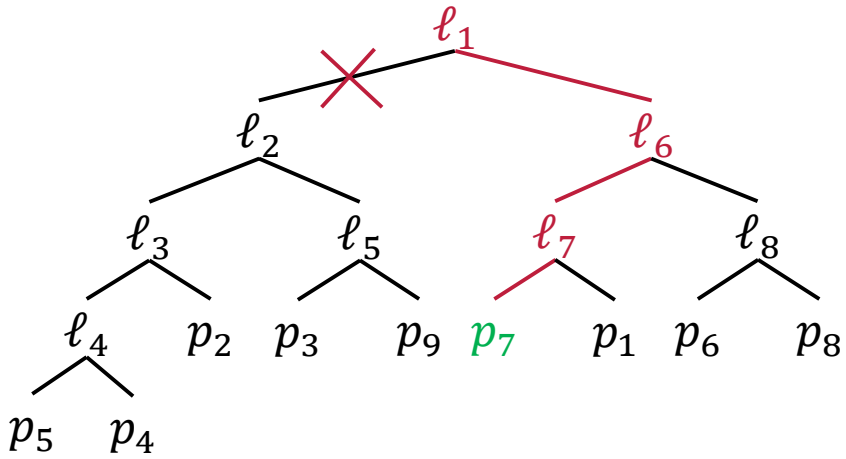


Welche Punkte liegen im Rechteck?

Antwort:

kd-Bäume - Beispiel

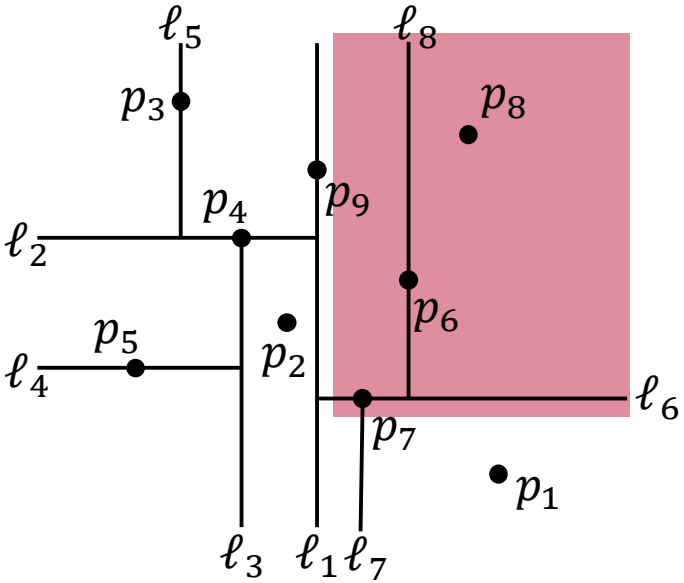


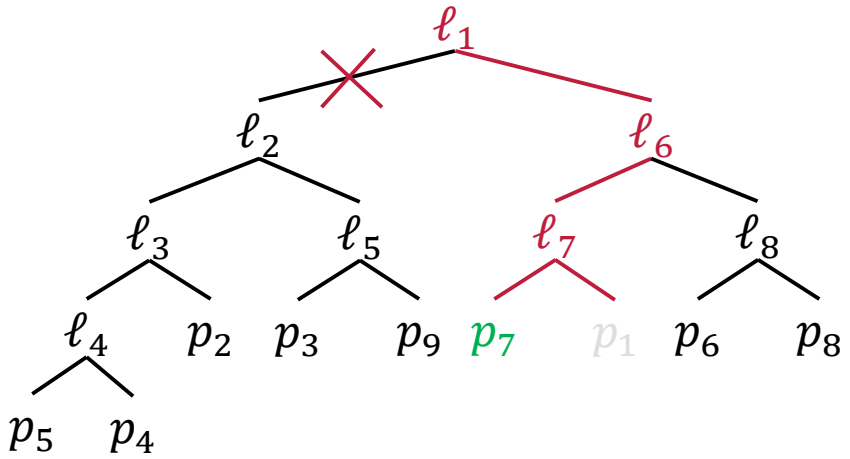


Welche Punkte liegen im Rechteck?

Antwort: p_7

kd-Bäume - Beispiel

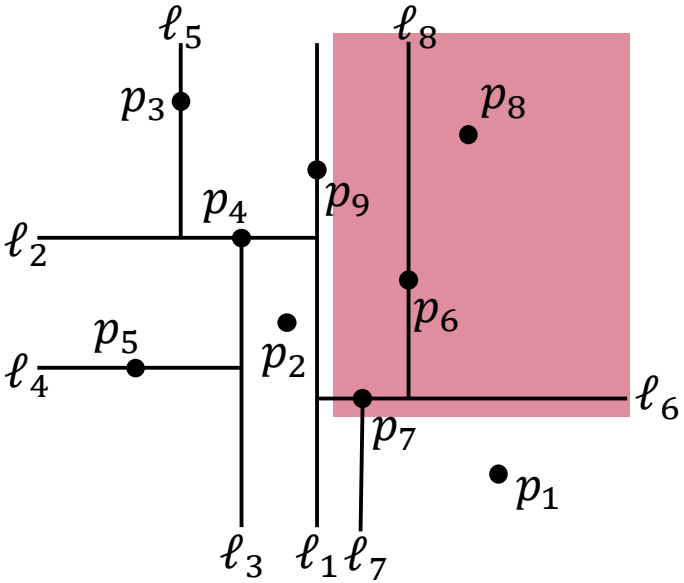


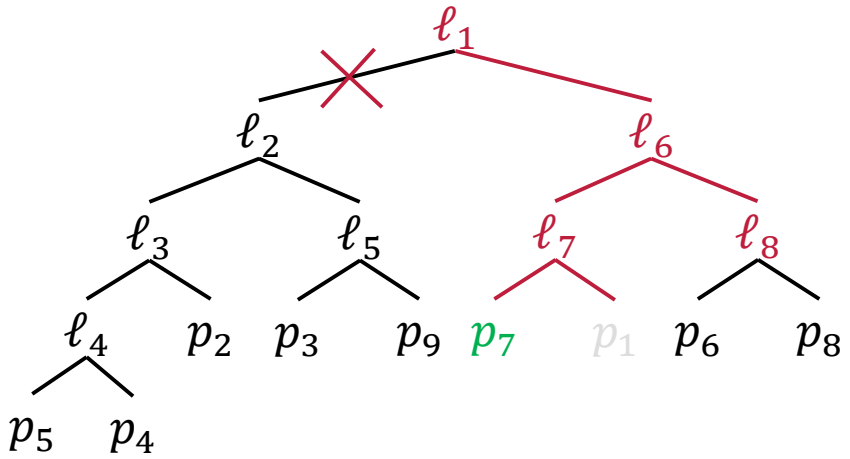


Welche Punkte liegen im Rechteck?

Antwort: p_7

kd-Bäume - Beispiel

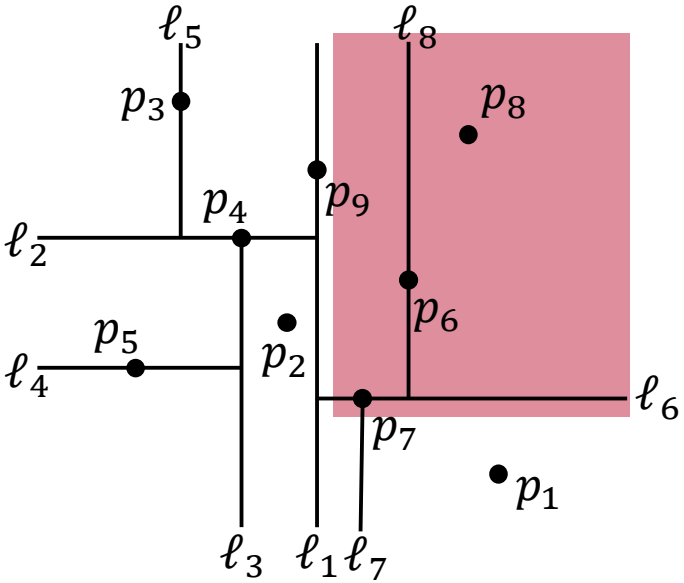


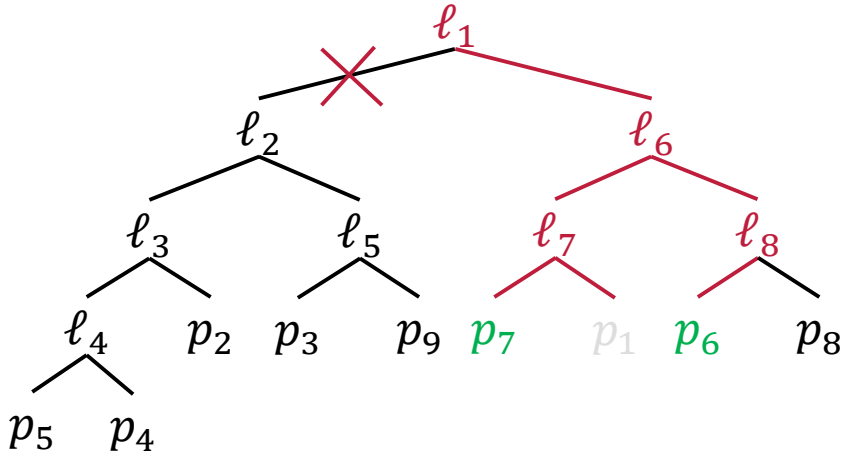


Welche Punkte liegen im Rechteck?

Antwort: p_7

kd-Bäume - Beispiel

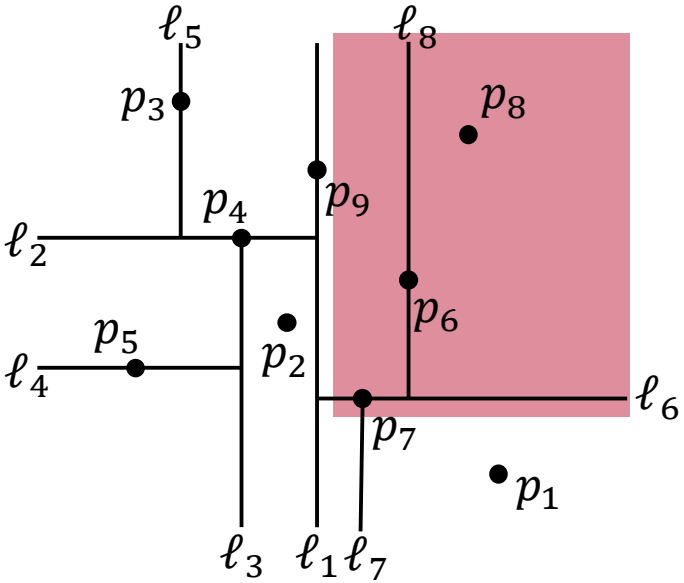


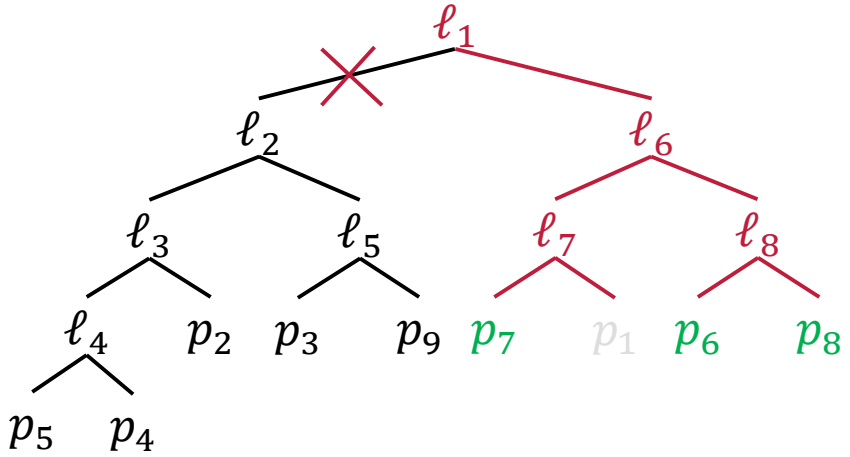


Welche Punkte liegen im Rechteck?

Antwort: p_7 p_6

kd-Bäume - Beispiel





Welche Punkte liegen im Rechteck?

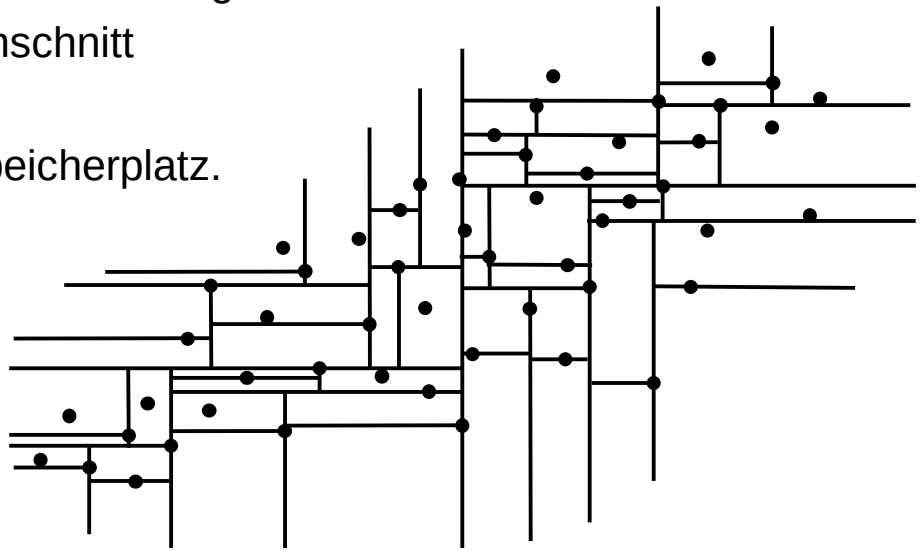
Antwort: p_7 p_6 p_8

kd-Bäume – Höhere Dimensionen

Bisher nur 1D und 2D betrachtet. Laufzeiten für $k \geq 2$ Dimensionen:

- BuildKDTree: $O(n \log n)$.
- SearchKDTree: $O(n^{1-\frac{1}{k}} + x)$, um x Elemente auszugeben.
- FindNearestNeighbor: $O(\log n)$ im Durchschnitt

Weiterer Vorteil: Sie benötigen nur $O(n)$ Speicherplatz.



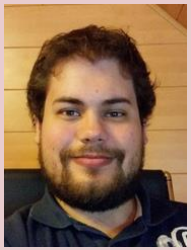
Ausblick

Im Sommer…

…gibt es wieder zwei Veranstaltungen für den Bachelor-Bereich:

Algorithmen und Datenstrukturen 2

Linda Kleist



Arne Schmidt

- Einführung in Komplexitätstheorie
- Heuristiken
- Exakte Methoden
- Approximationen
- Hashing

Netzwerkalgorithmen

Christian Scheffer

Christian Rieck

- Kostenminimale aufspannende Bäume
- Kürzeste Wege
- Maximale Flüsse
- Kardinalitätsmaximales Matching