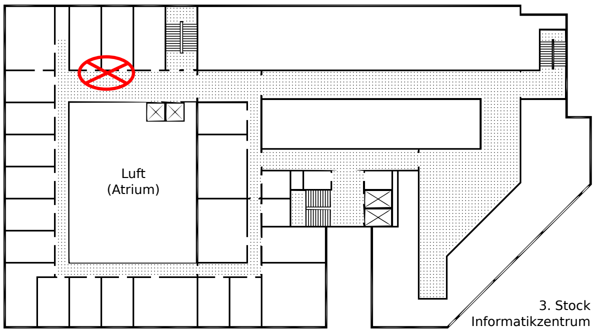
Abteilung Algorithmik **Winter 2019/20**
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
TU Braunschweig

Dr. Christian Scheffer
Christian Rieck

Algorithmische Geometrie
Übungsblatt 1 vom 04.11.2019

Die Abgabe der Lösungen zu Blatt 1 ist bis Montag, den 18.11.2019 um 11:30 Uhr im Hausaufgabenrückgabeschrank der Algorithmik möglich.

Bitte die Blätter vorne deutlich mit eigenem Namen sowie Matrikelnummer versehen und zusammenheften!



Hausaufgabe 1: Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ heißt *planar*, wenn er eine Einbettung in die Ebene besitzt, das heißt, er kann so in der Ebene gezeichnet werden, dass sich keine Kanten kreuzen.

Sei G ein einfacher, zusammenhängender, planarer Graph mit $|V| \geq 3$ und sei $|F|$ die Anzahl der durch Kanten berandeten Flächen (die unbegrenzte Außenfläche zählt dazu) in einer Einbettung von G. Beweise die folgenden Aussagen:

a) $|V| + |F| - |E| = 2$

b) $|E| \leq 3|V| - 6$

c) $\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \delta(v) < 6$, das heißt, der durchschnittliche Knotengrad ist echt kleiner als 6.

(10 Punkte)

Hausaufgabe 2: Sei $\mathcal{P}$ eine gegebene Punktmenge und $p, q \in \mathcal{P}$ zwei Punkte, so dass deren euklidische Distanz unter allen Punktpaaren maximal ist.

Zeige: p und q sind Eckpunkte der konvexen Hülle von $\mathcal{P}$. **(10 Punkte)**

Hausaufgabe 3: Sei $\mathcal{P}$ eine gegebene Punktmenge in allgemeiner Lage (das heißt, keine drei Punkte sind kolinear). Gib einen Algorithmus an, der zwei Punkte $p, q \in \mathcal{P}$ bestimmt, so dass die Gerade g durch p und q die Punktmenge so in zwei Teile teilt, dass sich die Anzahl der Punkte rechts und links von der Geraden höchstens um Eins unterscheiden. Begründe zusätzlich Korrektheit und Laufzeit deines Algorithmus.

(Hinweis: Du darfst annehmen, dass eine solche Gerade immer existiert. Punkte auf g zählen zu keiner Seite.) **(10 Punkte)**

Präsenzaufgabe 1: Sei $\mathcal{P}$ eine endliche Punktmenge mit $|\mathcal{P}| \geq 2$ und seien keine drei Punkte aus $\mathcal{P}$ kolinear. Eine *Windmühle* ist ein Prozess der mit einer Gerade ℓ durch einen Punkt $p \in \mathcal{P}$ beginnt. Die Gerade rotiert im Uhrzeigersinn um den Drehpunkt p bis sie das erste Mal auf einen anderen Punkt $q \in \mathcal{P}$ trifft. Nun rotiert die Gerade ℓ im Uhrzeigersinn um den neuen Drehpunkt q bis sie auf den nächsten Punkt aus $\mathcal{P}$ trifft. Und so weiter.

Zeige, für jeden Punkt $r \in \mathcal{P}$ gibt es eine Gerade ℓ durch den Punkt r, so dass die resultierende Windmühle jeden Punkt aus $\mathcal{P}$ unendlich oft als Drehpunkt verwendet.

(Hinweis: Die Struktur aus Hausaufgabe 3 sollte hilfreich für diese Aufgabe sein.)

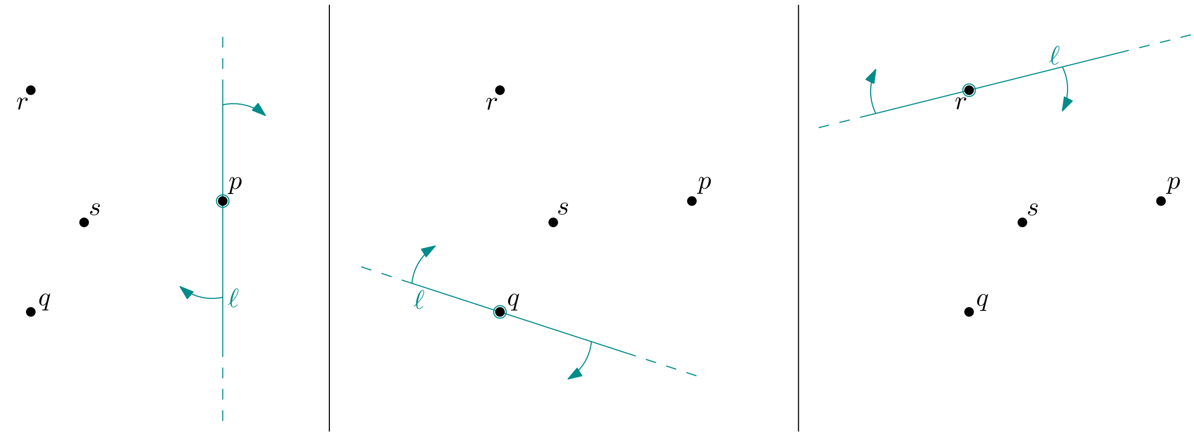


Abbildung 1: Sei $\mathcal{P} = \{p, q, r, s\}$. Starten wir mit der gegebenen Geraden ℓ im Punkt p, so verwendet ℓ nur die Knoten $p, q, r \in CH(\mathcal{P})$ als Drehpunkte. Punkt s wird niemals verwendet.

Abbildung 1 zeigt für die Punktmenge $\mathcal{P}$ eine initial gewählte Gerade ℓ, bei der dieser Prozess nur die Knoten von $CH(\mathcal{P})$ unendlich oft als Drehpunkt verwendet, den Punkt s allerdings nie.

Abbildung 2 zeigt dagegen für die selbe Punktmenge $\mathcal{P}$ eine initial gewählte Gerade ℓ, so dass die Windmühle jeden Punkt aus $\mathcal{P}$ unendlich oft als Drehpunkt verwendet. Man sieht leicht, dass der nächste Drehpunkt der Sequenz mit der zugehörigen Geraden wieder die Anfangskonfiguration ergibt. Des Weiteren sieht man leicht, dass man an einer beliebigen Stelle dieser Sequenz mit der Windmühle starten kann.

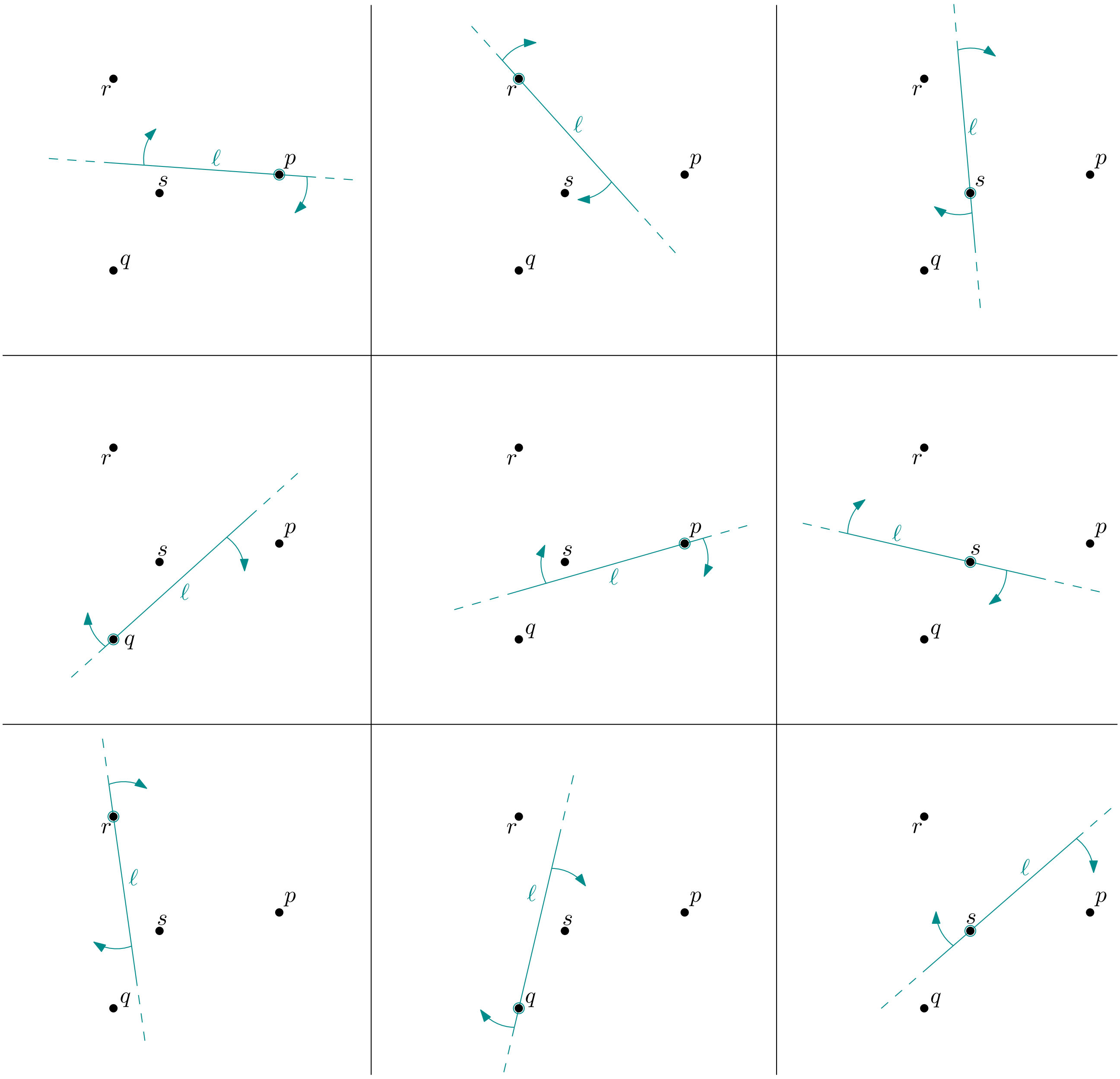


Abbildung 2: Sei $\mathcal{P} = \{p, q, r, s\}$. Starten wir die Windmühle mit der initialen Geraden ℓ im Punkt p, so werden alle Punkte aus $\mathcal{P}$ unendlich oft als Drehpunkt verwendet. Die Sequenz ist beispielsweise $p, r, s, q, p, s, r, q, s$ und beginnt danach wieder von vorn.