Technische Universität Braunschweig
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
Abteilung Algorithmik

Wintersemester 2016/2017

Prof. Dr. Sándor P. Fekete
Phillip Keldenich
Arne Schmidt

Klausur
Algorithmen und Datenstrukturen
01. 03. 2017

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

☐ Bachelor ☐ Master ☐ Andere

Mit der Veröffentlichung meines Klausurergebnisses unter meiner Matrikelnummer bin ich einverstanden.

....
Unterschrift

Hinweise:

- Bitte das Deckblatt in Druckschrift vollständig ausfüllen.
- Die Klausur besteht aus 17 Blättern, bitte auf Vollständigkeit überprüfen.
- Erlaubte Hilfsmittel: Keine.
- Eigenes Papier ist nicht erlaubt.
- Die Rückseiten der Blätter dürfen beschrieben werden.
- Die Klausur ist mit 50 % der Punkte bestanden.
- Antworten die *nicht* gewertet werden sollen bitte deutlich durchstreichen. Kein Tippex verwenden.
- Mit *Bleistift* oder in *Rot* geschriebene Klausurteile können nicht gewertet werden.
- Werden mehrere Antworten gegeben, werten wir die mit der geringsten Punktzahl.
- Sämtliche Algorithmen, Datenstrukturen, Sätze und Begriffe beziehen sich, sofern nicht explizit anders angegeben, auf die in der Vorlesung vorgestellte Variante.
- Sofern nicht anders angegeben, sind alle Graphen als einfache Graphen zu verstehen.
- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 120 Minuten.

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Σ**
Punkte	**12**	**12**	**17**	**14**	**12**	**11**	**12**	**10**	**100**
Erreicht									
Note	—	—	—	—	—	—	—	—	

Aufgabe 1: Graphen **(8+3+1 Punkte)**

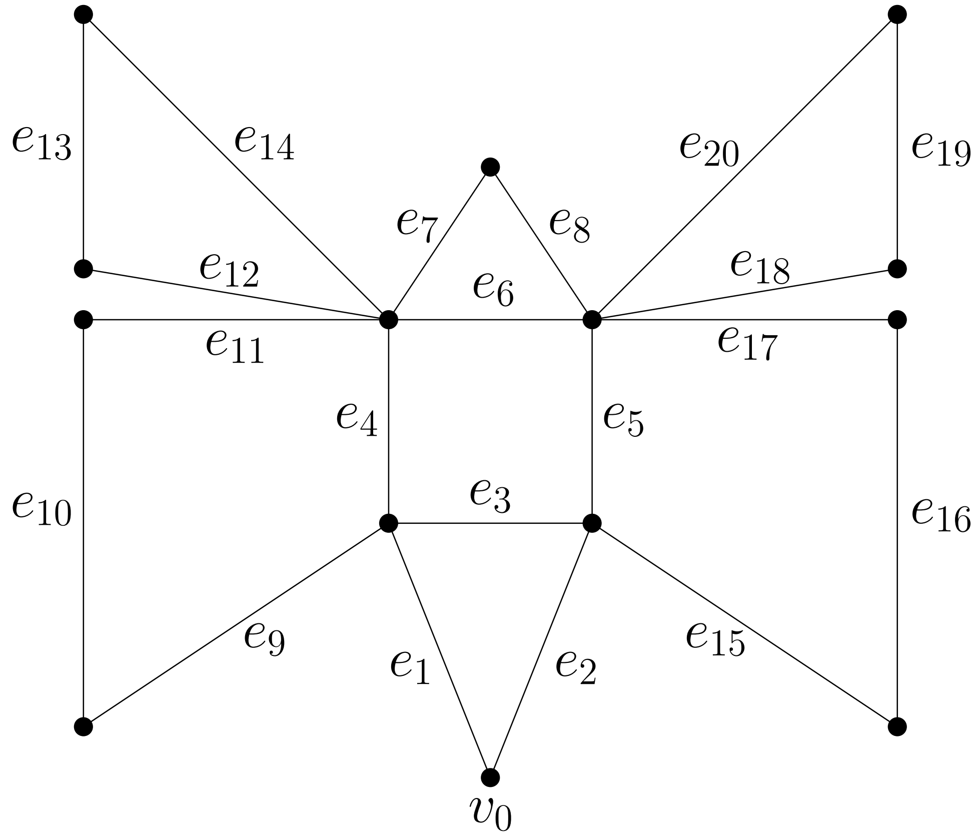


Abbildung 1: Der Graph G.

a) Wende den Algorithmus von Fleury auf den Graphen G aus Abbildung 1 an; starte dabei mit dem Knoten v_0. Falls der Algorithmus zu einem Zeitpunkt mehrere Kanten für den nächsten Schritt auswählen dürfte, wähle diejenige mit dem kleinsten Index. Gib die Kanten in der Reihenfolge an, wie sie vom Algorithmus benutzt werden.

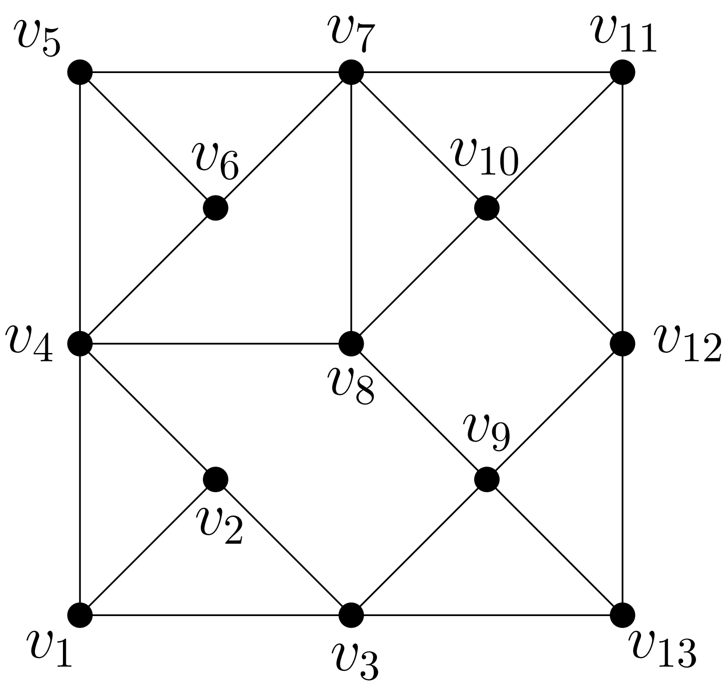


Abbildung 2: Der Graph H.

b) Betrachte den Graphen H aus Abbildung 2. Hat dieser Graph einen Hamiltonkreis? Falls ja, gib die Knotenreihenfolge eines Hamiltonkreises an, der mit v_1 beginnt.

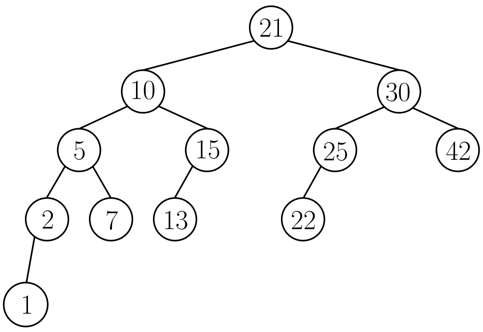
c) Zeige oder widerlege: Jeder vollständige Graph mit $n \geq 3$ Knoten besitzt eine Eulertour.

Aufgabe 2: AVL-Bäume **(3+2+1+2+2+2 Punkte)**

Betrachte in den Aufgabenteilen a) bis e) den Baum, der in der jeweiligen Abbildung dargestellt wird. Führe die Operation, die in dem jeweiligen Aufgabenteil genannt ist, und die damit verbundenen Restrukturierungsmaßnahmen (damit sind die Algorithmen aus der Vorlesung gemeint, die die AVL-Eigenschaft erhalten) auf dem entsprechenden Baum aus. Zeichne dabei das Resultat nach jeder einzelnen ausgeführten Operation Insert, Delete und Restructure in einen separaten Baum:

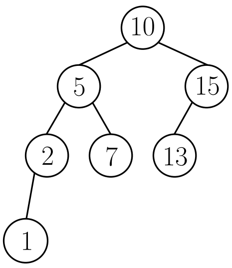
a) Delete$(T, 42)$

T:

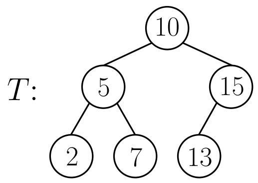


b) Insert$(T, 12)$

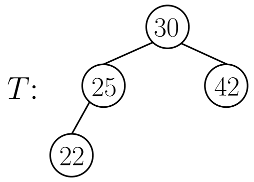
T:



c) $\textsc{Insert}(T, 8)$

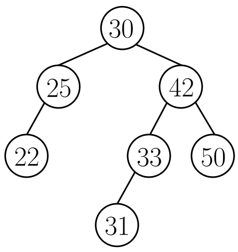


d) $\textsc{Insert}(T, 23)$



e) $\textsc{Insert}(T, 32)$

T:



f) Gib einen AVL-Baum mit 12 Knoten an, der eine Höhe von mindestens 5 besitzt und die Werte 1 bis 12 enthält.

Aufgabe 3: O-Notation und Komplexität **(4+4+3+2+4 Punkte)**

Benutze in dieser Aufgabe nur die in der Vorlesung und großen Übung vorgestellten Begriffe und Definitionen. Seien $f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen.

a) Sortiere die folgenden Klassen nach Inklusion und identifiziere gleiche Klassen. Schreibe beispielsweise $\Omega(f(n)) \subseteq \Omega(g(n)) = \Omega(h(n))$, wenn alle Funktionen in $\Omega(f(n))$ auch in $\Omega(g(n))$ enthalten sind und $\Omega(g(n))$ genau dieselben Funktionen wie $\Omega(h(n))$ enthält. Eine Begründung ist *nicht* erforderlich.

$$\Omega(5^n), \Omega(1), \Omega(\log n), \Omega(n \log(n^2)), \Omega(1/n), \Omega((\log n)^2), \Omega(6^n), \Omega(n^5), \Omega(n \log n).$$

b) Kreuze in der nachfolgenden Tabelle an, ob die Funktion $f(n)$ in der angebenenen Klasse liegt. Eine Begründung ist *nicht* erforderlich.

$f(n)$	$\mathrm{O}(n)$	$\Omega(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\mathrm{O}(2^n)$
$n - \log n$				
$\log(n^n)$				
3^n				
$n^{1.01}$				

c) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f(x) \mapsto f_1(x) \cdot f_2(x)$ sowie $g(x) \mapsto g_1(x) \cdot g_2(x)$. Zeige oder widerlege:

$$f_1 \in \mathrm{O}(g_1) \text{ und } f_2 \in \mathrm{O}(g_2) \quad \Rightarrow \quad f \in \mathrm{O}(g)$$

d) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f(x) \mapsto f_1(x) \cdot f_2(x)$ sowie $g(x) \mapsto g_1(x) \cdot g_2(x)$. Zeige oder widerlege:

$$f \in \mathrm{O}(g) \quad \Rightarrow \quad f_1 \in \mathrm{O}(g_1) \text{ und } f_2 \in \mathrm{O}(g_2)$$

e) In dieser Aufgabe betrachten wir einen Algorithmus, der die n Elemente $a_1, \ldots, a_n$ als Eingabe bekommt. Für jedes Paar $\{a_1, a_2\}, \ldots, \{a_1, a_n\}, \{a_2, a_3\}, \ldots, \{a_{n-1}, a_n\}$ von verschiedenen Elementen benötigt der Algorithmus $42 \log(n) + 17$ Rechenschritte. Welche asymptotische Laufzeit hat der Algorithmus? Welche asymptotische Laufzeit hat der Algorithmus, wenn nur die Hälfte der Paare betrachtet werden muss? *Begründe* deine Antwort!

Aufgabe 4: Rekursionen **(4+3+4+3 Punkte)**

a) Wie lautet das Mastertheorem aus der Vorlesung?

b) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion

$$T(n) = 5 \cdot T\left(\frac{2n}{5}\right) + n \log n + 5 \cdot T\left(\frac{n}{5}\right) + 2n^2.$$

Bestimme die Werte aller im Mastertheorem auftretenden Parameter.

c) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion

$$T(n) = 125 \cdot T\left(\frac{n}{5}\right) + 42.$$

Bestimme die Werte aller im Mastertheorem auftretenden Parameter.

d) Bestimme mit Hilfe des Mastertheorems das asymptotische Wachstum der Rekursion

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{2n}{3}\right) + 10 \cdot T\left(\frac{n}{6}\right) + 2n^3.$$

Bestimme die Werte aller im Mastertheorem auftretenden Parameter.

Aufgabe 5: Mediane **(2+2+8 Punkte)**

a) Wie lautet die Definition eines Rang-k Elementes aus einer Menge X? Welchen Rang besitzt der Median?

b) Welche Laufzeit $T(n)$ besitzt der Select-Algorithmus? Gib die Rekursionsgleichung von $T(n)$ an.

c) Bestimme mithilfe des Select-Algorithmus das Rang-5 Element von $X = \{3, 6, 10, 2, 30, 11, 13, 18, 20, 25, 1, 4, 7, 17, 21\}$. Gib dabei alle Aufrufe des Select-Algorithmus und deren Rückgabewert m an. Gib außerdem die Fünfergruppen und die Mengen M', X_1, X_2 und X_3 an.

Aufgabe 6: Sortieren **(8+2+1 Punkte)**

Wir betrachten MERGESORT zum Sortieren von n Zahlen.

$A =$	7	4	6	3	5	2	8	1
1. $A =$								
2. $A =$								
3. $A =$								
4. $A =$								
5. $A =$								
6. $A =$								
7. $A =$								

Abbildung 3: Mergesort im Array A.

a) Sortiere das Array A aus Abbildung 3 mit MERGESORT. Gib (separat und in chronologischer Reihenfolge) das Array A nach jedem Aufruf von MERGE an. Elemente, die nicht zum im jeweiligen Mergeschritt betrachteten Teilarray gehören, müssen nicht angegeben werden. Die Aufrufe von MERGE auf einem Teilarray der Länge 1 müssen nicht angegeben werden. Nutze zur Bearbeitung der Aufgabe die in Abbildung 3 gegebene Tabelle.

b) Wende auf das Array B aus Abbildung 4 MERGE$(B, 1, 4, 8)$ an. Gib das Ergebnis in der in Abbildung 4 gegebenen Tabelle an.

$B =$	1	3	17	23	2	14	15	42
Ergebnis $B =$								

Abbildung 4: Das Array B.

c) Gib die in der Vorlesung vorgestellte Definition eines stabilen Sortierverfahrens an.

Aufgabe 7: Algorithmenentwurf **(4+6+2 Punkte)**

Gegeben sei ein einfacher, zusammenhängender und ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten. Für zwei Knoten $v, w \in V$ ist die Distanz $d(v, w)$ definiert als Länge eines kürzesten Weges von v nach w. Wir wollen in dieser Aufgabe einen Algorithmus entwerfen, der den Durchmesser $\operatorname{diam}(G) = \max\limits_{v,w \in V} d(v, w)$ des Graphen G bestimmt.

a) Gib eine kurze Beschreibung eines Algorithmus an, der in Zeit $\mathcal{O}(n + m)$ läuft und für einen gegebenen Knoten v den am weitesten von v entfernten Knoten w und $d(v, w)$ bestimmt.

b) Gib den in a) beschriebenen Algorithmus in Pseudocode an.

c) Beschreibe kurz, wie dieser Algorithmus benutzt werden kann um den Durchmesser von G zu bestimmen.

Aufgabe 8: Kurzfragen **(2+2+2+2+2 Punkte)**

a)	Das Einfügen eines Elementes in einen AVL-Baum erfordert höchstens eine RESTRUCTURE-Operation.	☐ wahr ☐ falsch
b)	Jedes vergleichsbasierte Sortierverfahren hat Laufzeit $\Omega(n \log n)$.	☐ wahr ☐ falsch
c)	MERGESORT ist ein stabiles Sortierverfahren.	☐ wahr ☐ falsch
d)	Die n-te Fibonacci-Zahl liegt in $O(2^n)$.	☐ wahr ☐ falsch
e)	Jeder Graph mit vier Knoten und vier Kanten besitzt einen Hamiltonpfad.	☐ wahr ☐ falsch

Viel Erfolg ☺