

Kapitel 4.6: AVL-Bäume

*Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2020/21*

Prof. Dr. Sándor Fekete

4.1 Grundoperationen

Langsam:

- $O(n)$: *lineare Zeit*

Alle Objekte anschauen

Sehr schnell:

- $O(1)$: *konstante Zeit*

Immer gleich schnell, egal wie groß S ist.

Schnell:

- $O(\log n)$: *logarithmische Zeit*

Wiederholtes Halbieren

4.5 Binäre Suchbäume

4.5 Binäre Suchbäume

Schnell:

4.5 Binäre Suchbäume

Schnell:

- $O(\log n)$: *logarithmische Zeit*

4.5 Binäre Suchbäume

Schnell:

- $O(\log n)$: *logarithmische Zeit*
- $O(h)$: *Tiefe des Baumes*

4.5 Binäre Suchbäume

Schnell:

- $O(\log n)$: *logarithmische Zeit*
- $O(h)$: *Tiefe des Baumes*

4.5 Binäre Suchbäume

Schnell:

- $O(\log n)$: *logarithmische Zeit*
- $O(h)$: *Tiefe des Baumes*

Also: Wie können wir die Tiefe des Baumes auf $O(\log n)$ beschränken?

4.6 AVL-Bäume

4.6 AVL-Bäume

Definition 4.7 (Nach Adel'son-Vel'skiĭ und Landis, 1962)

4.6 AVL-Bäume

Definition 4.7 (Nach Adel'son-Vel'skiĭ und Landis, 1962)

(1) Ein binärer Suchbaum ist *höhenbalanciert*, wenn sich für jeden inneren Knoten v die Höhe der beiden Kinder von v um höchstens 1 unterscheidet.

4.6 AVL-Bäume

Definition 4.7 (Nach Adel'son-Vel'skiĭ und Landis, 1962)

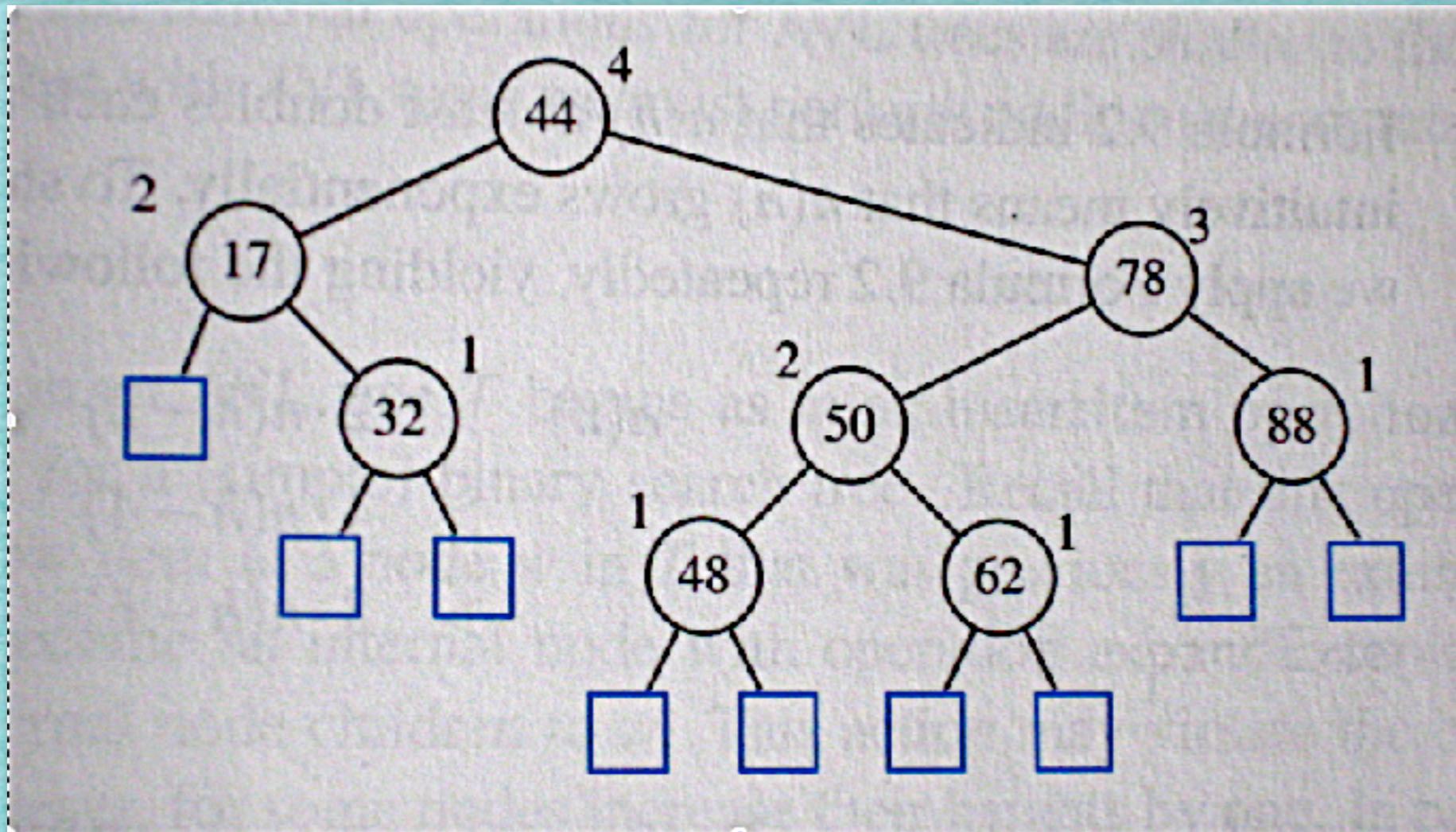
- (1)** Ein binärer Suchbaum ist *höhenbalanciert*, wenn sich für jeden inneren Knoten v die Höhe der beiden Kinder von v um höchstens 1 unterscheidet.
- (2)** Ein höhenbalancierter Suchbaum heißt auch *AVL-Baum*.

4.6 AVL-Bäume

Definition 4.7 (Nach Adel'son-Vel'skiĭ und Landis, 1962)

(1) Ein binärer Suchbaum ist höhenbalanciert, wenn sich für jeden inneren Knoten v die Höhe der beiden Kinder von v um höchstens 1 unterscheidet.

(2) Ein höhenbalancierter Suchbaum heißt auch AVL-Baum.



4.6 AVL-Bäume

4.6 AVL-Bäume

Satz 4.8

4.6 AVL-Bäume

Satz 4.8

Ein AVL-Baum mit n Knoten hat höchstens Höhe $O(\log n)$.

4.6 AVL-Bäume

Satz 4.8

Ein AVL-Baum mit n Knoten hat höchstens Höhe $O(\log n)$.

Beweis:

4.6 AVL-Bäume

Satz 4.8

Ein AVL-Baum mit n Knoten hat höchstens Höhe $O(\log n)$.

Beweis:

Wie gesehen!

4.6 AVL-Bäume

Satz 4.8

Ein AVL-Baum mit n Knoten hat höchstens Höhe $O(\log n)$.

Beweis:

Wie gesehen!

Damit noch offen:

4.6 AVL-Bäume

Satz 4.8

Ein AVL-Baum mit n Knoten hat höchstens Höhe $O(\log n)$.

Beweis:

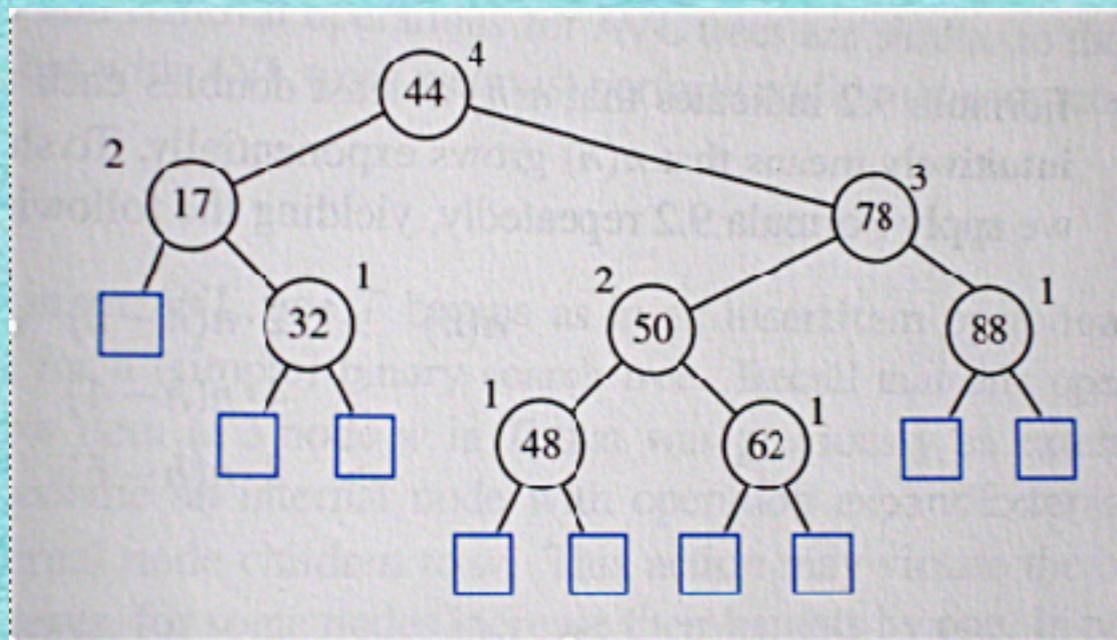
Wie gesehen!

Damit noch offen:

Wie erhält man Höhenbalanciertheit in dynamischen Situationen?

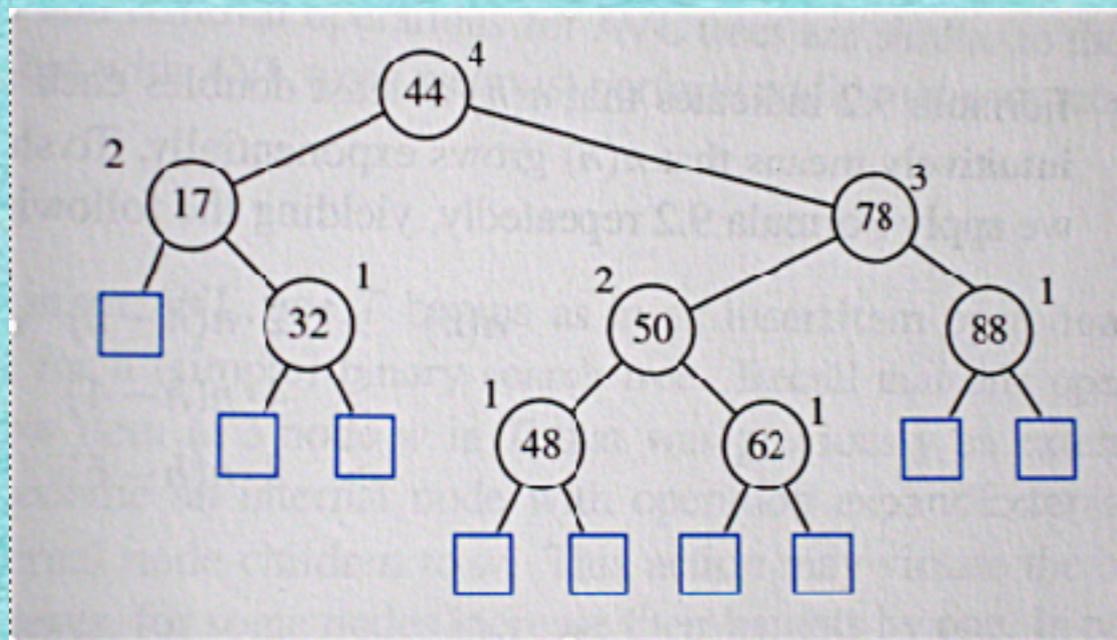
Einfügen („INSERT“)

Einfügen („INSERT“)



Einfügen („INSERT“)

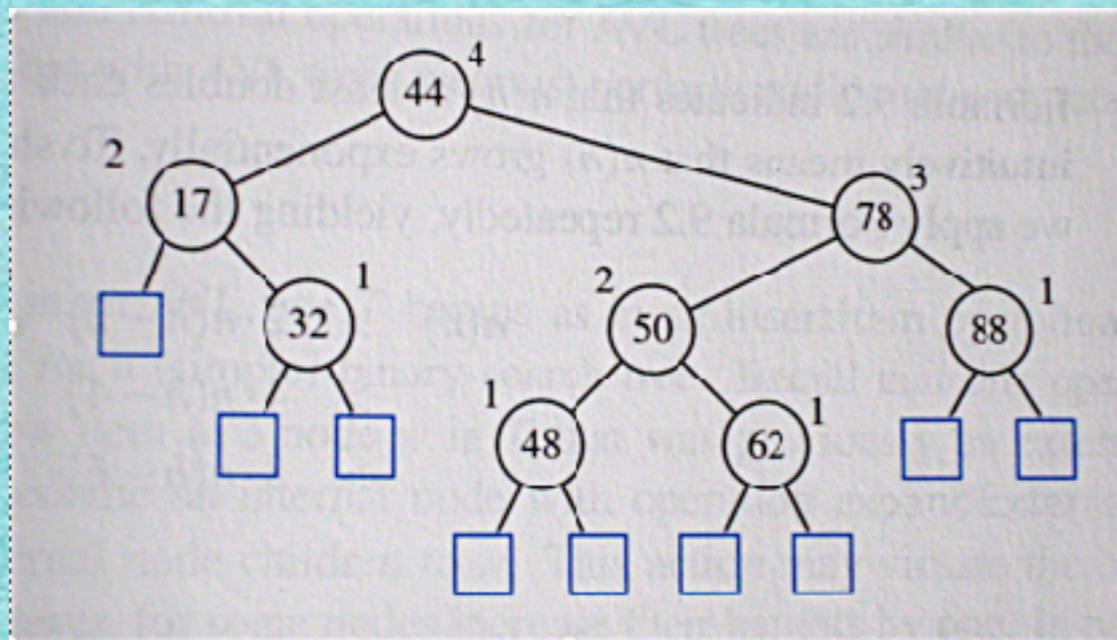
Aufgabe:



Einfügen („INSERT“)

Aufgabe:

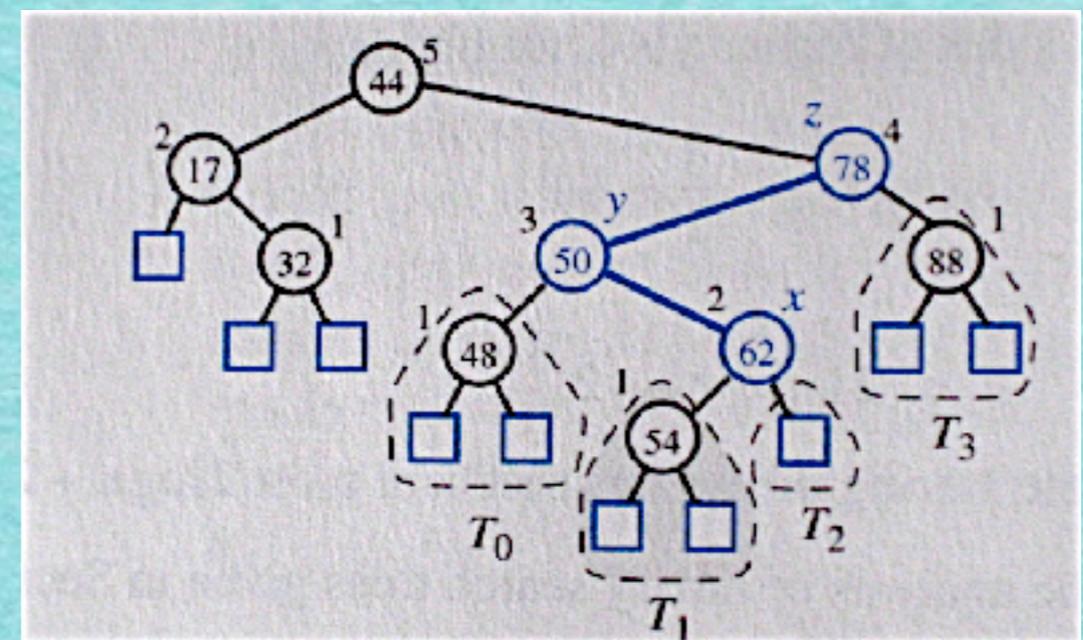
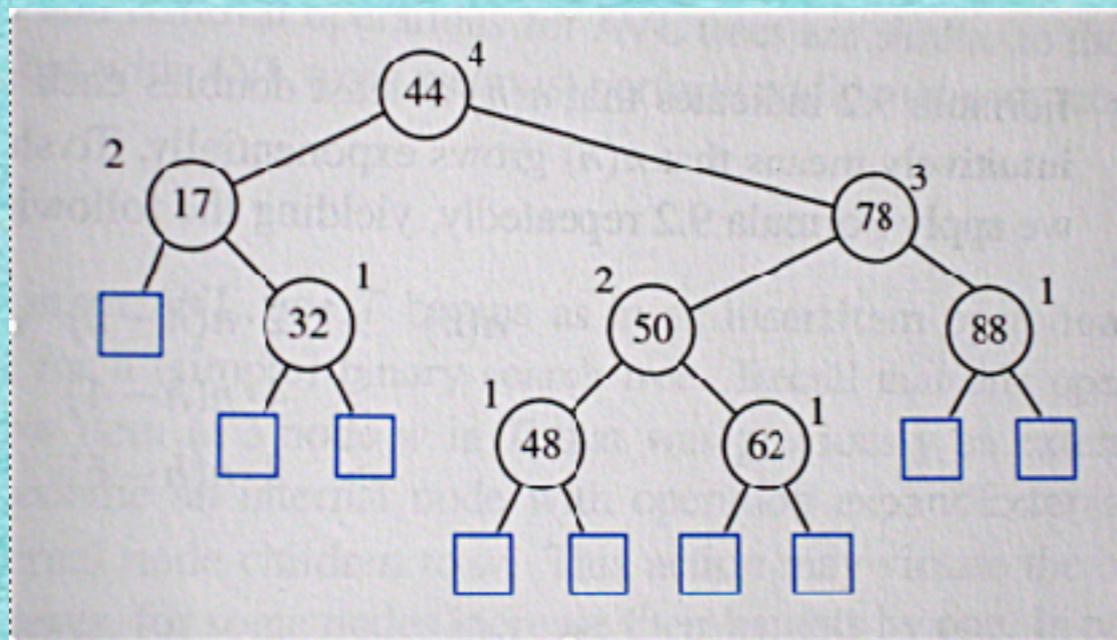
- *Füge 54 ein!*



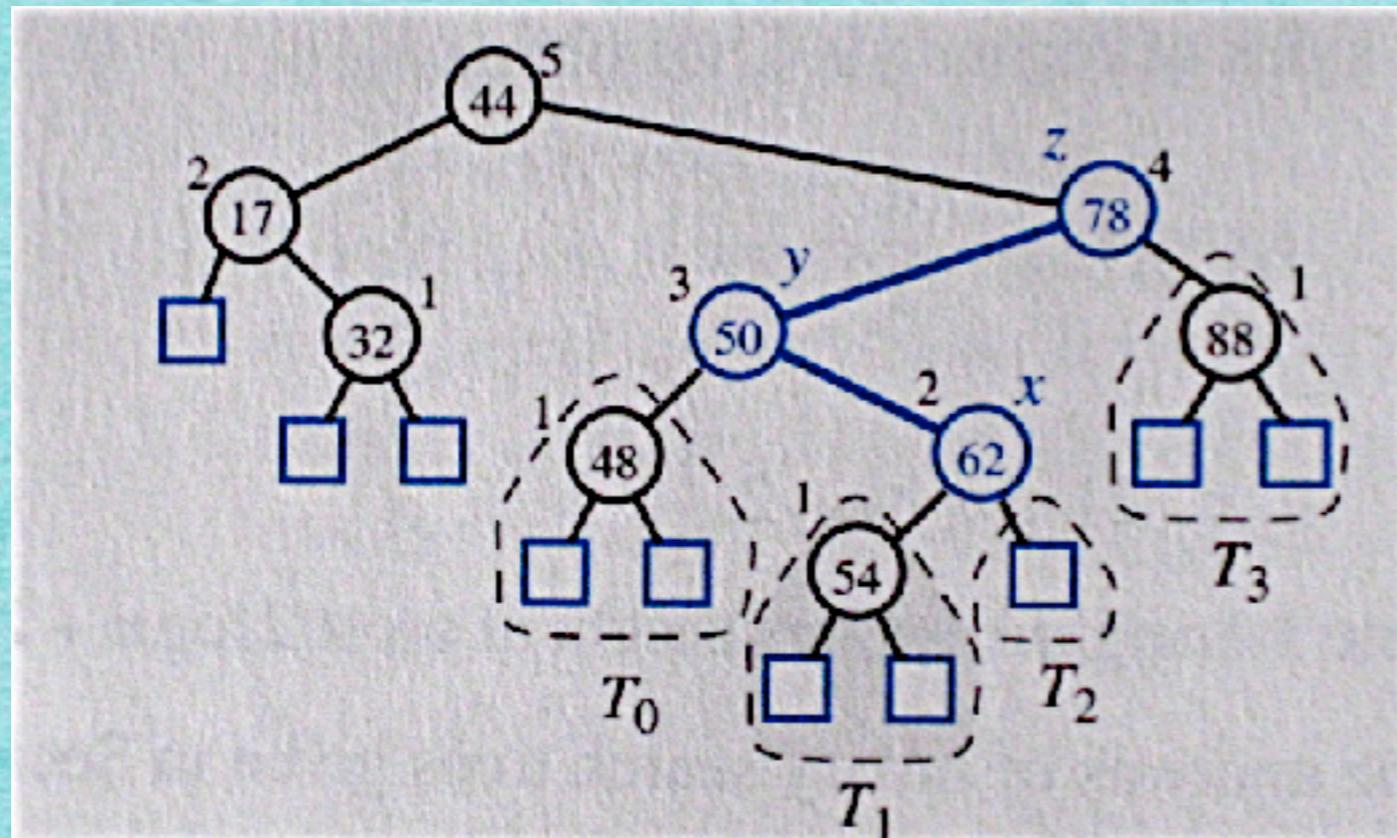
Einfügen („INSERT“)

Aufgabe:

- *Füge 54 ein!*

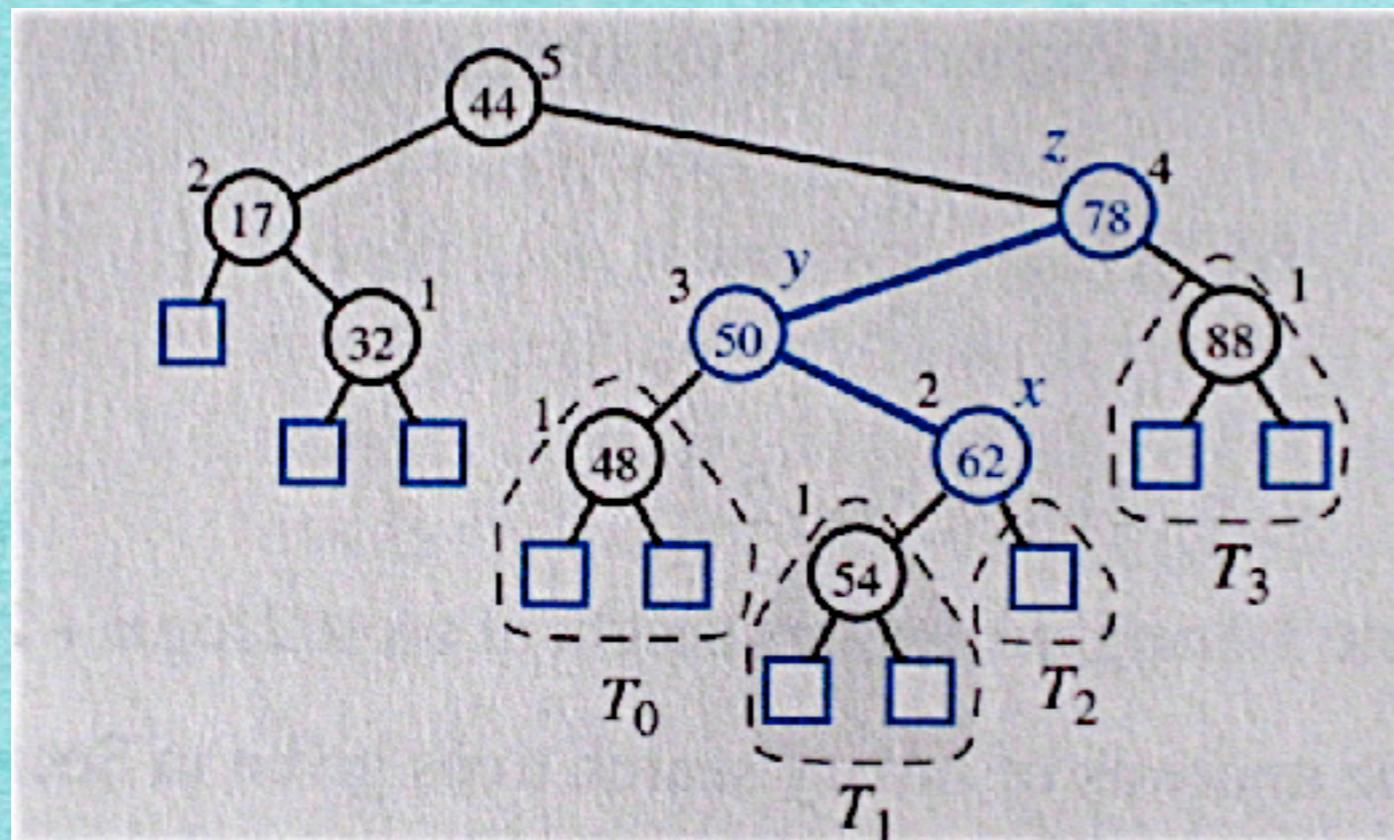


Einfügen



Einfügen

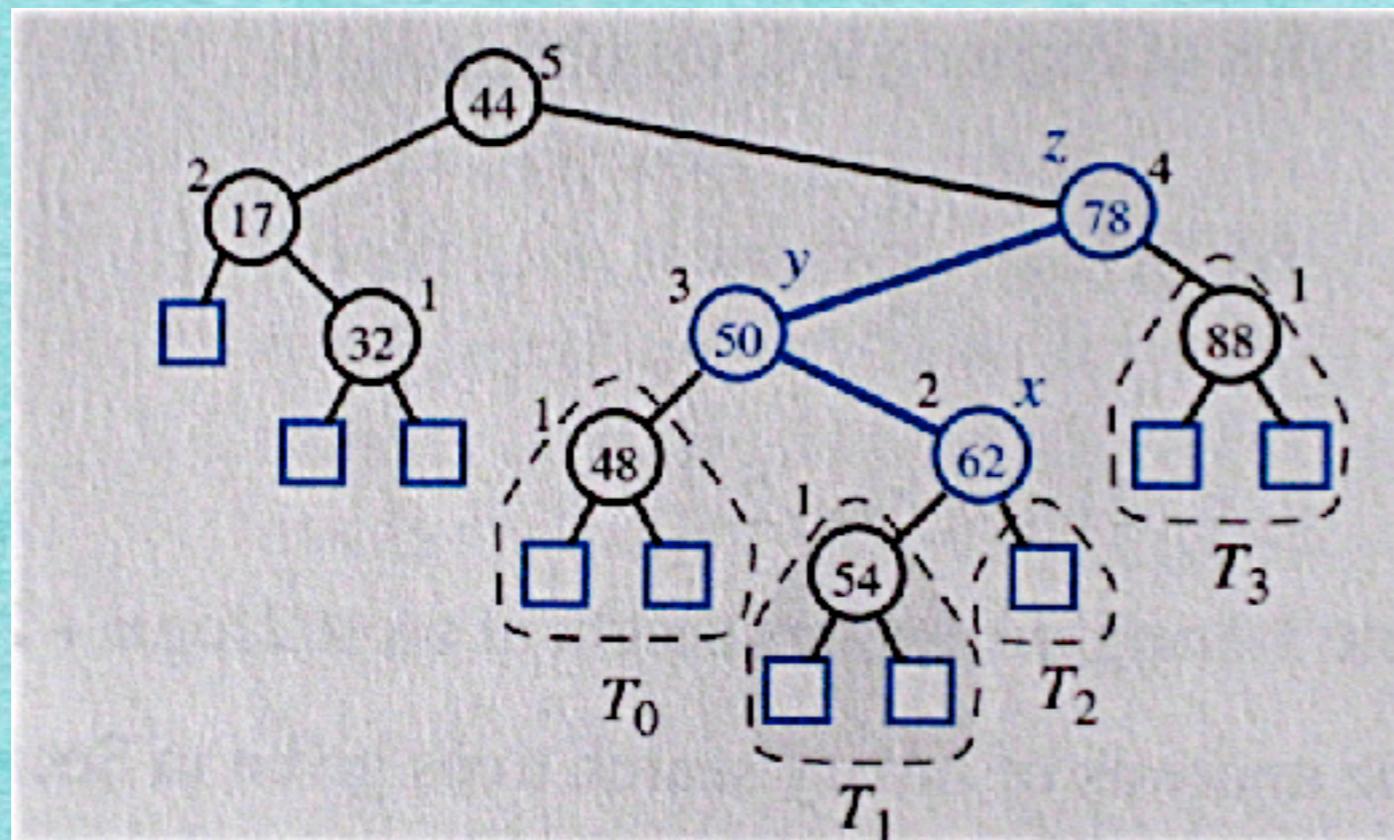
Idee:



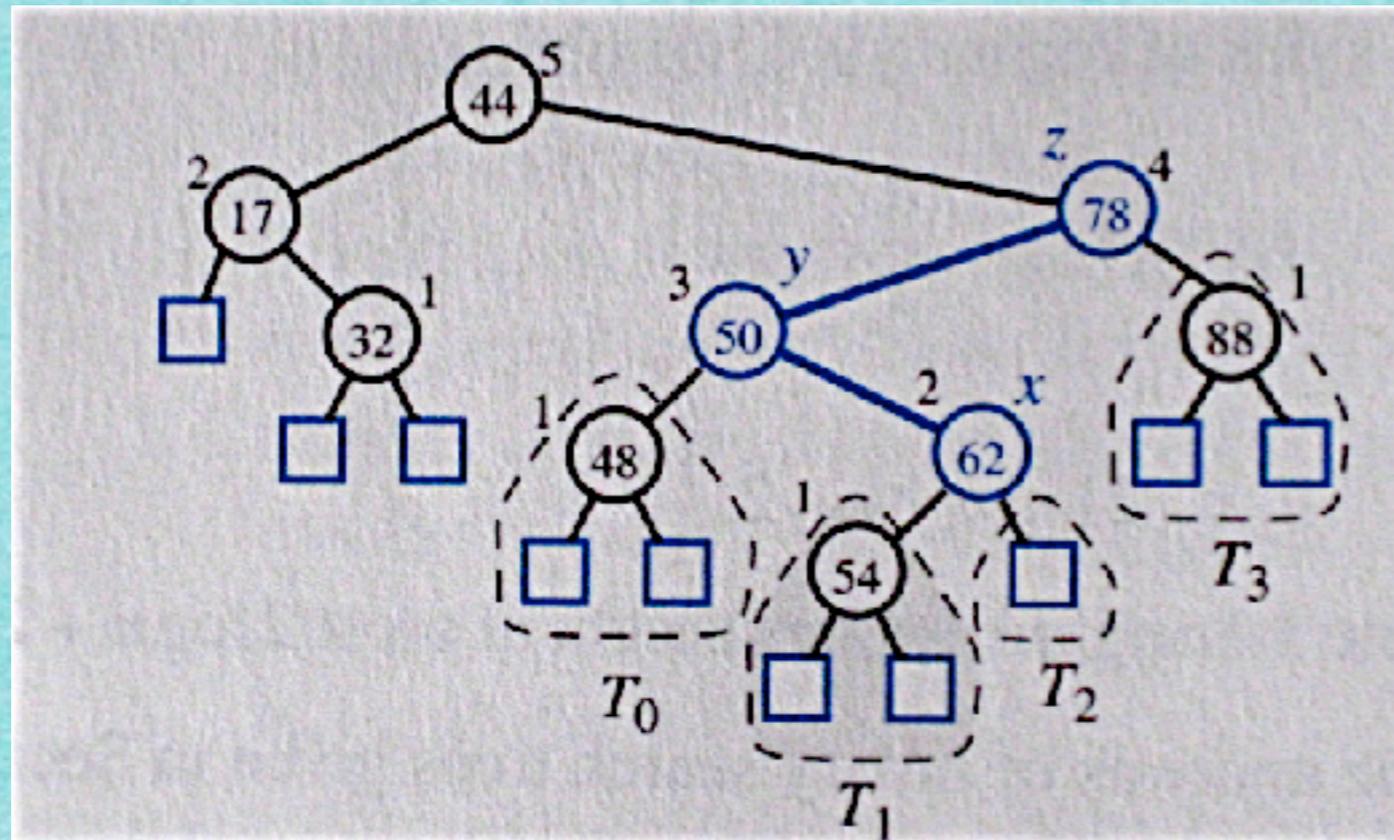
Einfügen

Idee:

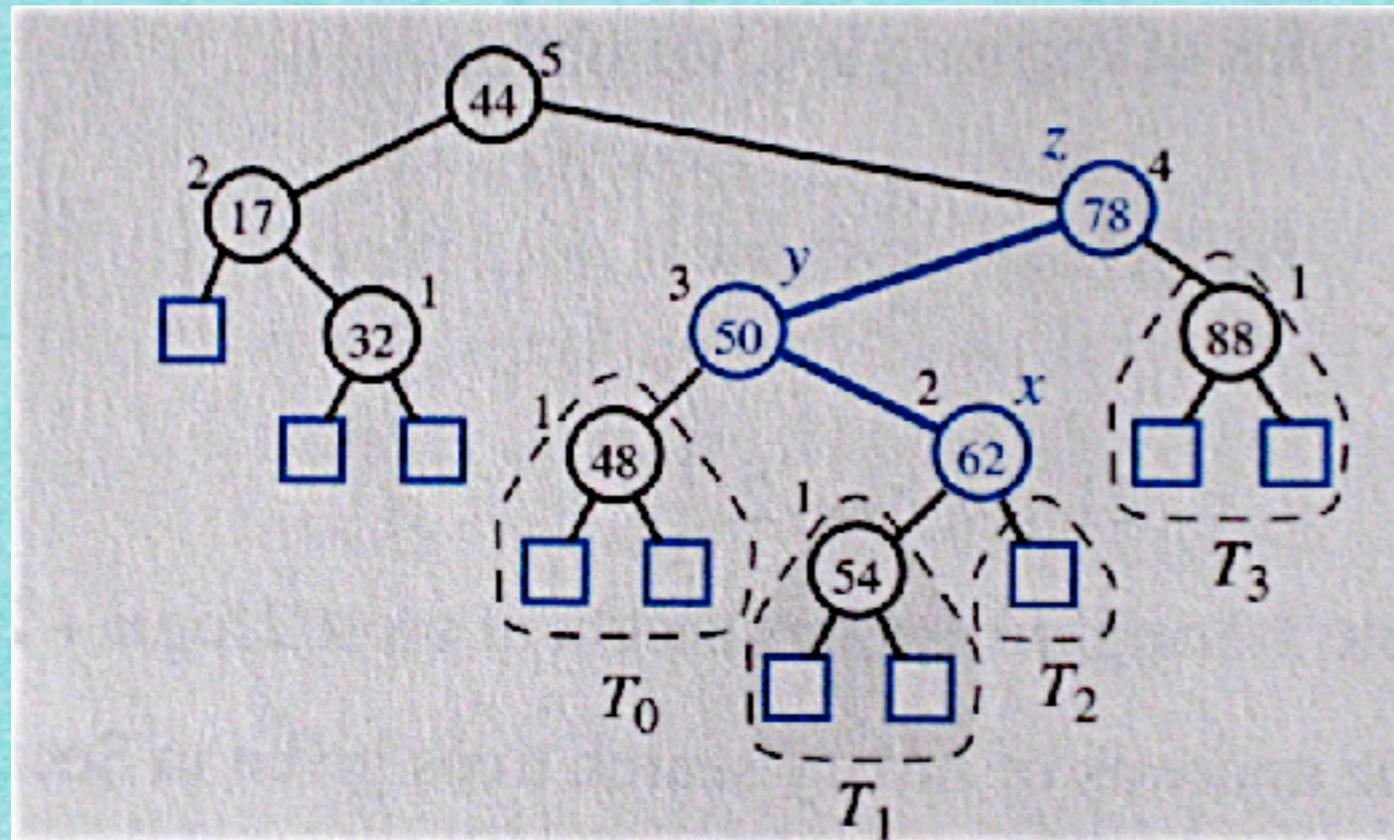
- *Höhenbalanciertheit ändert sich beim Einfügen einzelner Elemente nur wenig - und lokal!*



Einfügen

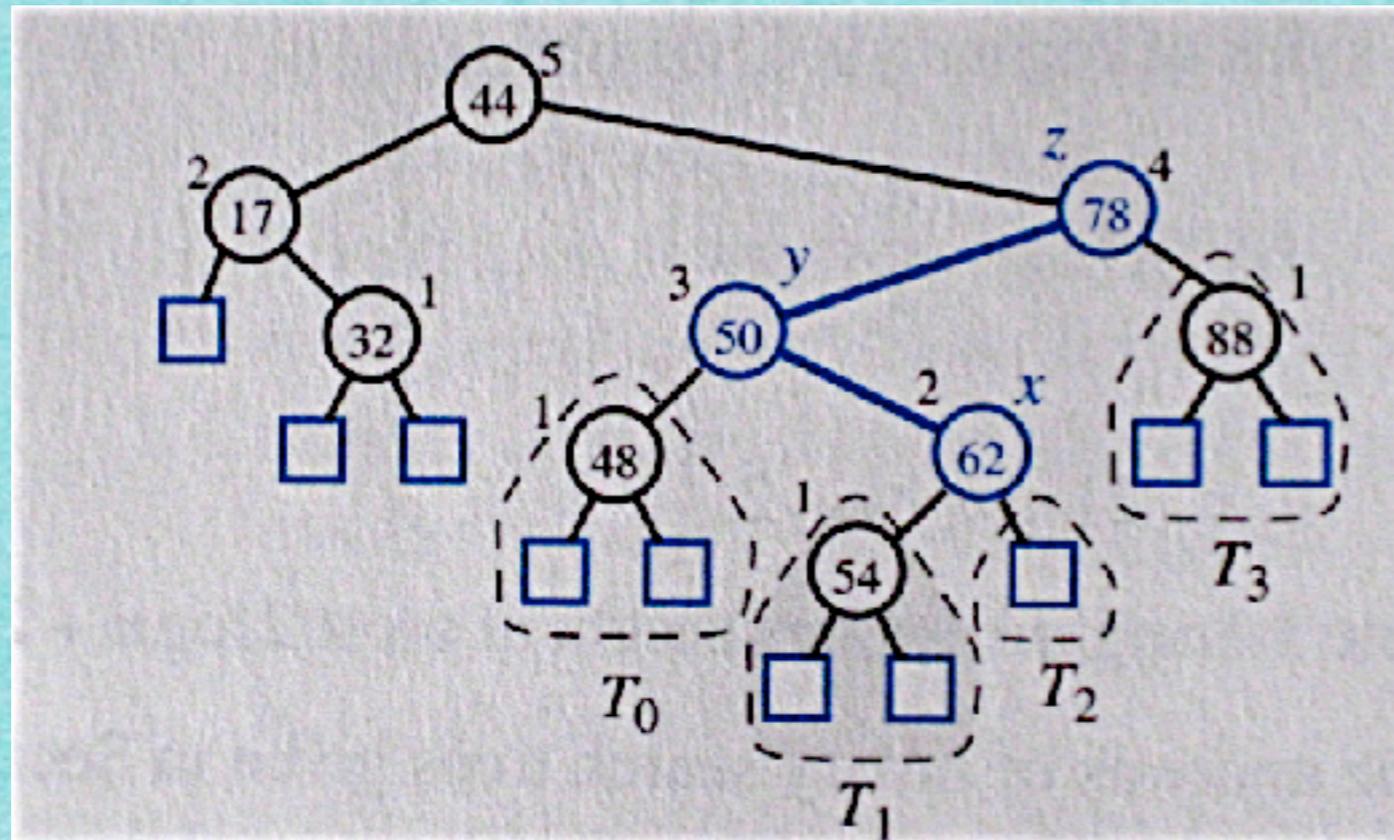


Einfügen



Was tun?

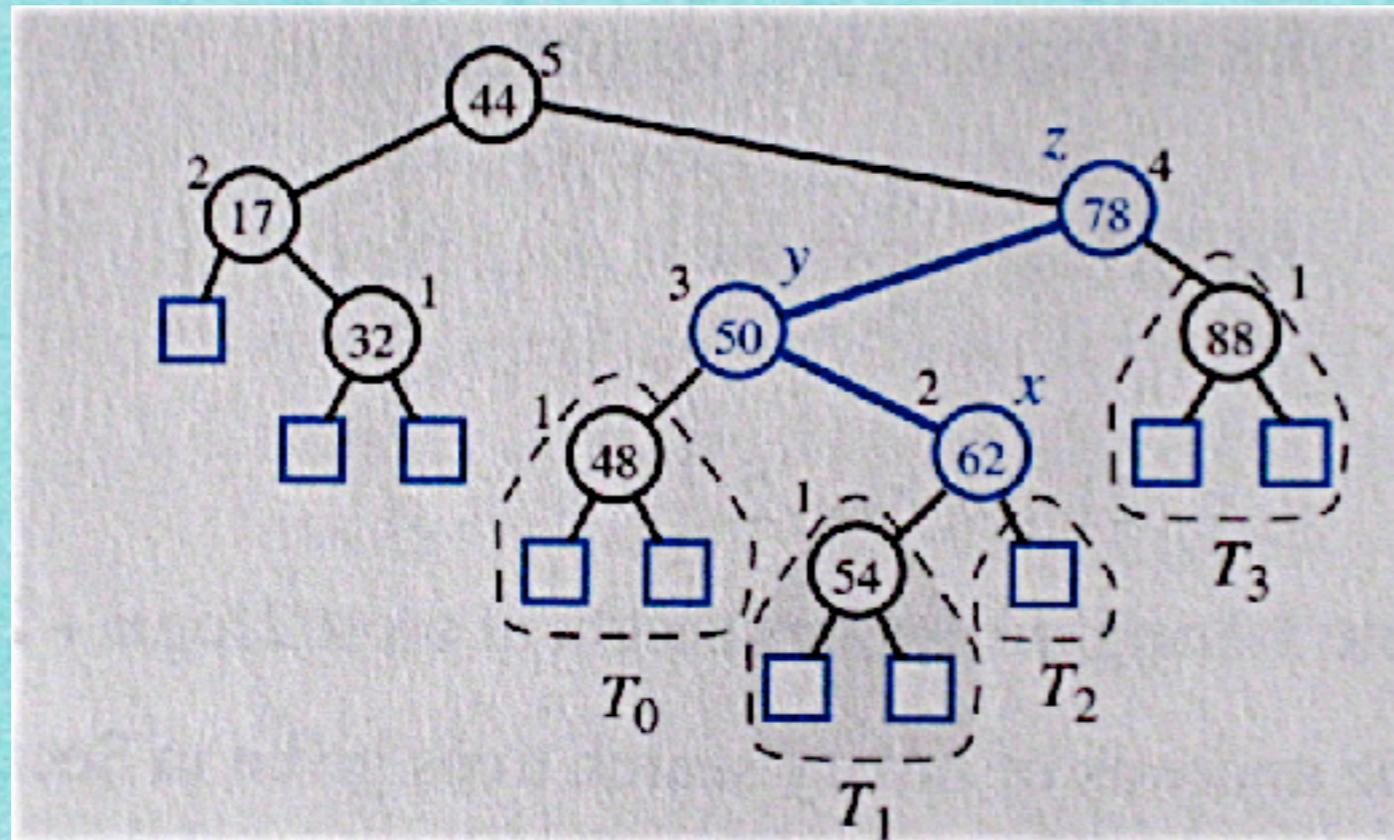
Einfügen



Was tun?

- *Teilbaum der 78 ist nicht höhenbalanciert.*

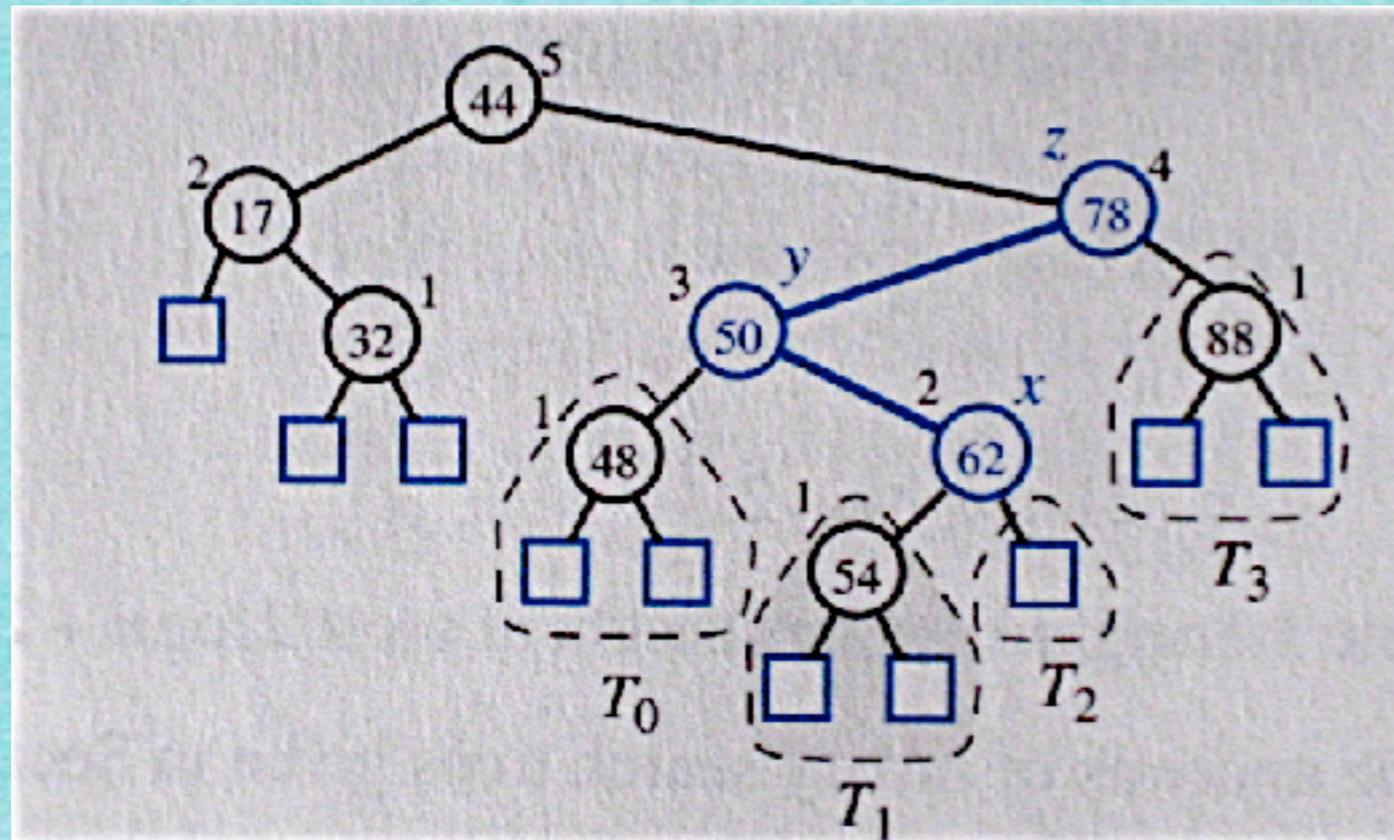
Einfügen



Was tun?

- *Teilbaum der 78 ist nicht höhenbalanciert.*
- *Die Höhe sollte höchstens 3 sein, damit auch der ganze Baum unter der 44 höhenbalanciert ist.*

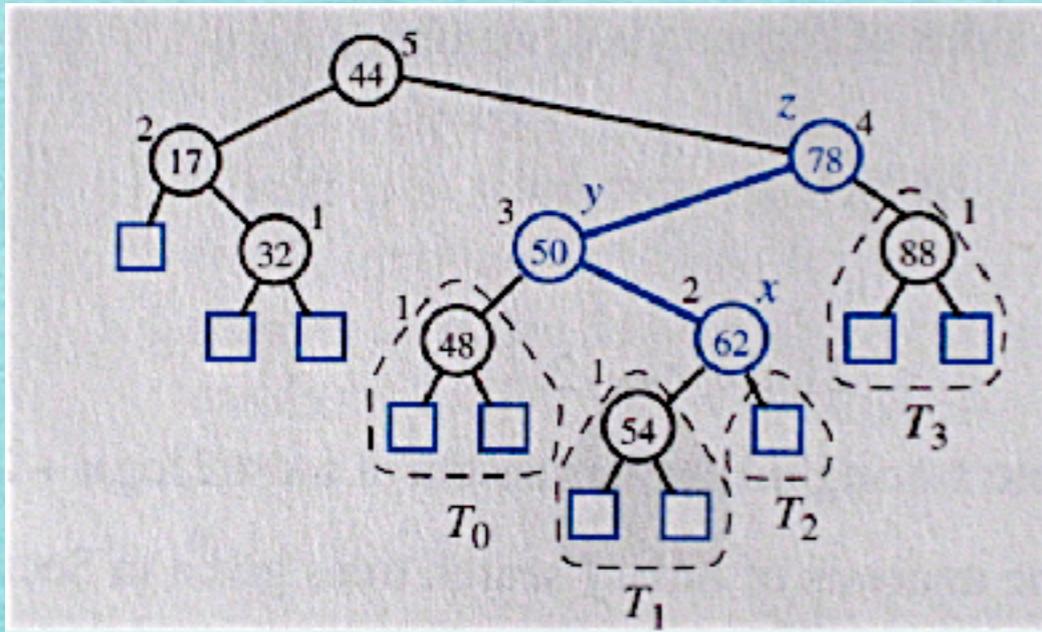
Einfügen



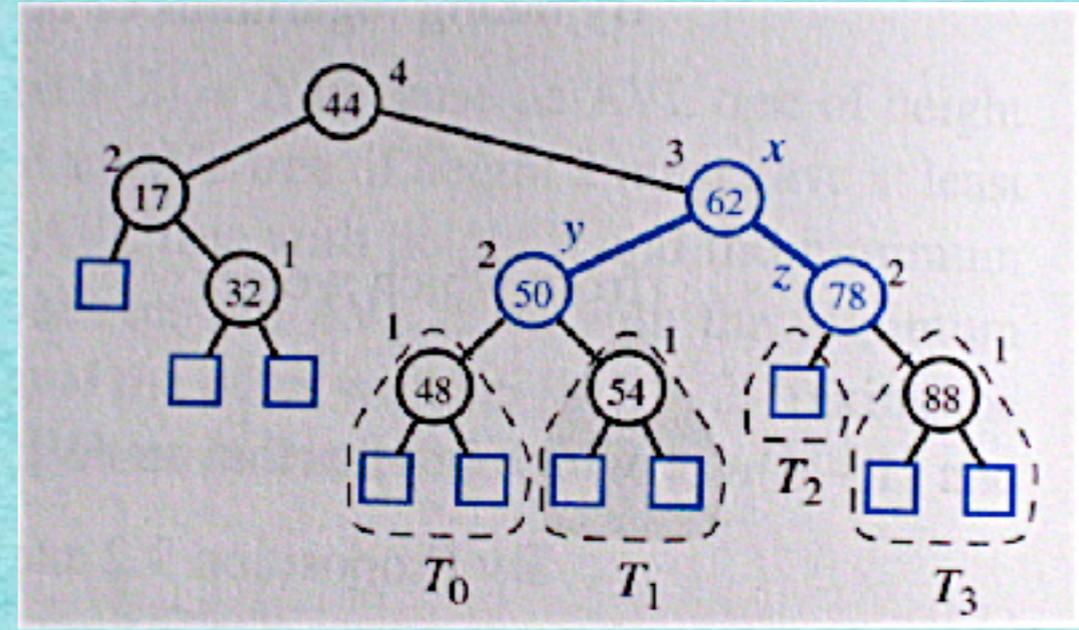
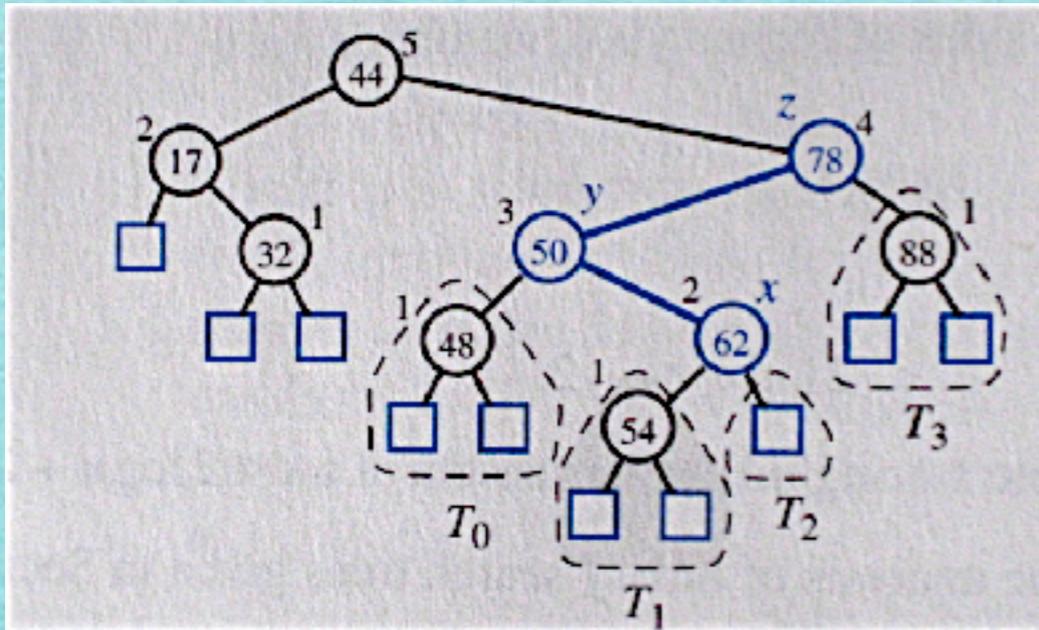
Was tun?

- *Teilbaum der 78 ist nicht höhenbalanciert.*
- *Die Höhe sollte höchstens 3 sein, damit auch der ganze Baum unter der 44 höhenbalanciert ist.*
- *Betrachte Knoten 78, Kind 50, Enkel 62!*

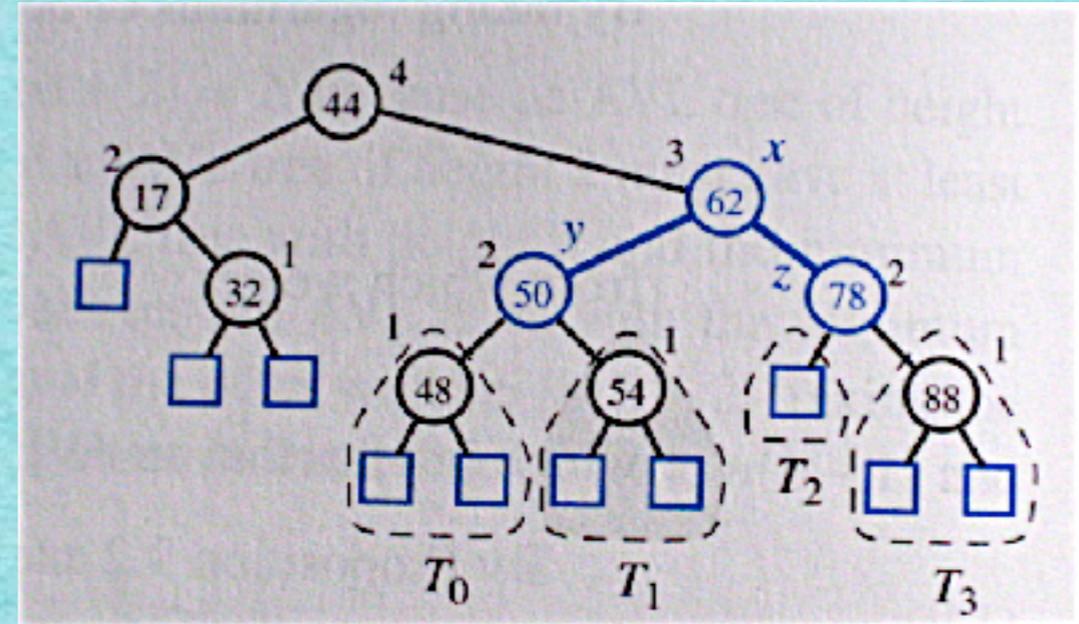
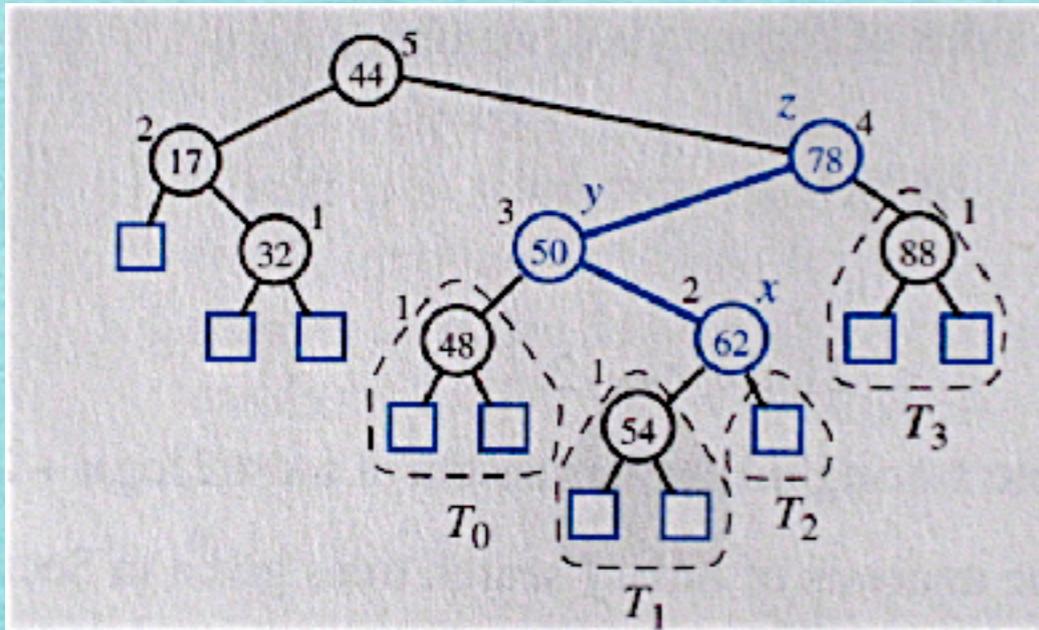
Einfügen



Einfügen

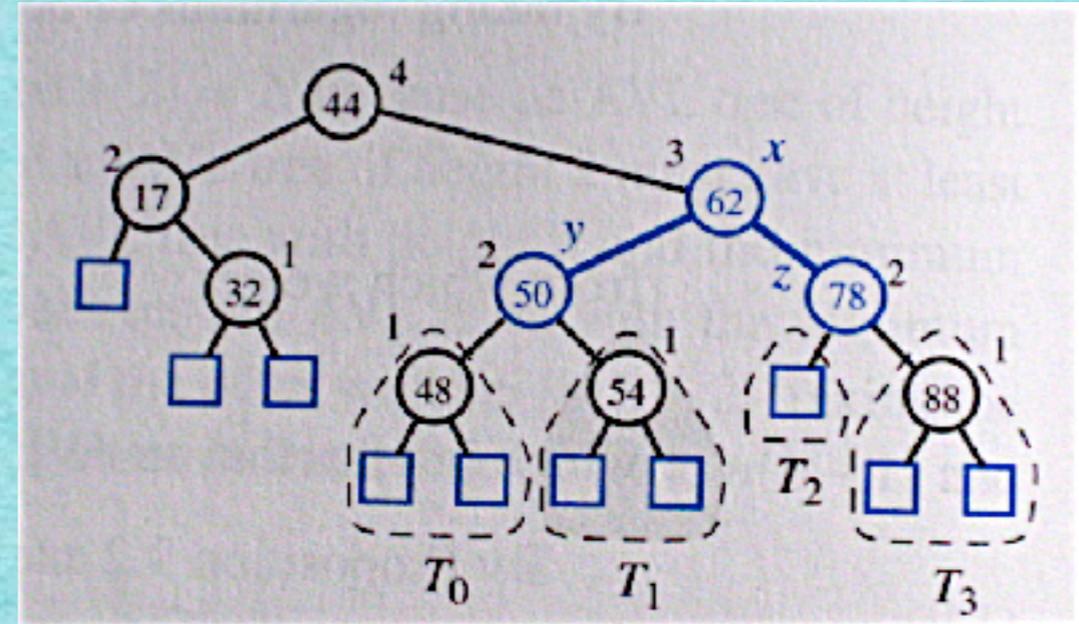
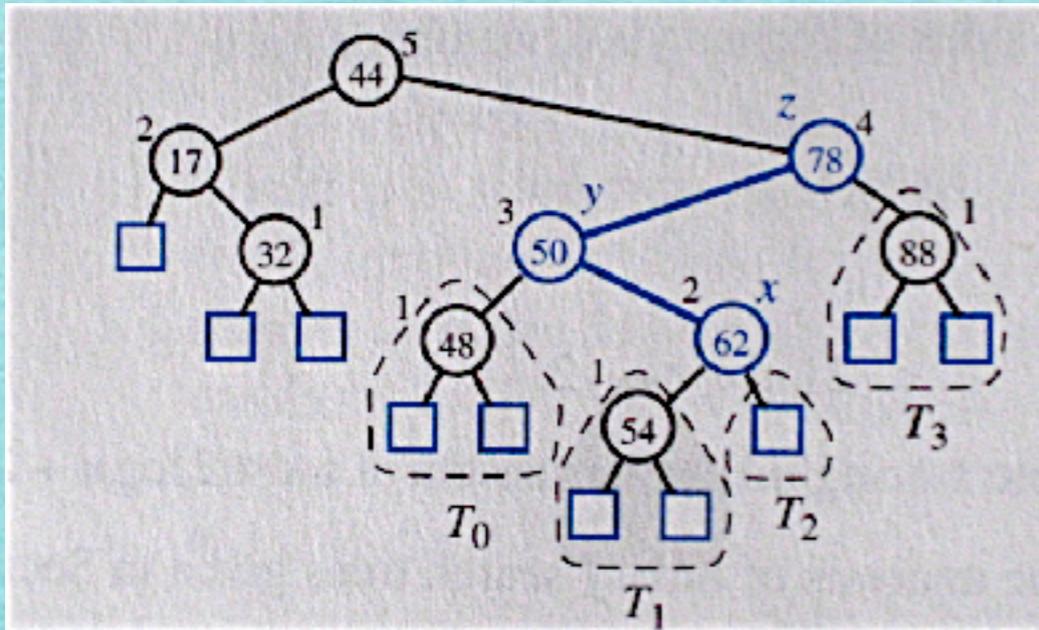


Einfügen



Neuer Baum!

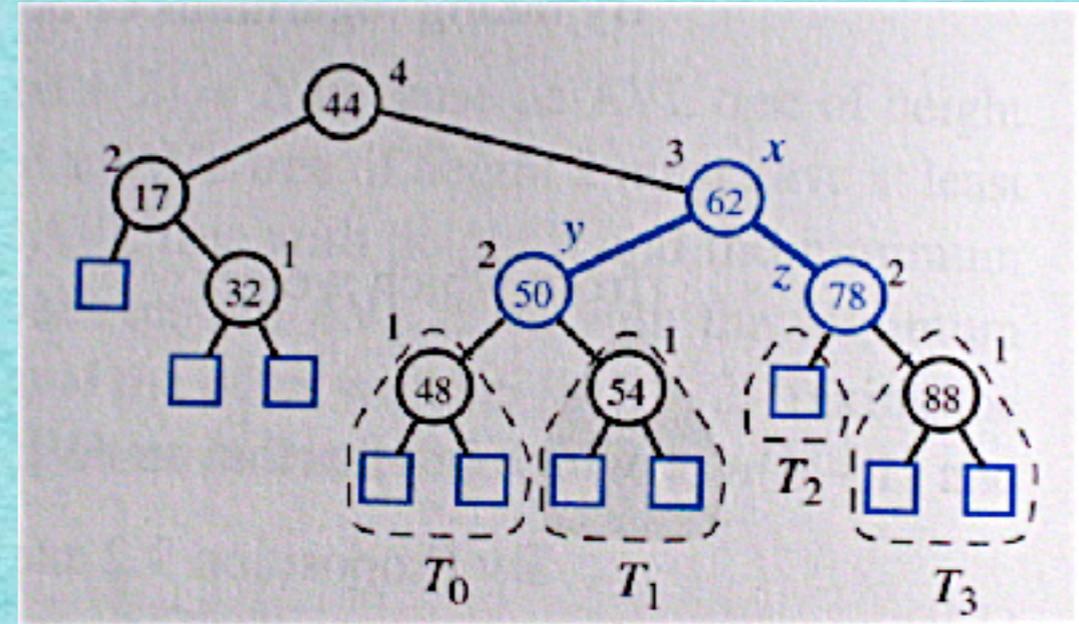
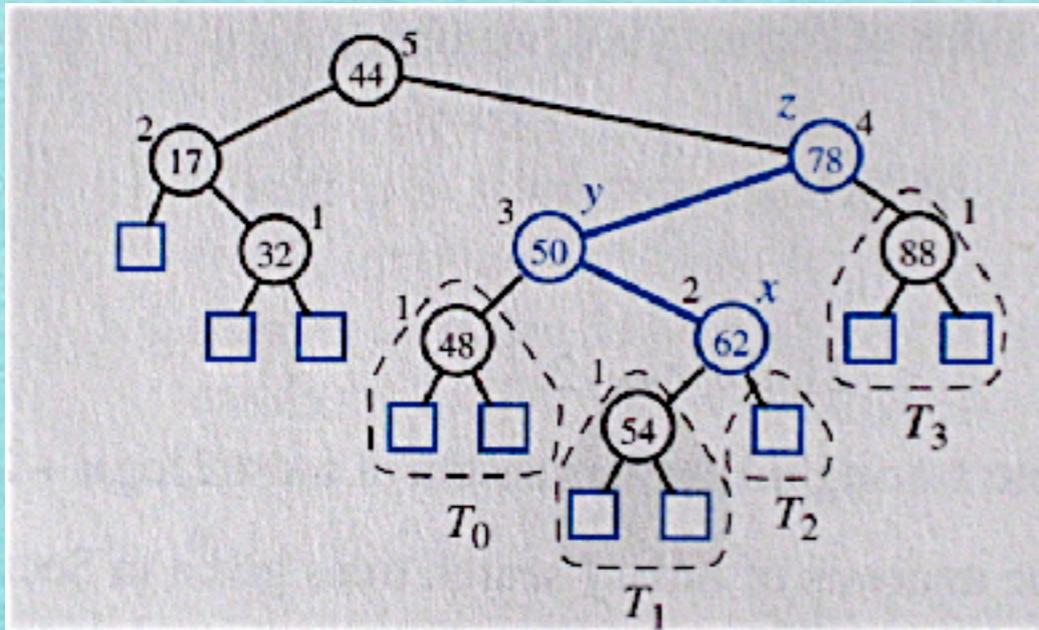
Einfügen



Neuer Baum!

- *Höhenbalanciert*

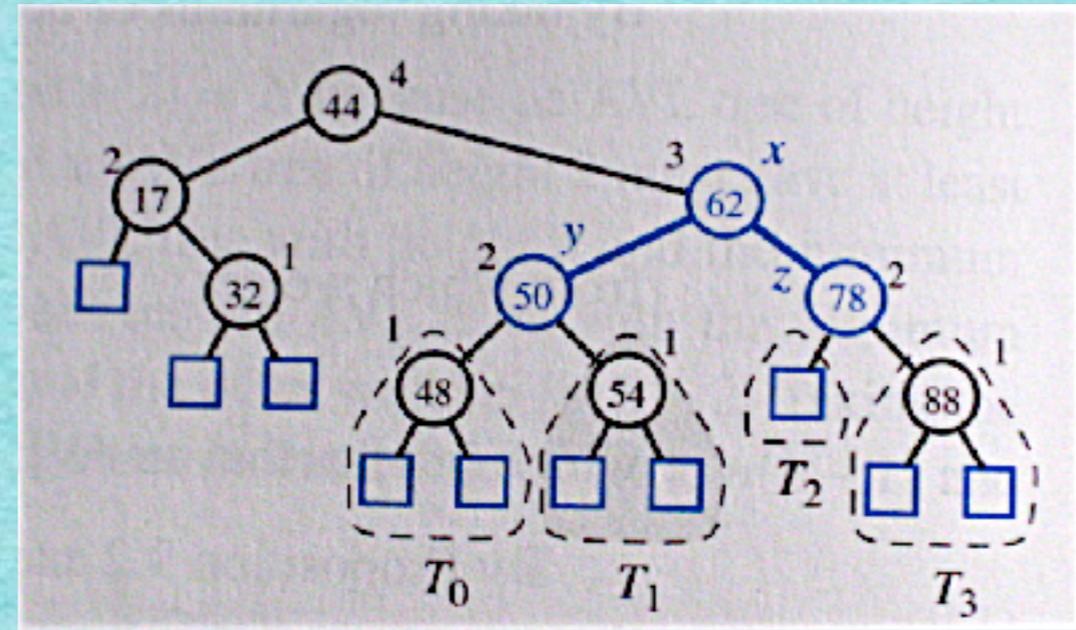
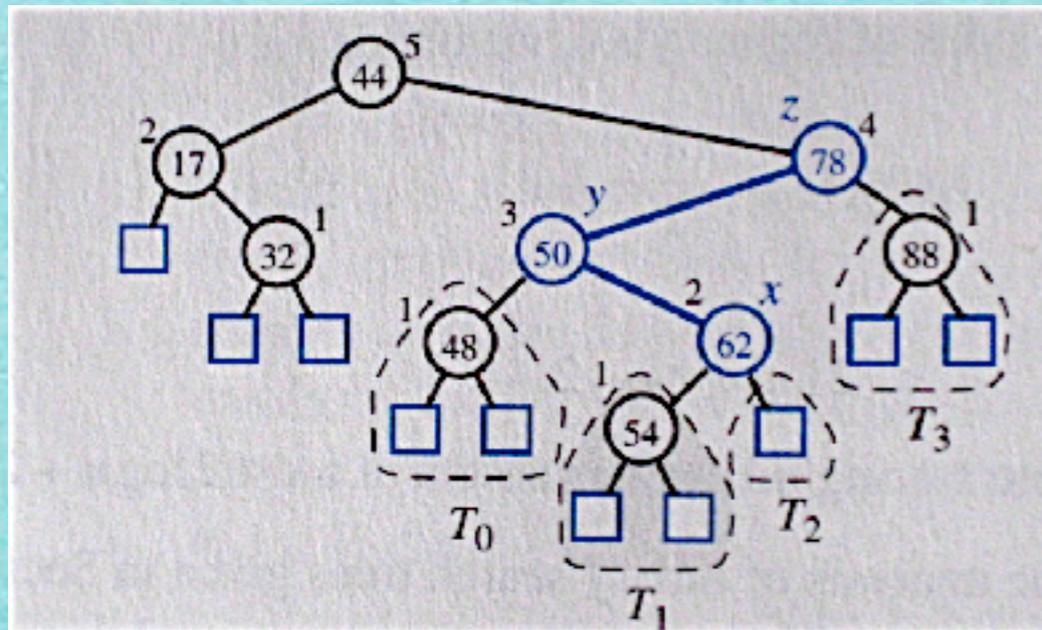
Einfügen



Neuer Baum!

- *Höhenbalanciert*
- *Nur lokale Umsetzung der Knoten 78, 50, 62*

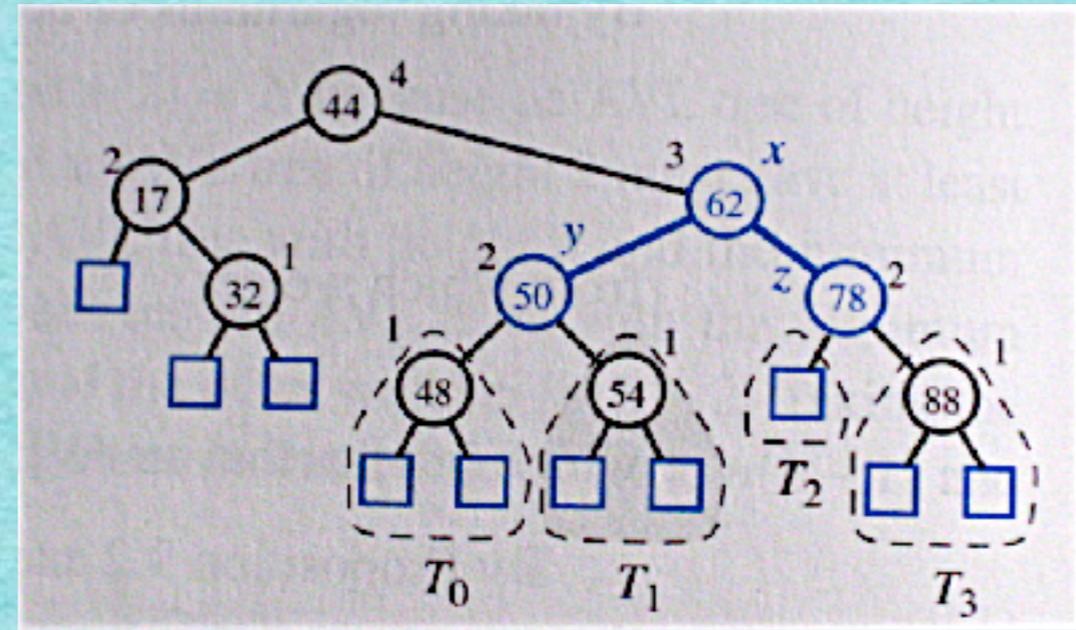
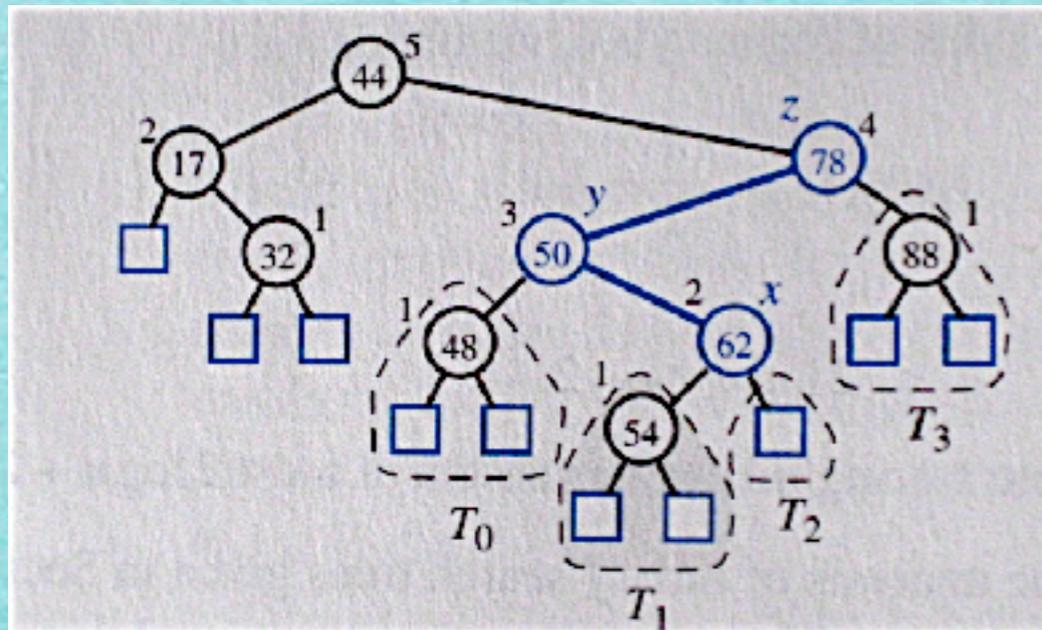
Einfügen



Neuer Baum!

- *Höhenbalanciert*
- *Nur lokale Umsetzung der Knoten 78, 50, 62*
- *Vorher drei Knoten untereinander, jetzt der mittlere über zwei anderen.*

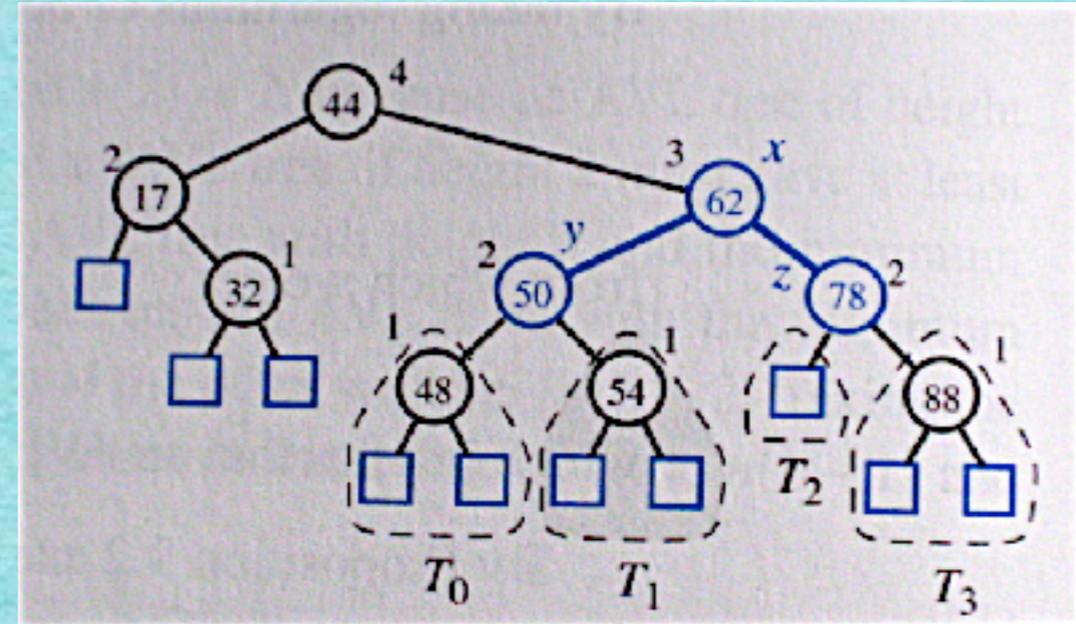
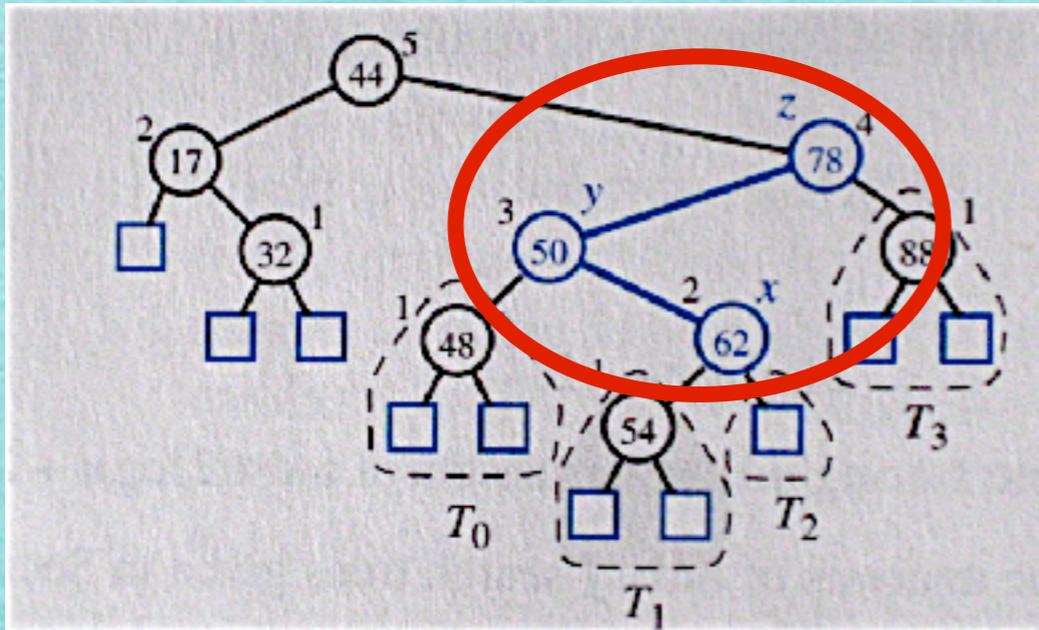
Einfügen



Neuer Baum!

- *Höhenbalanciert*
- *Nur lokale Umsetzung der Knoten 78, 50, 62*
- *Vorher drei Knoten untereinander, jetzt der mittlere über zwei anderen.*
- *„Rotation“*

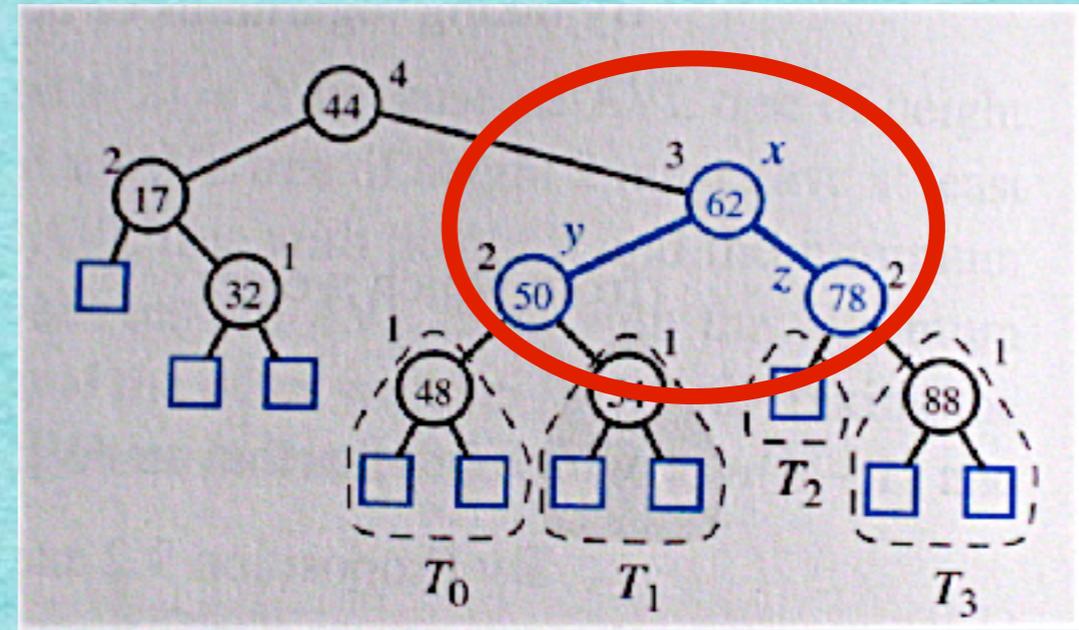
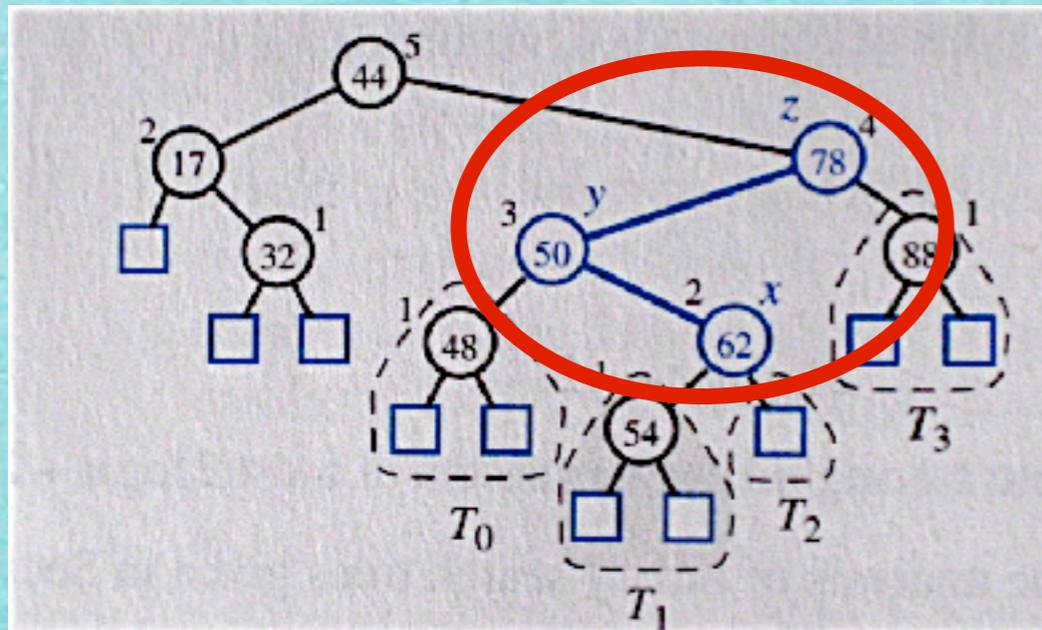
Einfügen



Neuer Baum!

- *Höhenbalanciert*
- *Nur lokale Umsetzung der Knoten 78, 50, 62*
- *Vorher drei Knoten untereinander, jetzt der mittlere über zwei anderen.*
- *„Rotation“*

Einfügen



Neuer Baum!

- *Höhenbalanciert*
- *Nur lokale Umsetzung der Knoten 78, 50, 62*
- *Vorher drei Knoten untereinander, jetzt der mittlere über zwei anderen.*
- *„Rotation“*

Algorithmus 4.9

INPUT:

OUTPUT:

Algorithmus 4.9

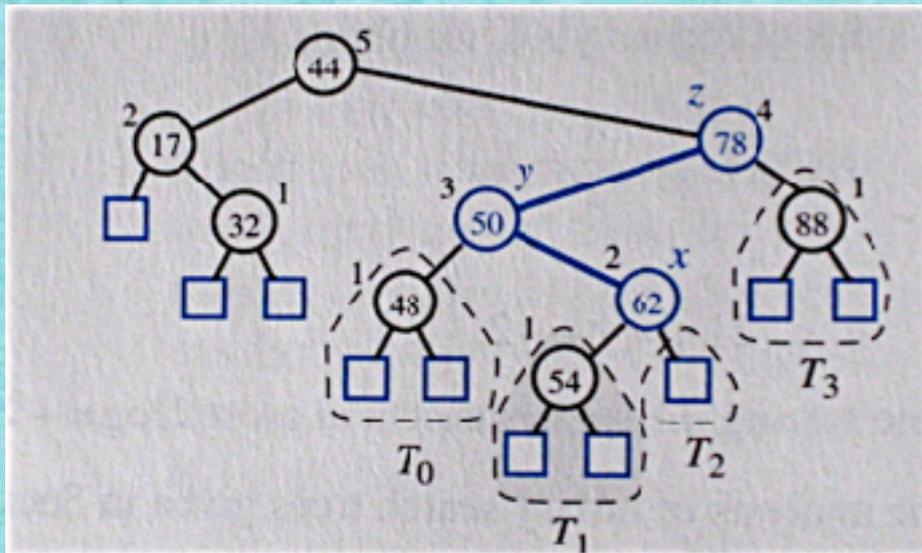
INPUT: Knoten x eines binären Suchbaumes T , Vaterknoten y , Großvaterknoten z

OUTPUT:

Algorithmus 4.9

INPUT: Knoten x eines binären Suchbaumes T , Vaterknoten y , Großvaterknoten z

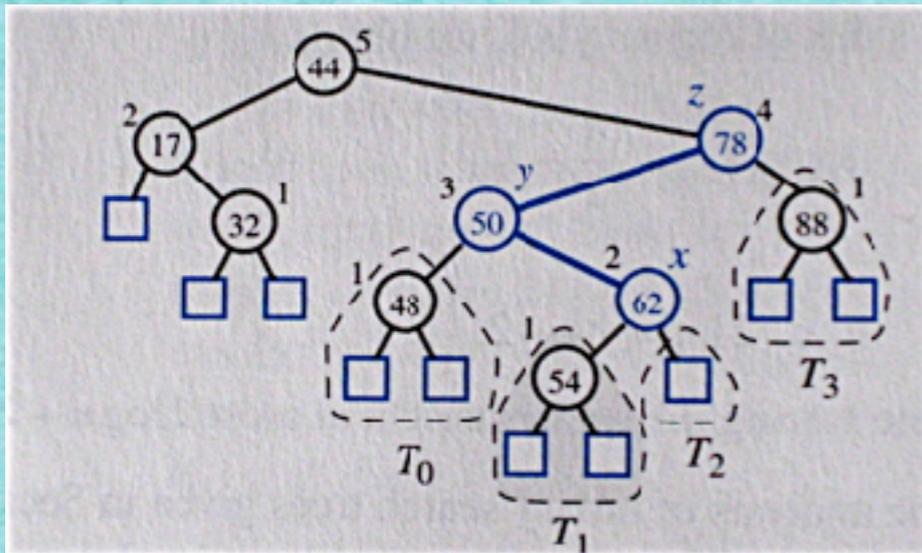
OUTPUT:



Algorithmus 4.9

INPUT: Knoten x eines binären Suchbaumes T , Vaterknoten y , Großvaterknoten z

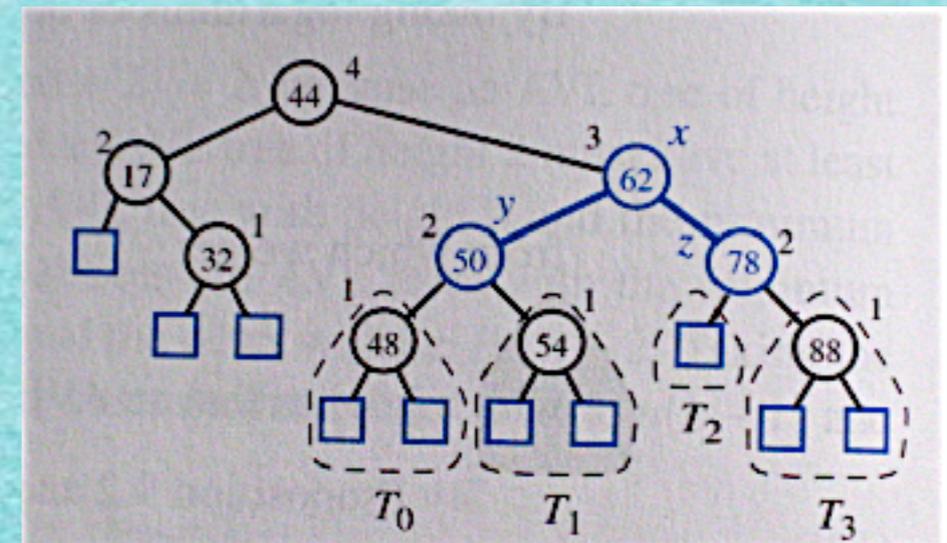
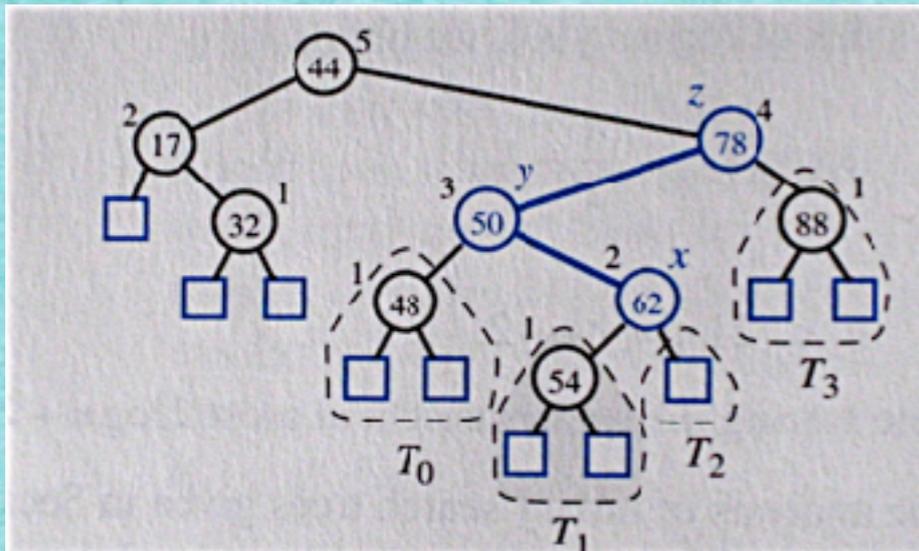
OUTPUT: Binärer Suchbaum T nach Umstrukturierung mit x, y, z



Algorithmus 4.9

INPUT: Knoten x eines binären Suchbaumes T , Vaterknoten y , Großvaterknoten z

OUTPUT: Binärer Suchbaum T nach Umstrukturierung mit x, y, z

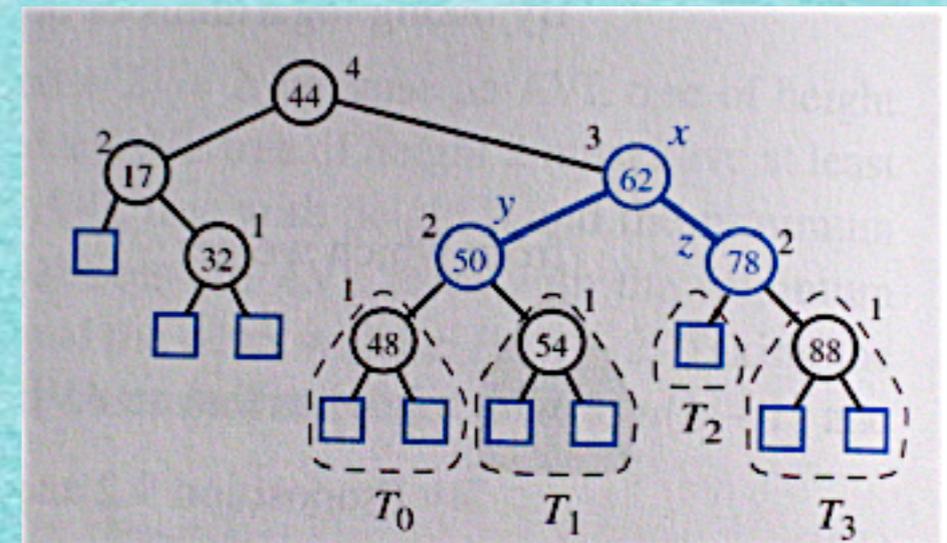
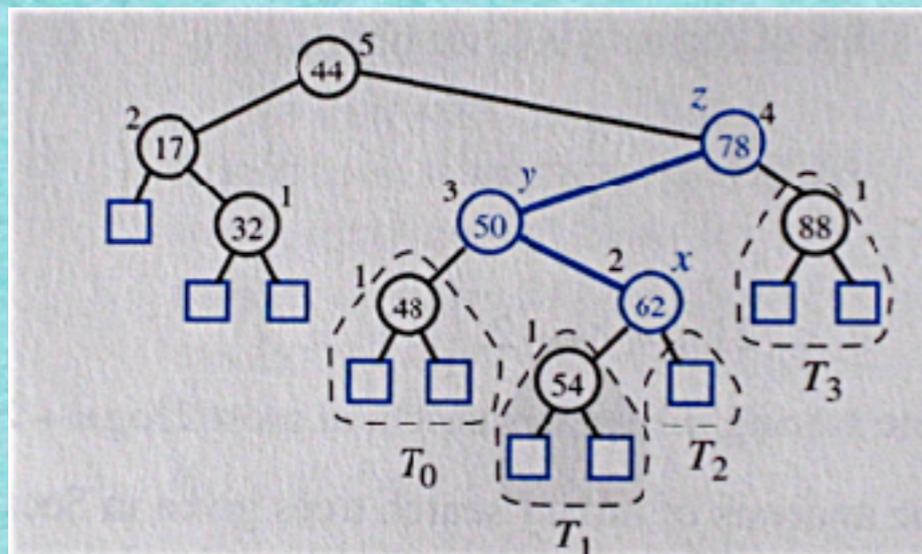


Algorithmus 4.9

INPUT: Knoten x eines binären Suchbaumes T , Vaterknoten y , Großvaterknoten z

OUTPUT: Binärer Suchbaum T nach Umstrukturierung mit x, y, z

RESTRUCTURE(x)



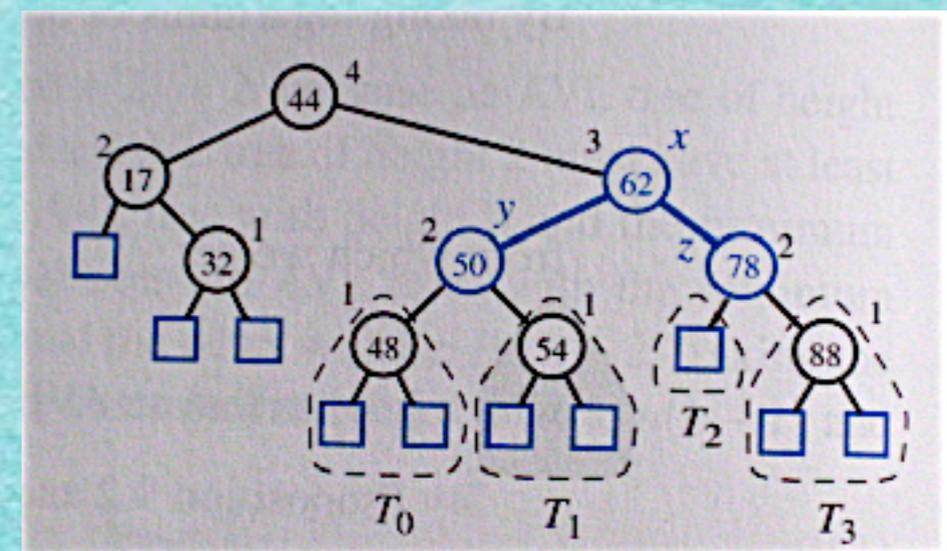
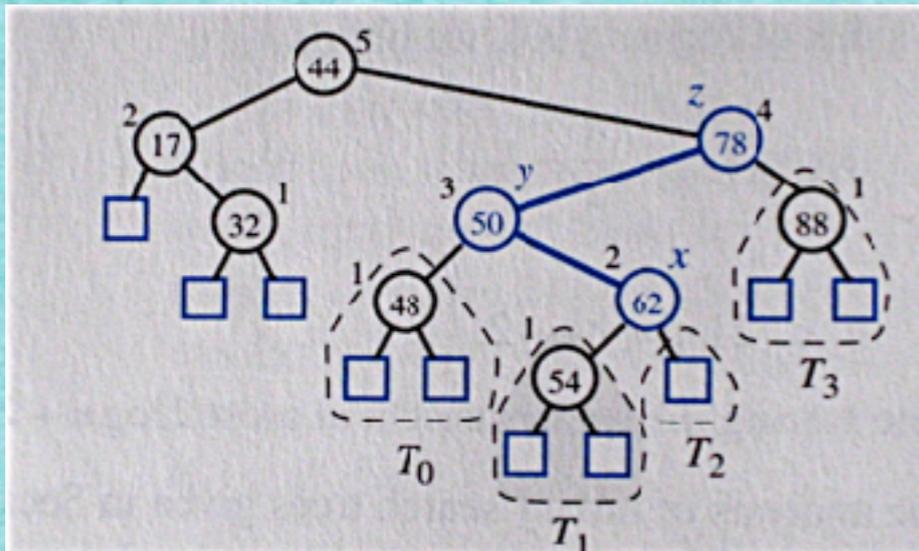
Algorithmus 4.9

INPUT: Knoten x eines binären Suchbaumes T , Vaterknoten y , Großvaterknoten z

OUTPUT: Binärer Suchbaum T nach Umstrukturierung mit x, y, z

RESTRUCTURE(x)

1. Sei (a, b, c) die Größensortierung der Knoten x, y, z ;



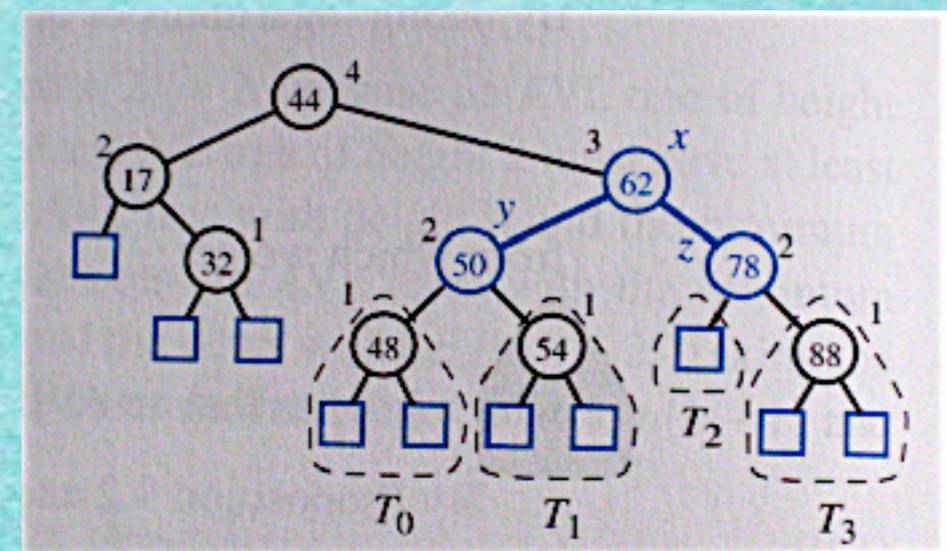
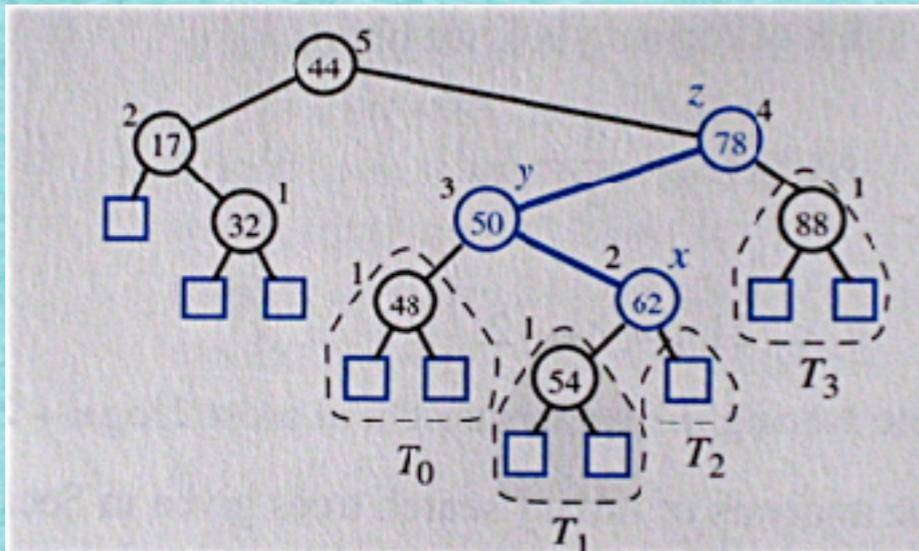
Algorithmus 4.9

INPUT: Knoten x eines binären Suchbaumes T , Vaterknoten y , Großvaterknoten z

OUTPUT: Binärer Suchbaum T nach Umstrukturierung mit x, y, z

RESTRUCTURE(x)

1. Sei (a, b, c) die Größensortierung der Knoten x, y, z ;
seien (T_0, T_1, T_2, T_3) die Größensortierung der vier Teilbäume unter x, y, z , die nicht Wurzeln x, y, z haben



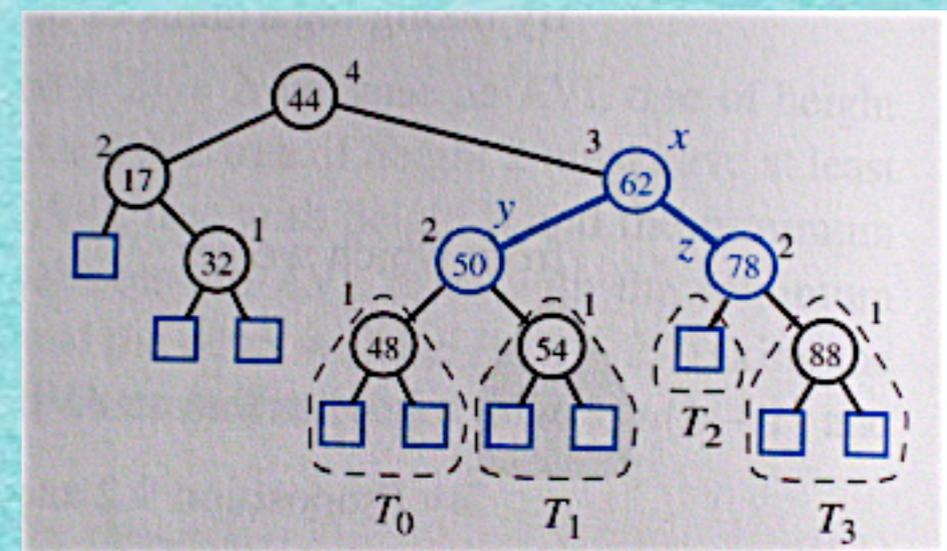
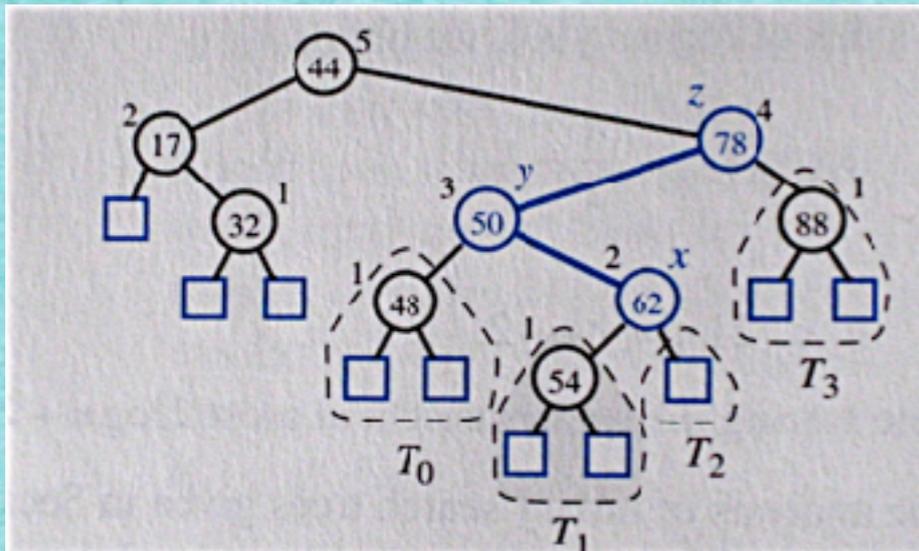
Algorithmus 4.9

INPUT: Knoten x eines binären Suchbaumes T , Vaterknoten y , Großvaterknoten z

OUTPUT: Binärer Suchbaum T nach Umstrukturierung mit x, y, z

RESTRUCTURE(x)

1. Sei (a, b, c) die Größensortierung der Knoten x, y, z ;
seien (T_0, T_1, T_2, T_3) die Größensortierung der vier Teilbäume unter x, y, z , die nicht Wurzeln x, y, z haben
2. Ersetze den Teilbaum mit Wurzel z durch einen neuen Teilbaum mit Wurzel b .



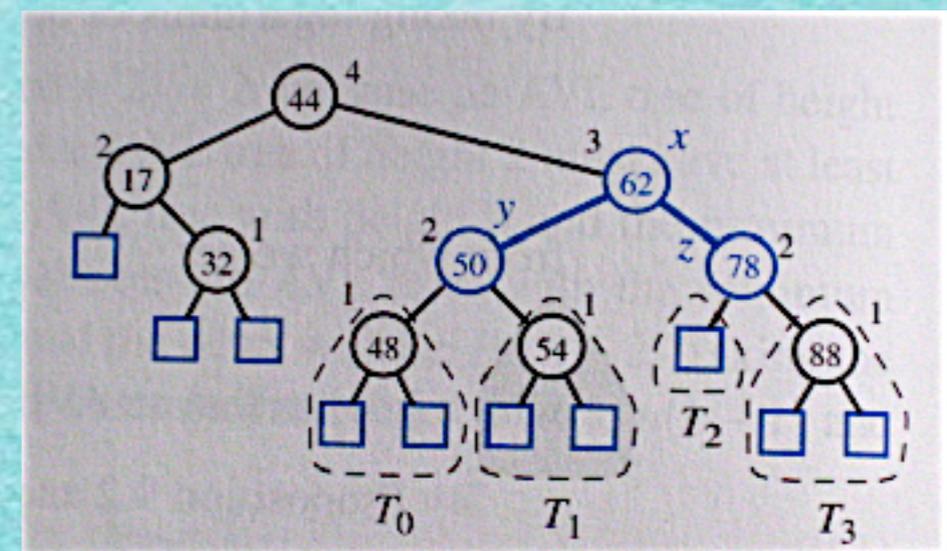
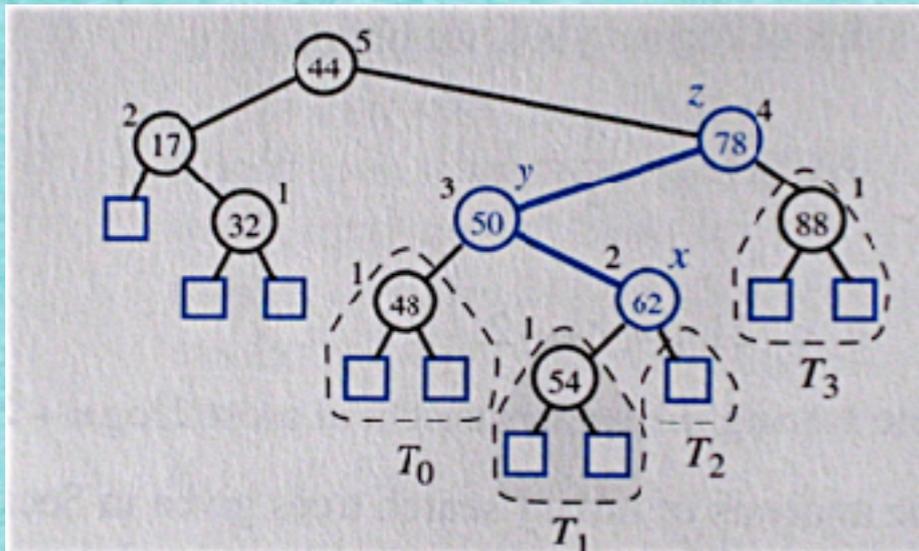
Algorithmus 4.9

INPUT: Knoten x eines binären Suchbaumes T , Vaterknoten y , Großvaterknoten z

OUTPUT: Binärer Suchbaum T nach Umstrukturierung mit x, y, z

RESTRUCTURE(x)

1. Sei (a, b, c) die Größensortierung der Knoten x, y, z ;
seien (T_0, T_1, T_2, T_3) die Größensortierung der vier Teilbäume unter x, y, z , die nicht Wurzeln x, y, z haben
2. Ersetze den Teilbaum mit Wurzel z durch einen neuen Teilbaum mit Wurzel b .
3. Setze a als linkes Kind von b , mit T_0 und T_1 als linken und rechten Teilbaum unter a ;



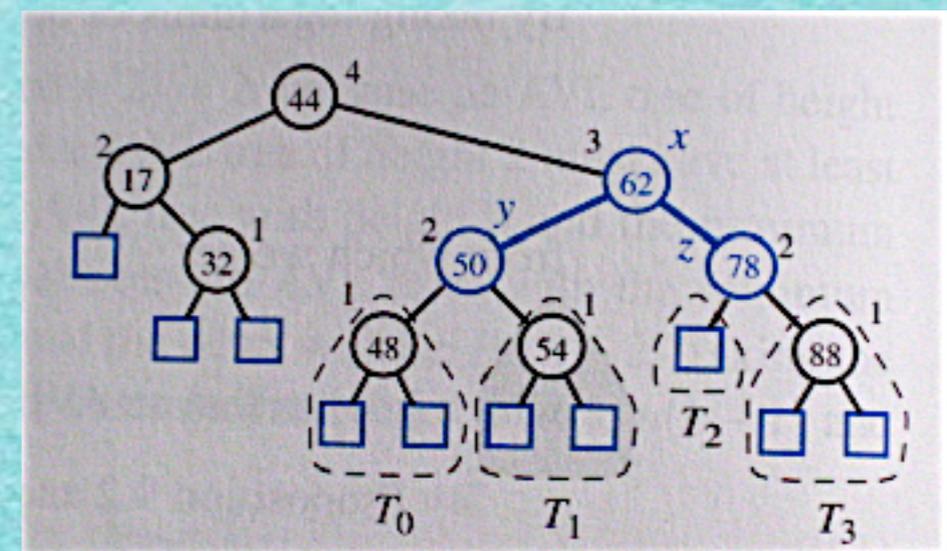
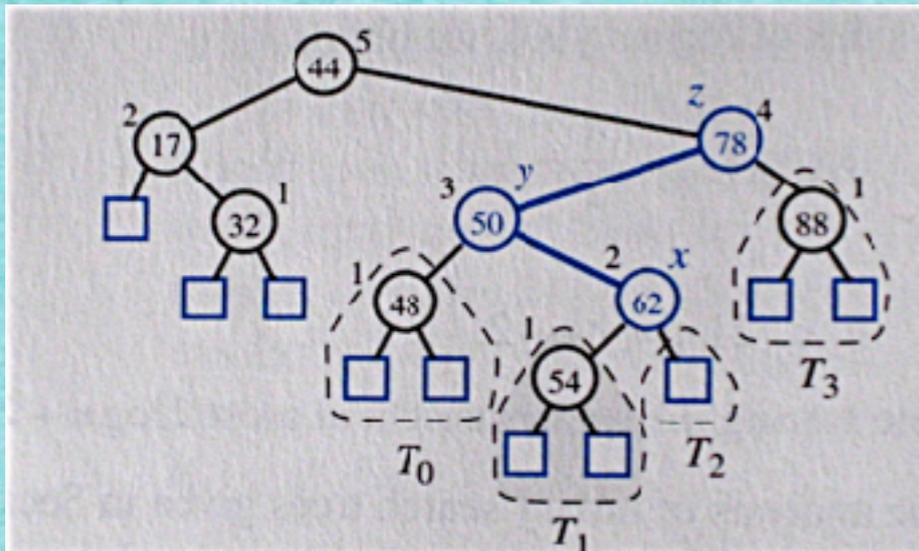
Algorithmus 4.9

INPUT: Knoten x eines binären Suchbaumes T , Vaterknoten y , Großvaterknoten z

OUTPUT: Binärer Suchbaum T nach Umstrukturierung mit x, y, z

RESTRUCTURE(x)

1. Sei (a, b, c) die Größensortierung der Knoten x, y, z ;
seien (T_0, T_1, T_2, T_3) die Größensortierung der vier Teilbäume unter x, y, z , die nicht Wurzeln x, y, z haben
2. Ersetze den Teilbaum mit Wurzel z durch einen neuen Teilbaum mit Wurzel b .
3. Setze a als linkes Kind von b , mit T_0 und T_1 als linken und rechten Teilbaum unter a ;
setze c als rechtes Kind von b , mit T_2 und T_3 als linken und rechten Teilbaum unter c .



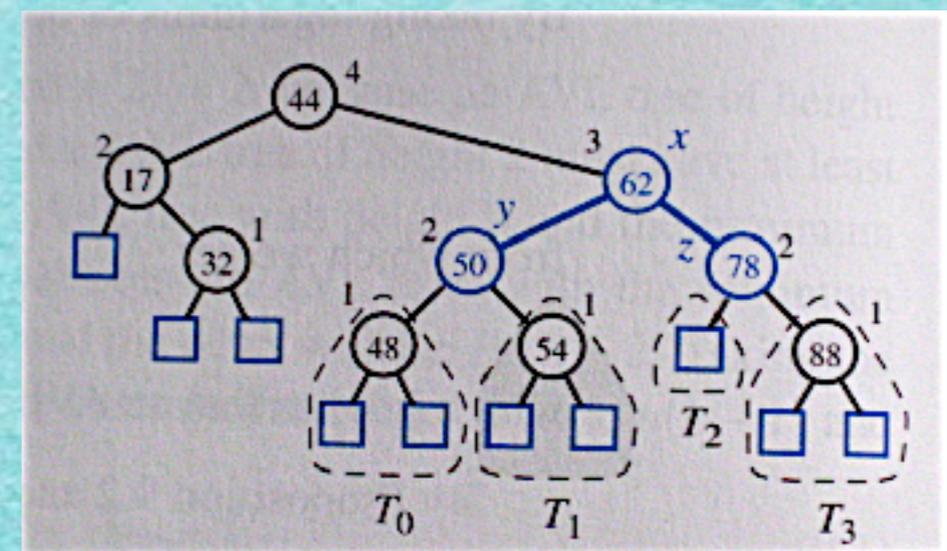
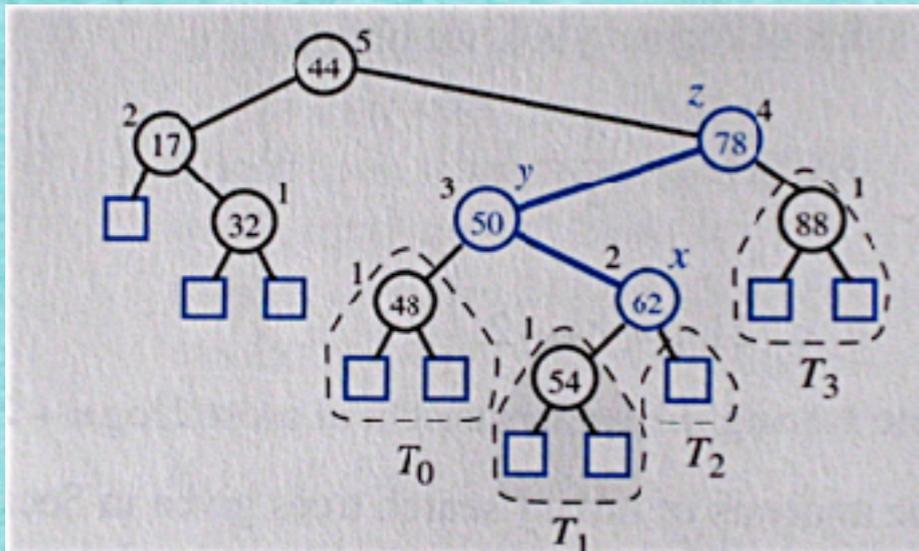
Algorithmus 4.9

INPUT: Knoten x eines binären Suchbaumes T , Vaterknoten y , Großvaterknoten z

OUTPUT: Binärer Suchbaum T nach Umstrukturierung mit x, y, z

RESTRUCTURE(x)

1. Sei (a, b, c) die Größensortierung der Knoten x, y, z ;
seien (T_0, T_1, T_2, T_3) die Größensortierung der vier Teilbäume unter x, y, z , die nicht Wurzeln x, y, z haben
2. Ersetze den Teilbaum mit Wurzel z durch einen neuen Teilbaum mit Wurzel b .
3. Setze a als linkes Kind von b , mit T_0 und T_1 als linken und rechten Teilbaum unter a ;
setze c als rechtes Kind von b , mit T_2 und T_3 als linken und rechten Teilbaum unter c .
4. RETURN



Einfügen

Satz 4.10

Satz 4.10

Mithilfe von RESTRUCTURE kann man einen AVL-Baum auch nach einer Einfüge-Operation höhenbalanciert halten.

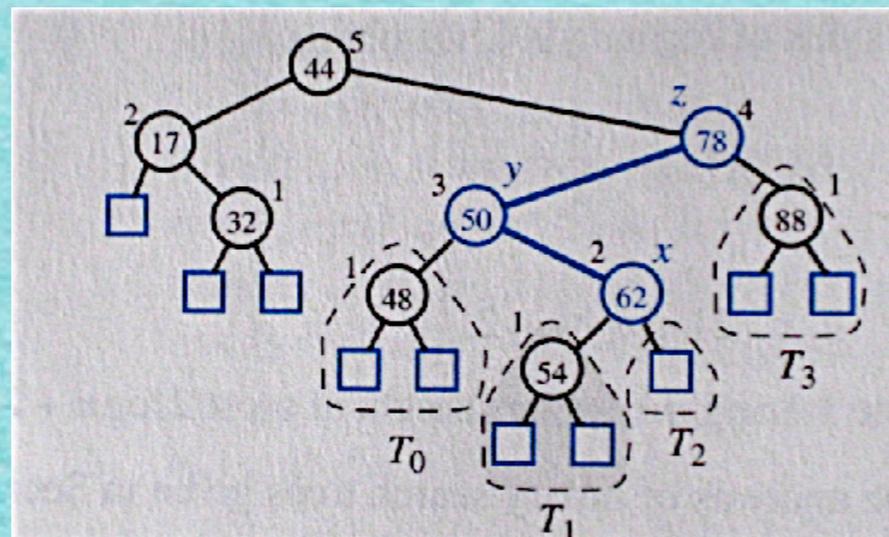
Satz 4.10

*Mithilfe von RESTRUCTURE kann man einen AVL-Baum auch nach einer Einfüge-Operation höhenbalanciert halten.
Die Zeit dafür ist $O(1)$.*

Einfügen

Satz 4.10

*Mithilfe von RESTRUCTURE kann man einen AVL-Baum auch nach einer Einfüge-Operation höhenbalanciert halten.
Die Zeit dafür ist $O(1)$.*

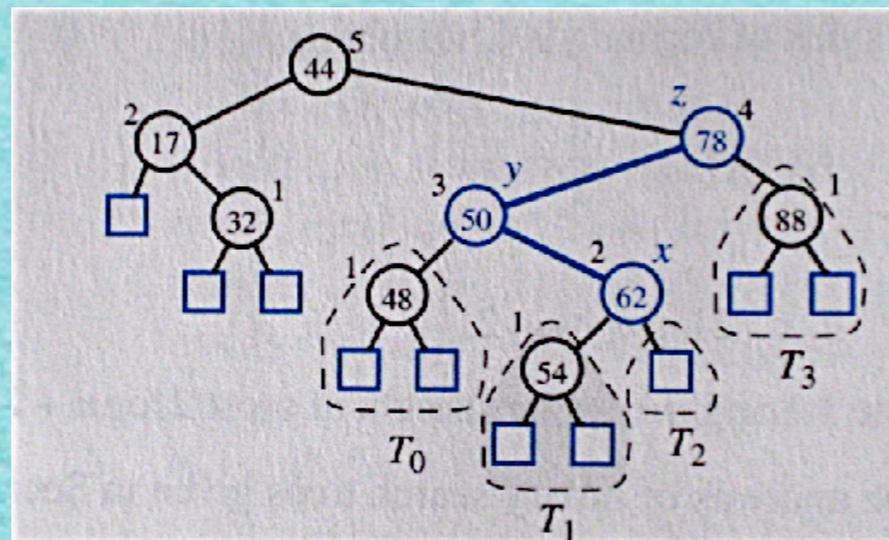


Einfügen

Satz 4.10

*Mithilfe von RESTRUCTURE kann man einen AVL-Baum auch nach einer Einfüge-Operation höhenbalanciert halten.
Die Zeit dafür ist $O(1)$.*

Beweis:



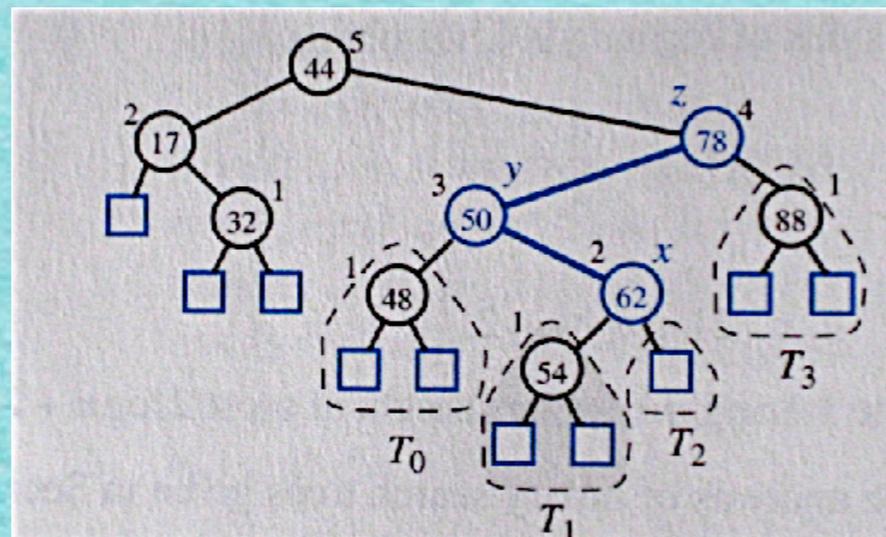
Einfügen

Satz 4.10

Mithilfe von *RESTRUCTURE* kann man einen AVL-Baum auch nach einer Einfüge-Operation höhenbalanciert halten.
Die Zeit dafür ist $O(1)$.

Beweis:

Angenommen, durch Hinzufügen eines Knotens v ist der Baum unbalanciert geworden.



Einfügen

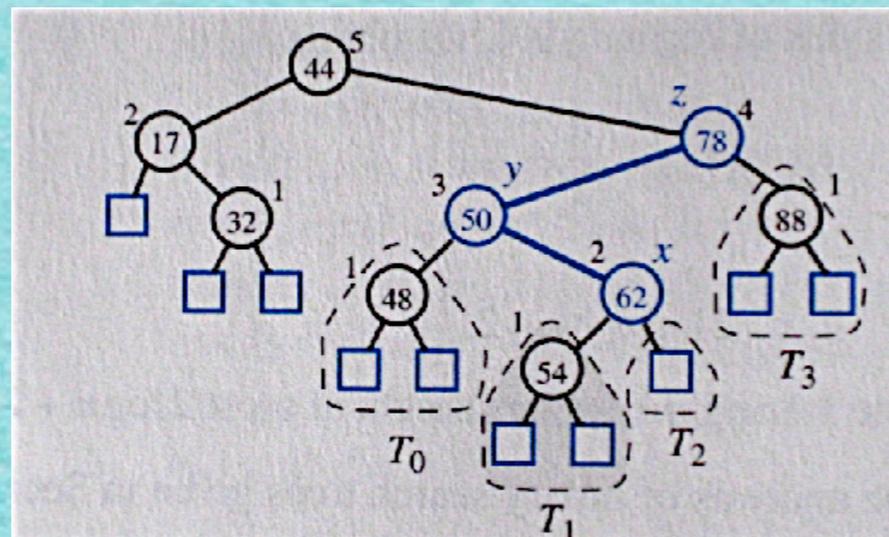
Satz 4.10

Mithilfe von *RESTRUCTURE* kann man einen AVL-Baum auch nach einer Einfüge-Operation höhenbalanciert halten.
Die Zeit dafür ist $O(1)$.

Beweis:

Angenommen, durch Hinzufügen eines Knotens v ist der Baum unbalanciert geworden.

Sei z der nach dem Einfügen niedrigste unbalancierte Vorfahre von v .



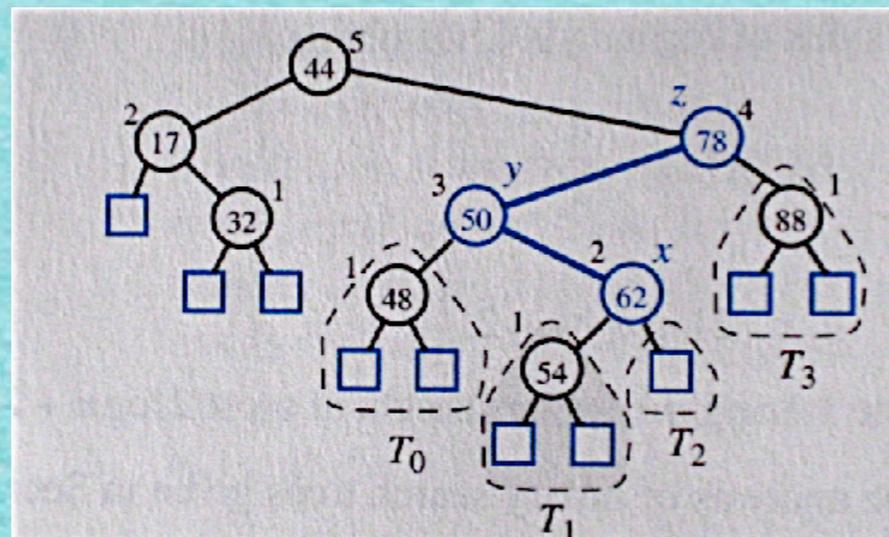
Satz 4.10

*Mithilfe von RESTRUCTURE kann man einen AVL-Baum auch nach einer Einfüge-Operation höhenbalanciert halten.
Die Zeit dafür ist $O(1)$.*

Beweis:

Angenommen, durch Hinzufügen eines Knotens v ist der Baum unbalanciert geworden.

Sei z der nach dem Einfügen niedrigste unbalancierte Vorfahre von v .
Sei y das Kind von z , das Vorfahre von v ist; y muss zwei höher sein als das andere Kind von z .



Satz 4.10

*Mithilfe von RESTRUCTURE kann man einen AVL-Baum auch nach einer Einfüge-Operation höhenbalanciert halten.
Die Zeit dafür ist $O(1)$.*

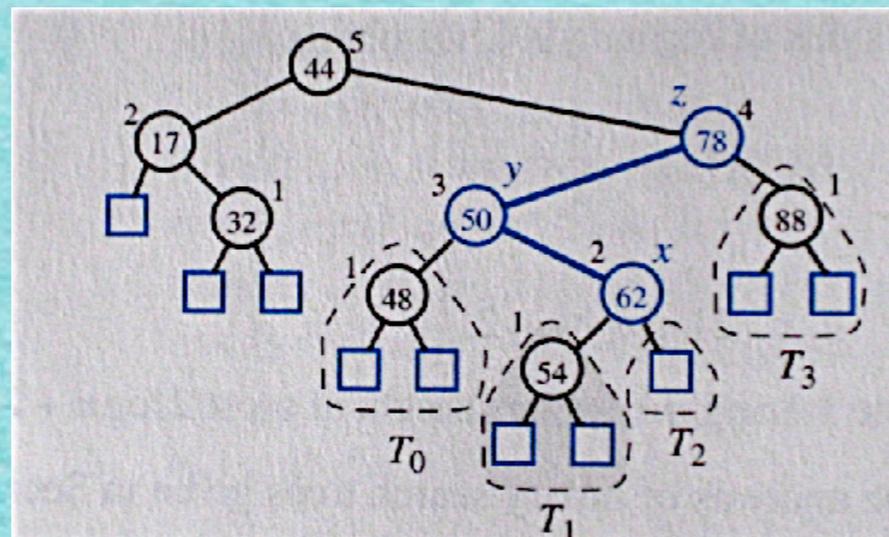
Beweis:

Angenommen, durch Hinzufügen eines Knotens v ist der Baum unbalanciert geworden.

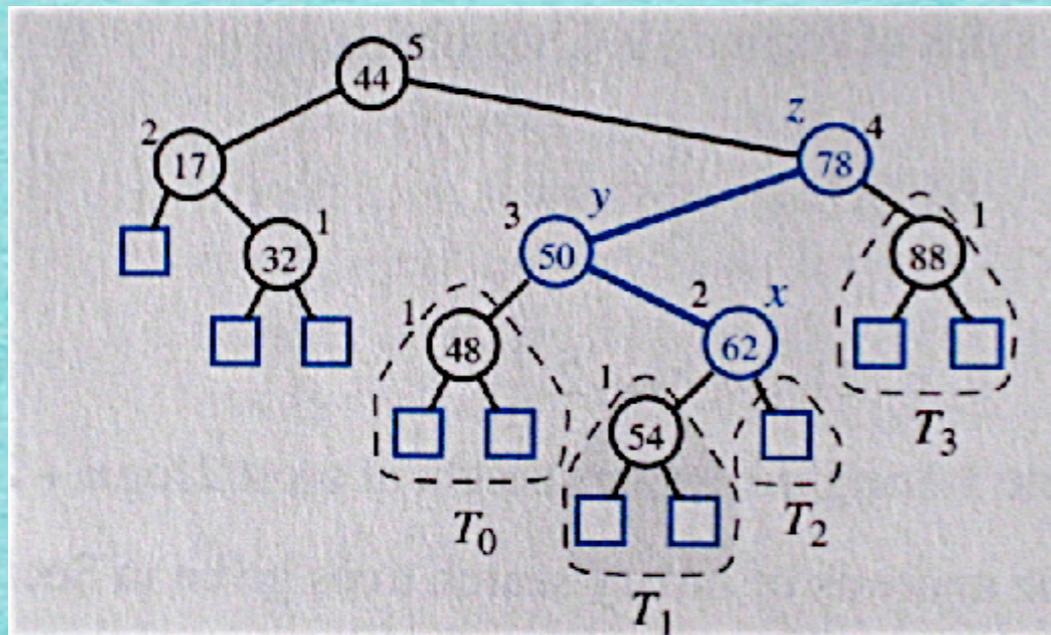
Sei z der nach dem Einfügen niedrigste unbalancierte Vorfahre von v .

Sei y das Kind von z , das Vorfahre von v ist; y muss zwei höher sein als das andere Kind von z .

Sei x das Kind von y , das im selben Teilbaum wie v liegt.

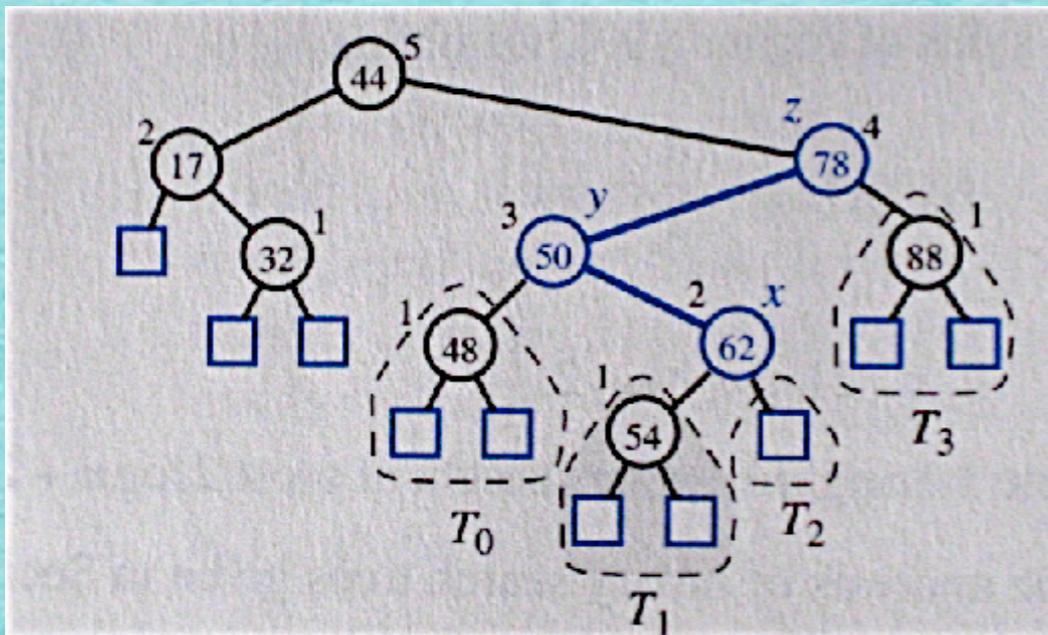


Einfügen



Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Jetzt ersetzen wir die Teilstruktur z, y, x (3 Knoten untereinander) durch eine Teilstruktur mit 2 Knoten unter einem.
Z.z.: Danach ist der Baum ein AVL-Baum!

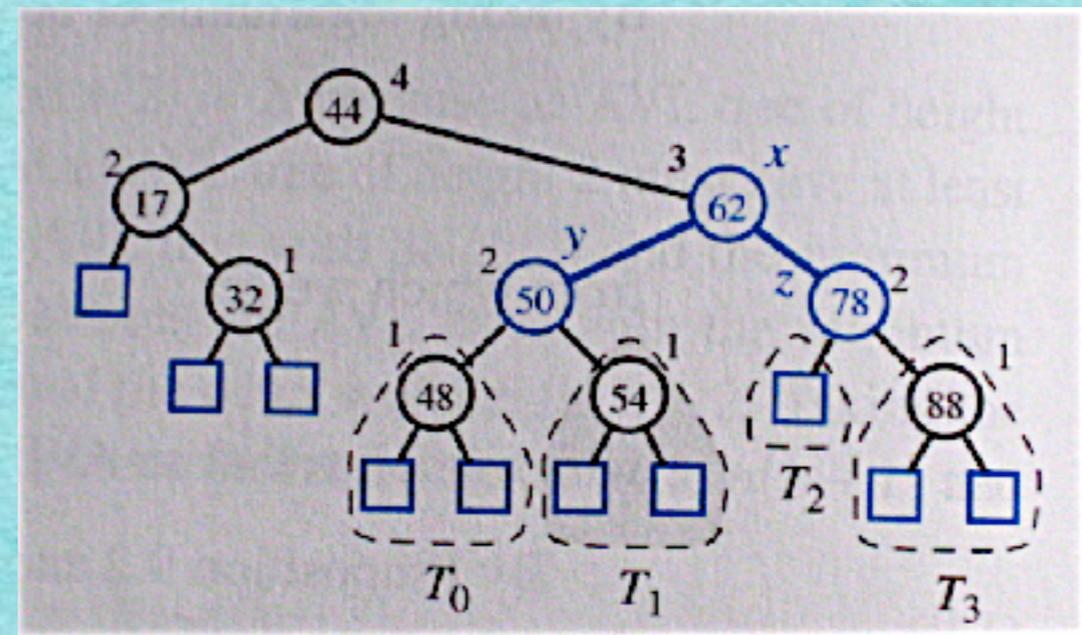
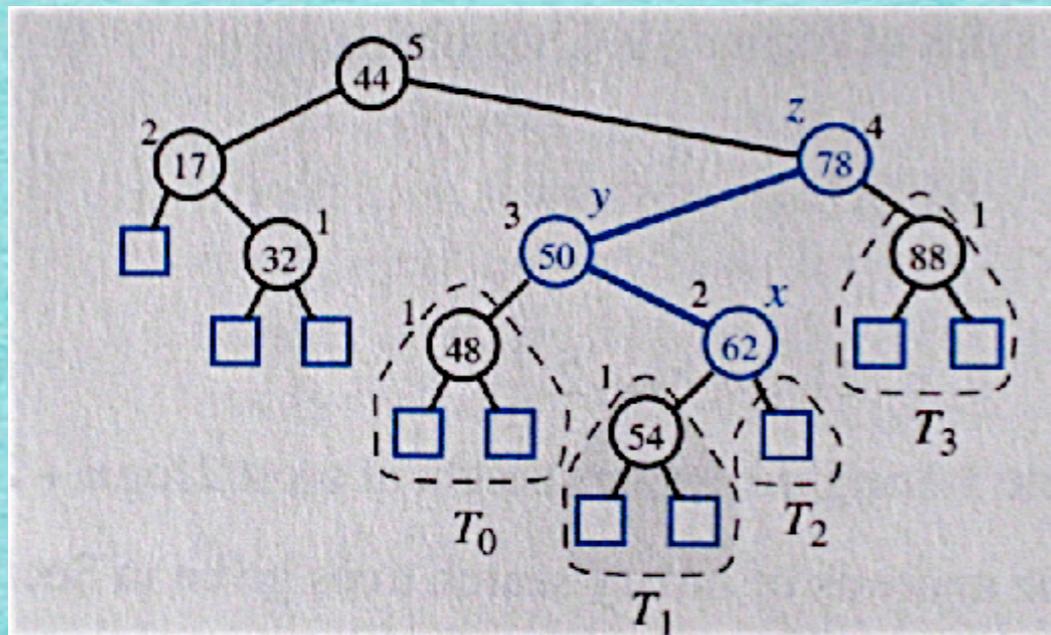


Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Jetzt ersetzen wir die Teilstruktur z, y, x (3 Knoten untereinander) durch eine Teilstruktur mit 2 Knoten unter einem.

Z.z.: Danach ist der Baum ein AVL-Baum!

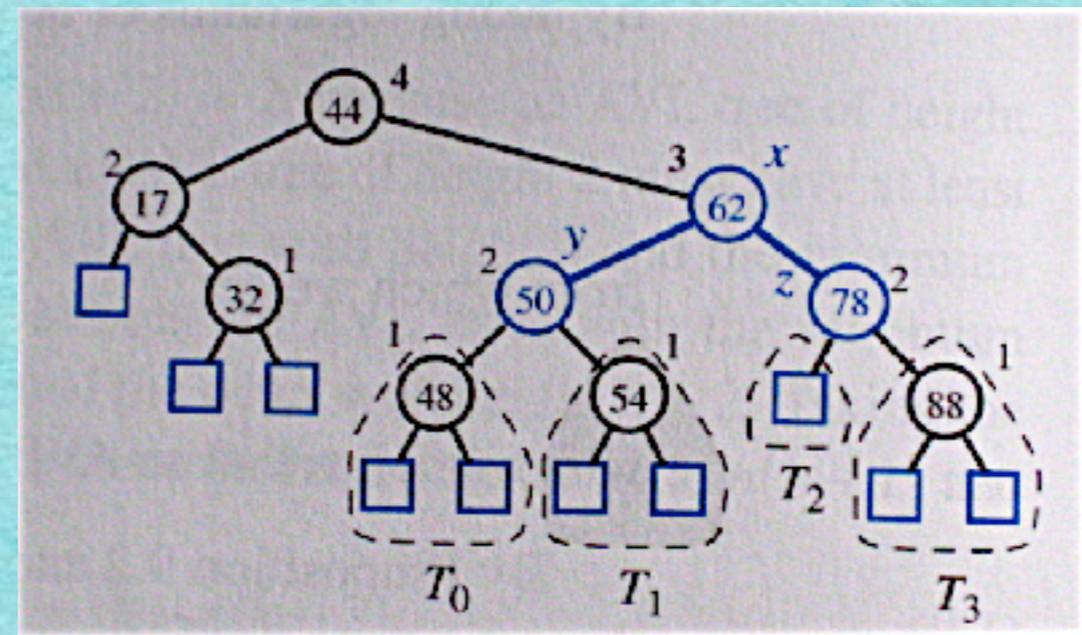
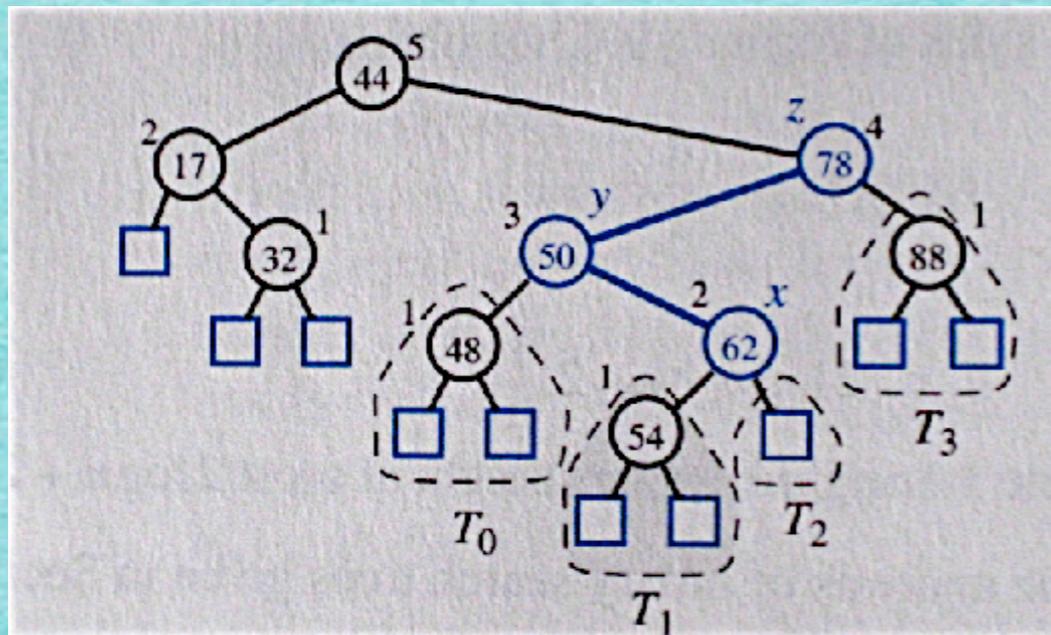


Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

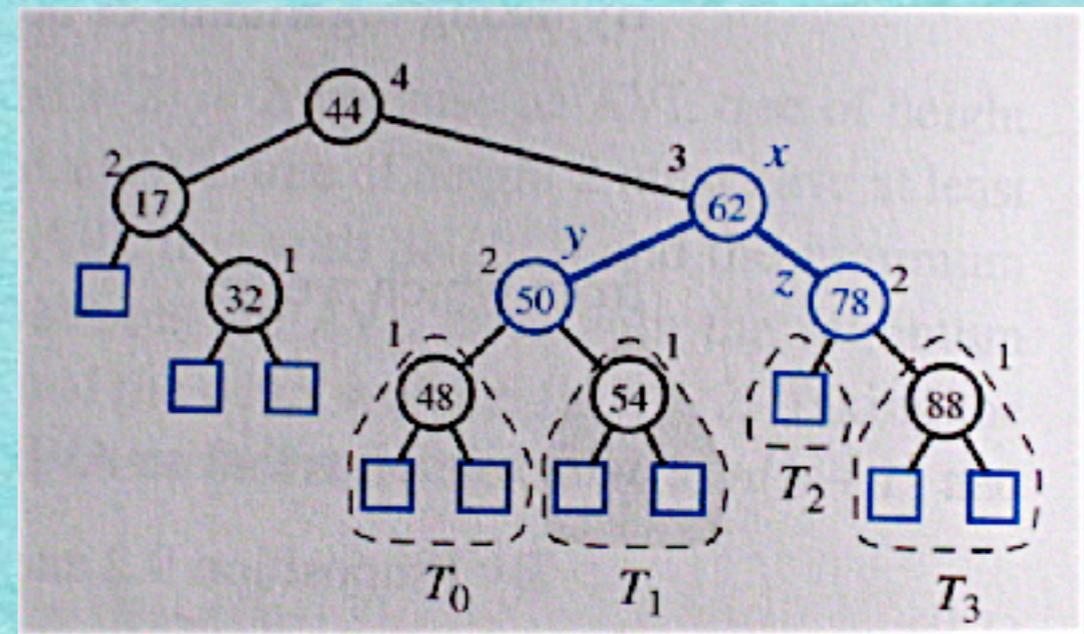
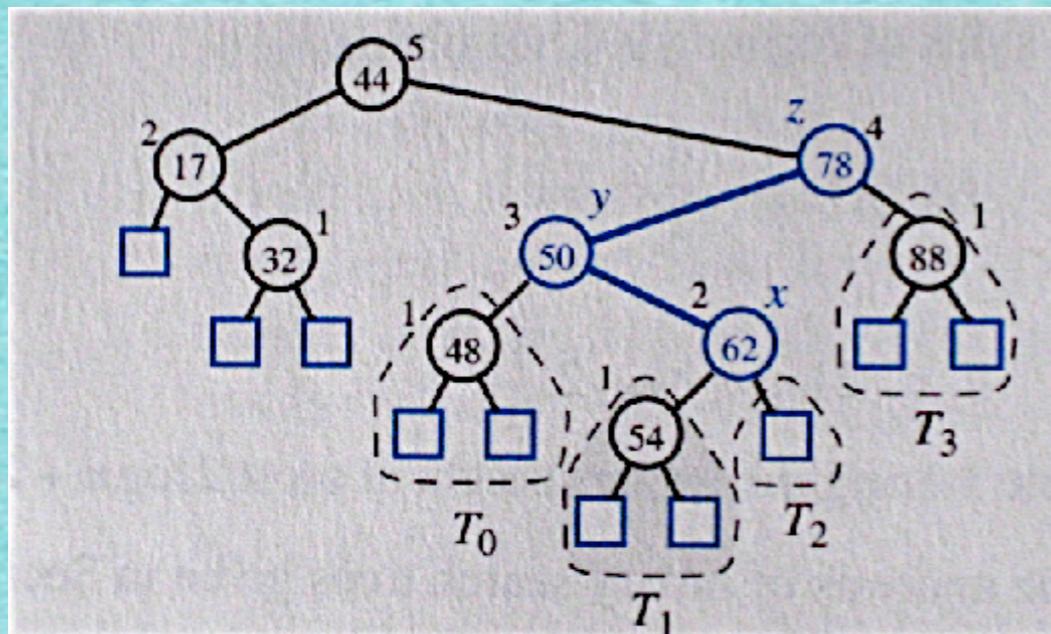
Jetzt ersetzen wir die Teilstruktur z, y, x (3 Knoten untereinander) durch eine Teilstruktur mit 2 Knoten unter einem.

Z.z.: Danach ist der Baum ein AVL-Baum!



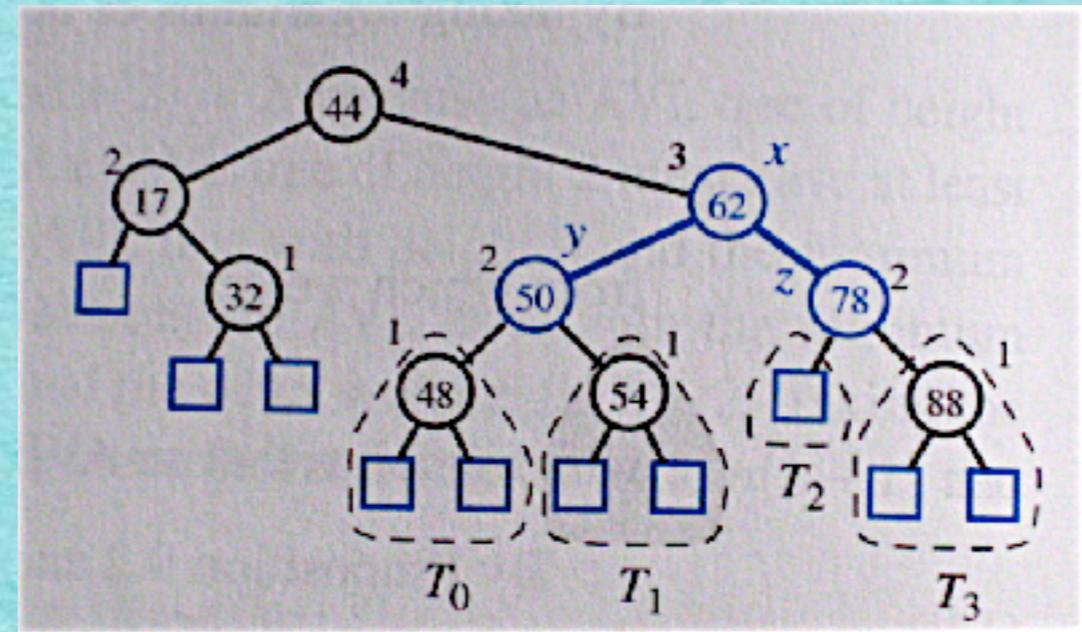
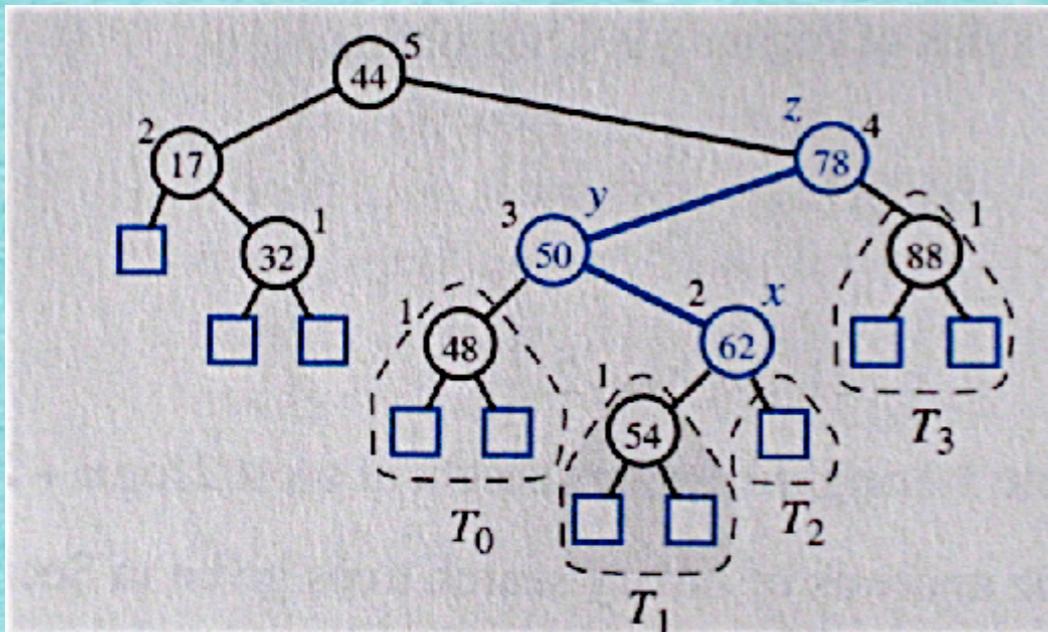
Betrachte jetzt die möglichen Anordnungen von x, y, z !

Einfügen



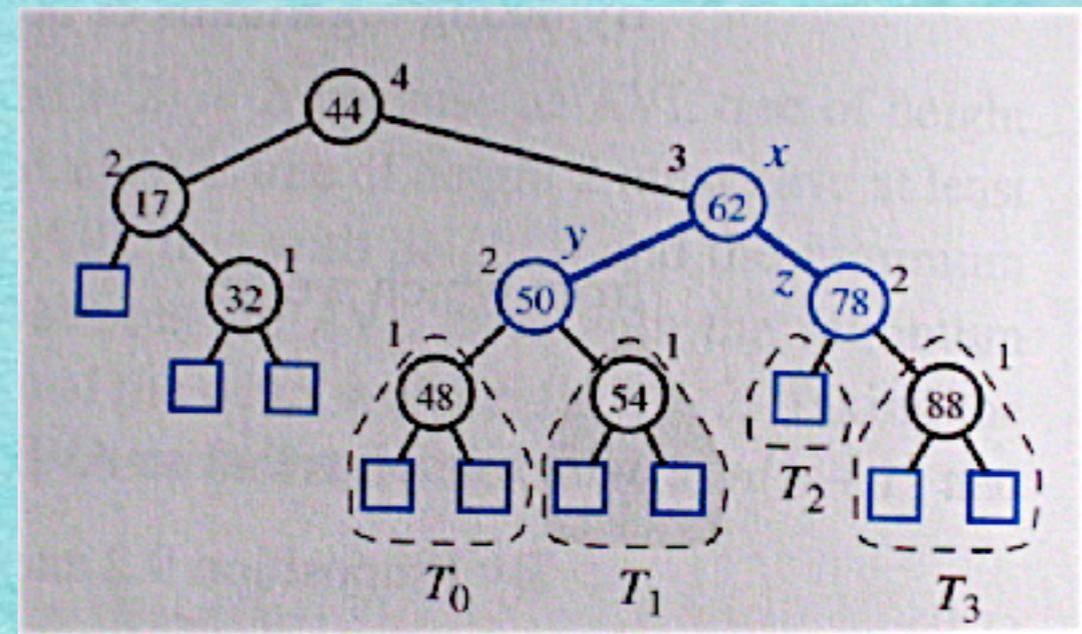
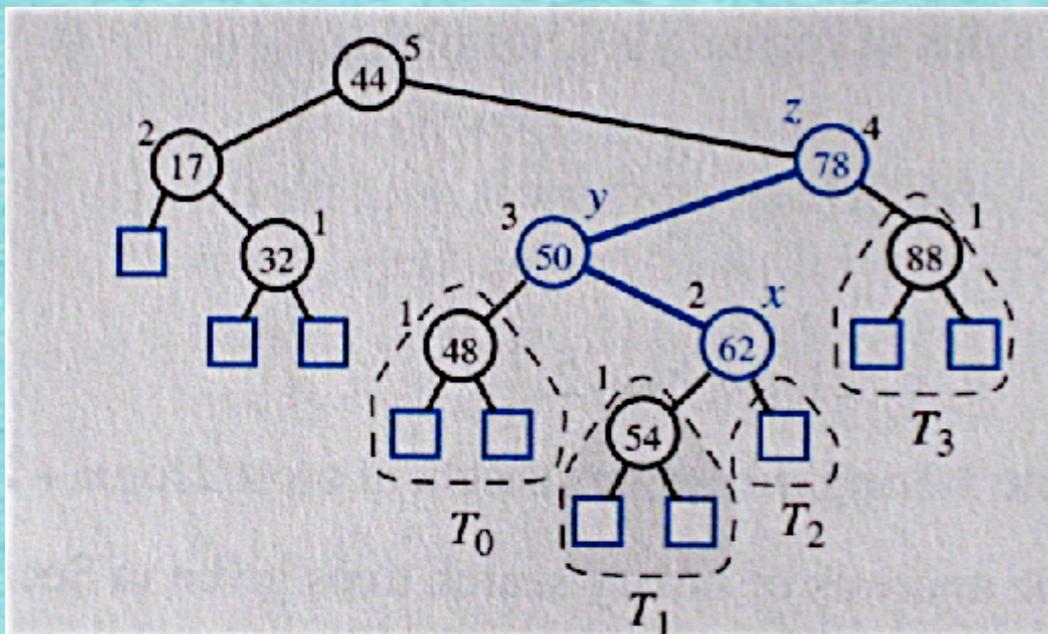
Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):



Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.): Welche Anordnungen gibt es?

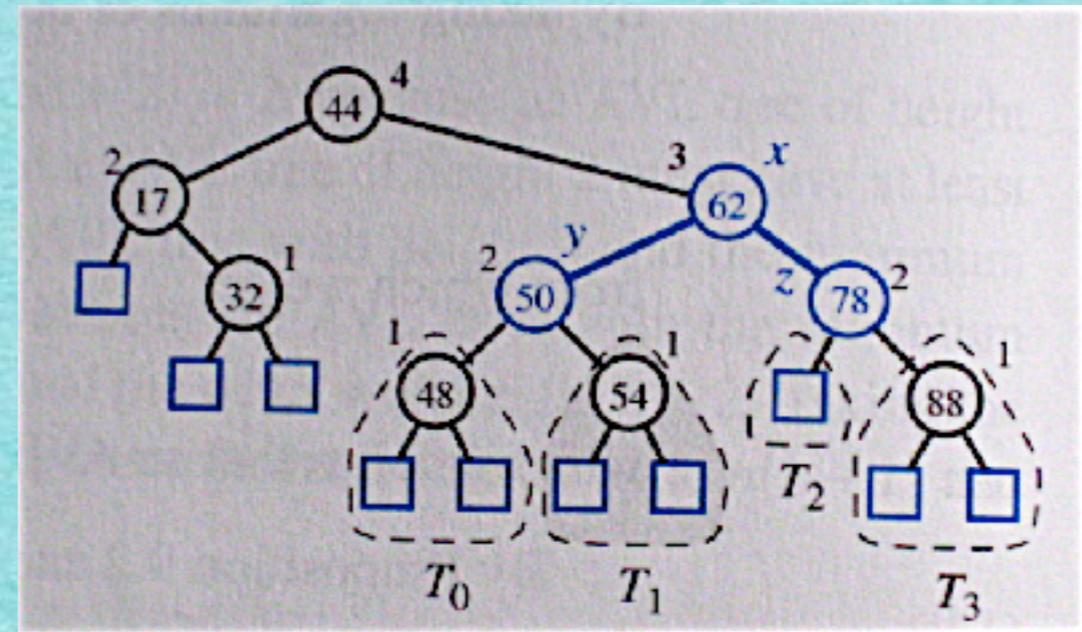
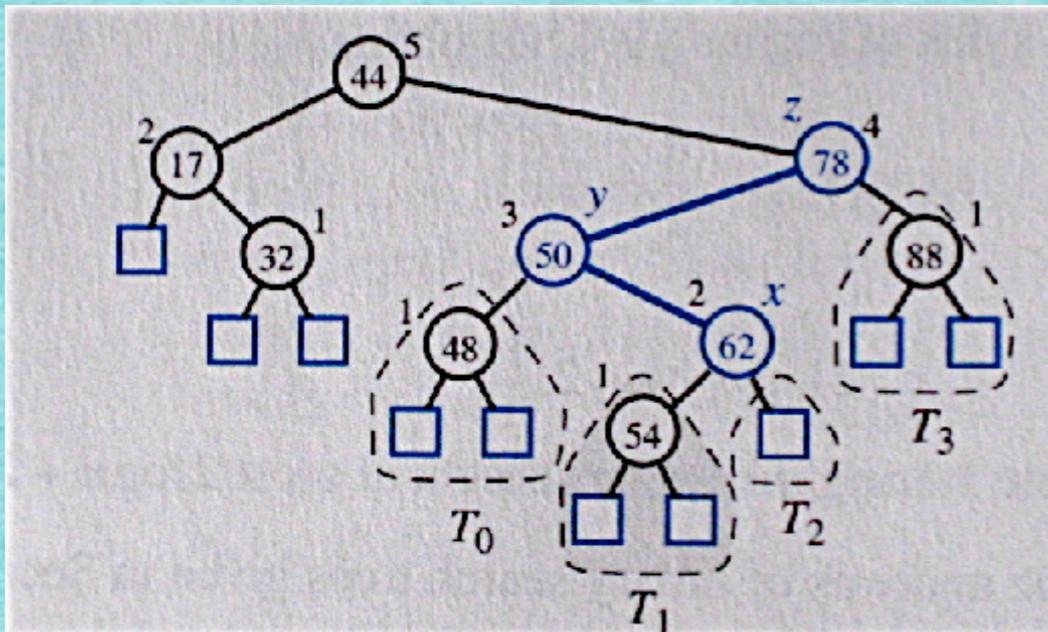


Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Welche Anordnungen gibt es?

(1) $x \leq y \leq z$



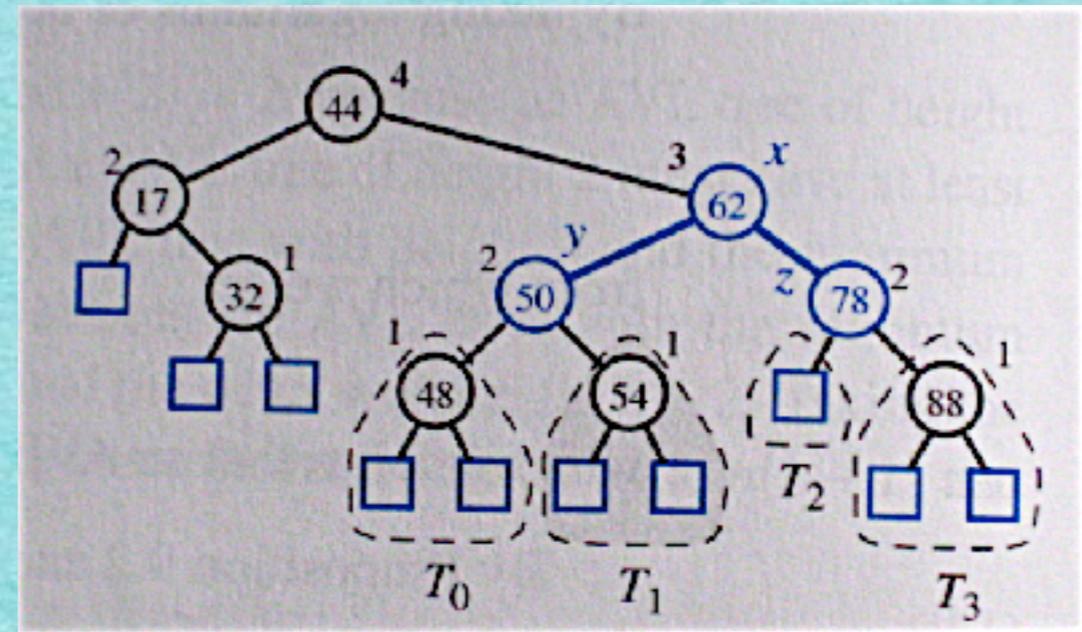
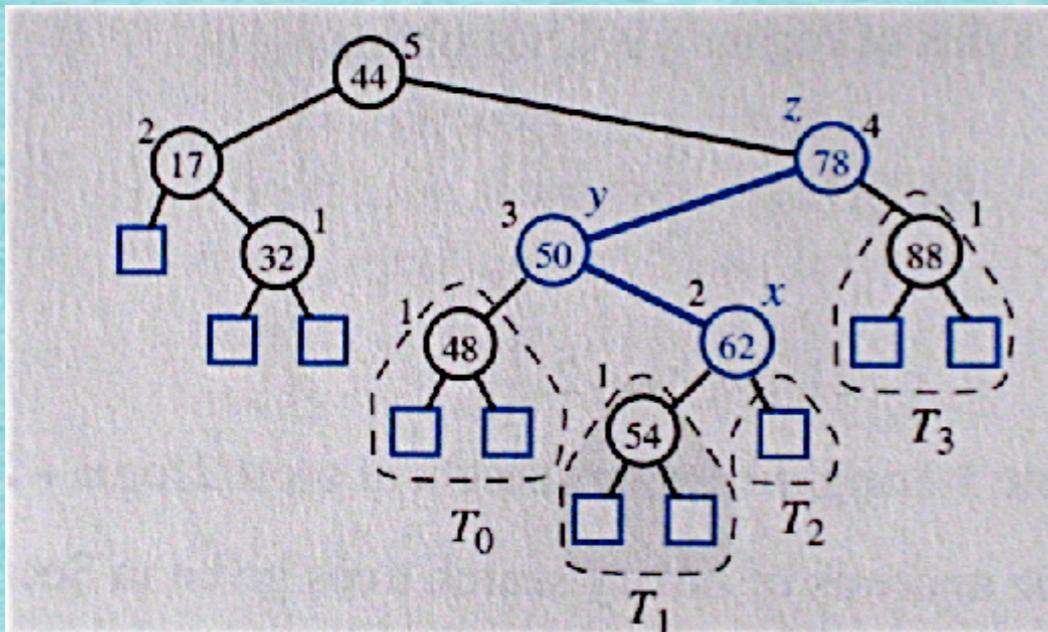
Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Welche Anordnungen gibt es?

(1) $x \leq y \leq z$

(2) $x \leq z \leq y$

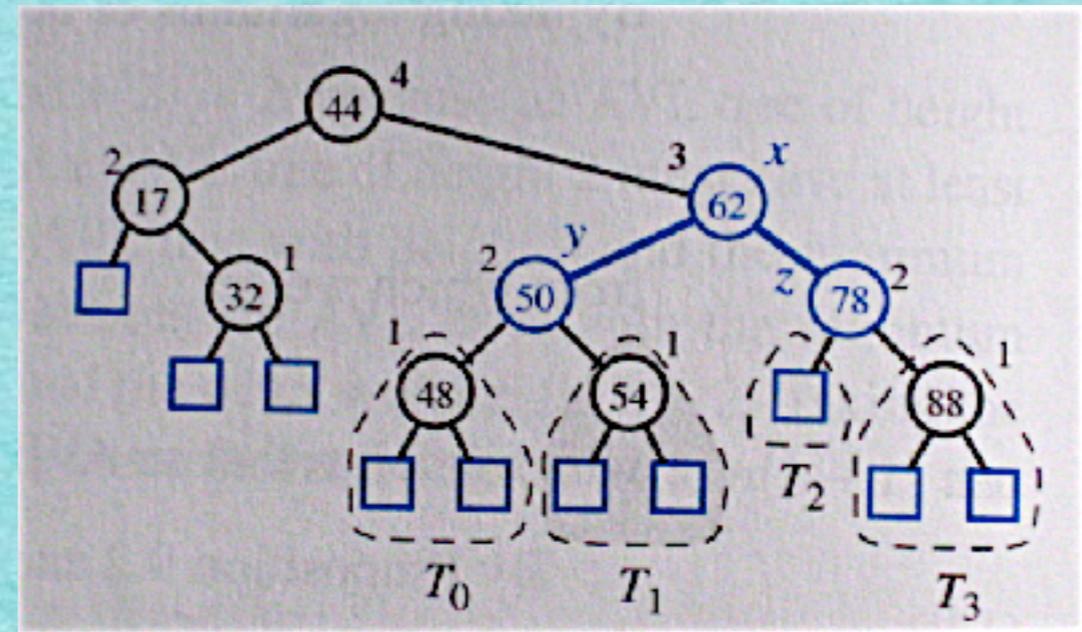
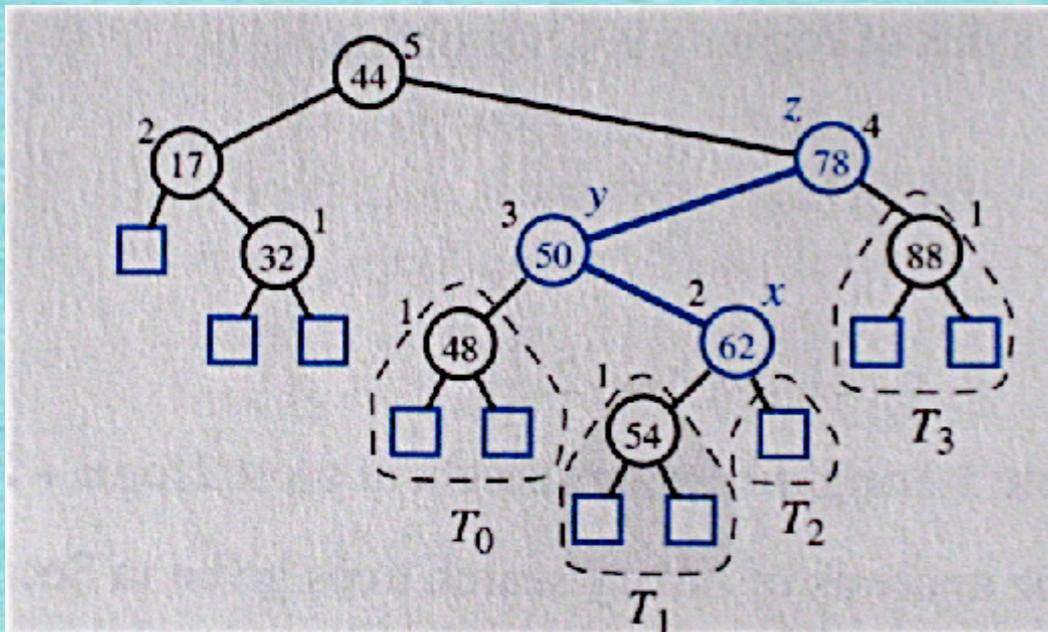


Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Welche Anordnungen gibt es?

- (1) $x \leq y \leq z$
- (2) $x \leq z \leq y$
- (3) $y \leq x \leq z$

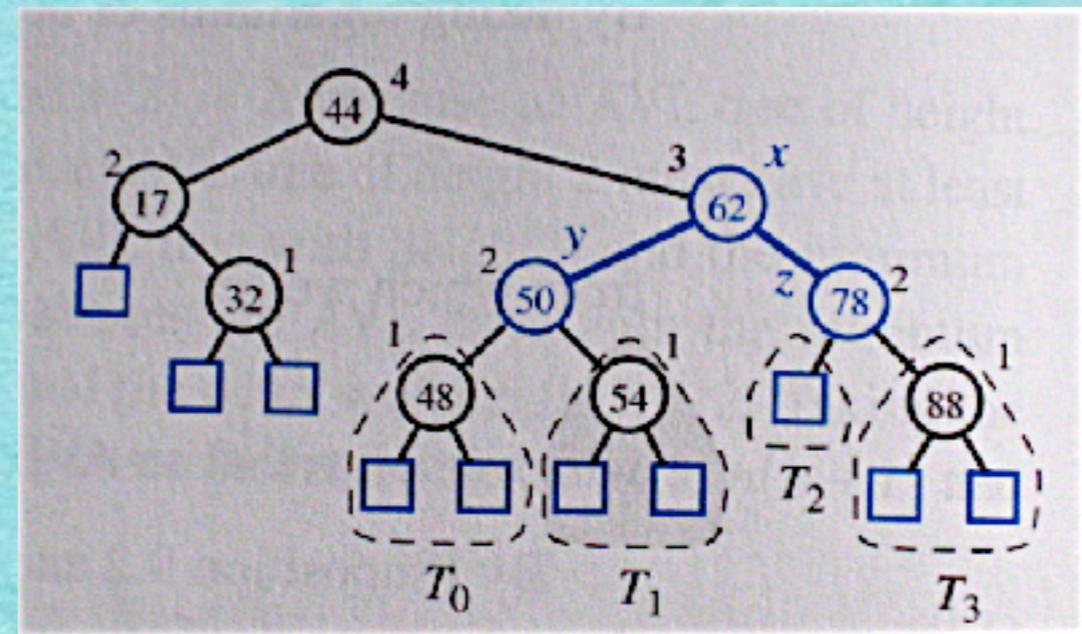
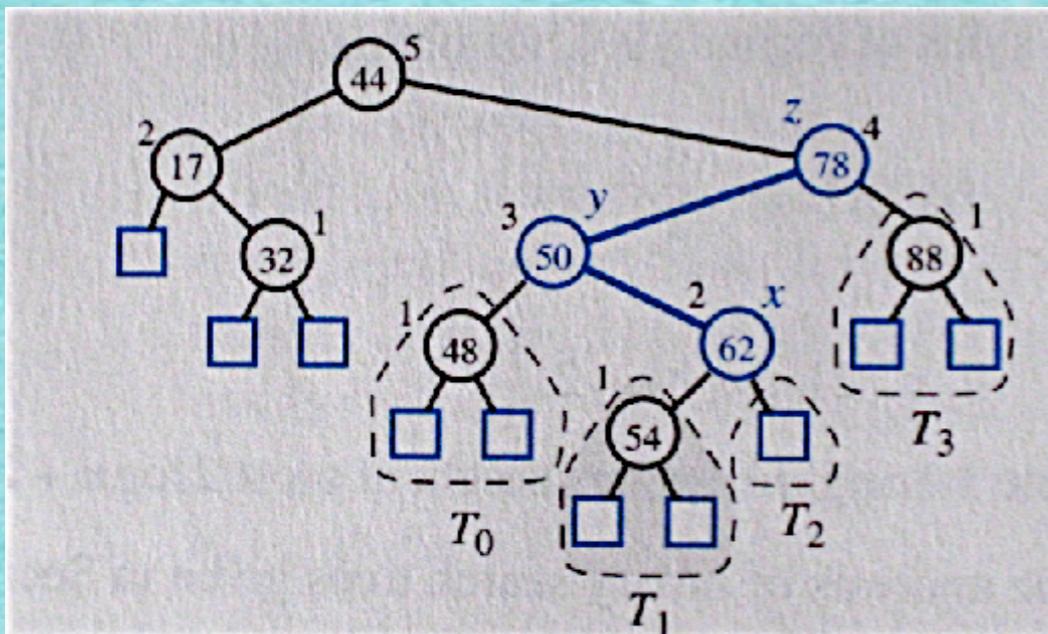


Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Welche Anordnungen gibt es?

- (1) $x \leq y \leq z$
- (2) $x \leq z \leq y$
- (3) $y \leq x \leq z$
- (4) $y \leq z \leq x$

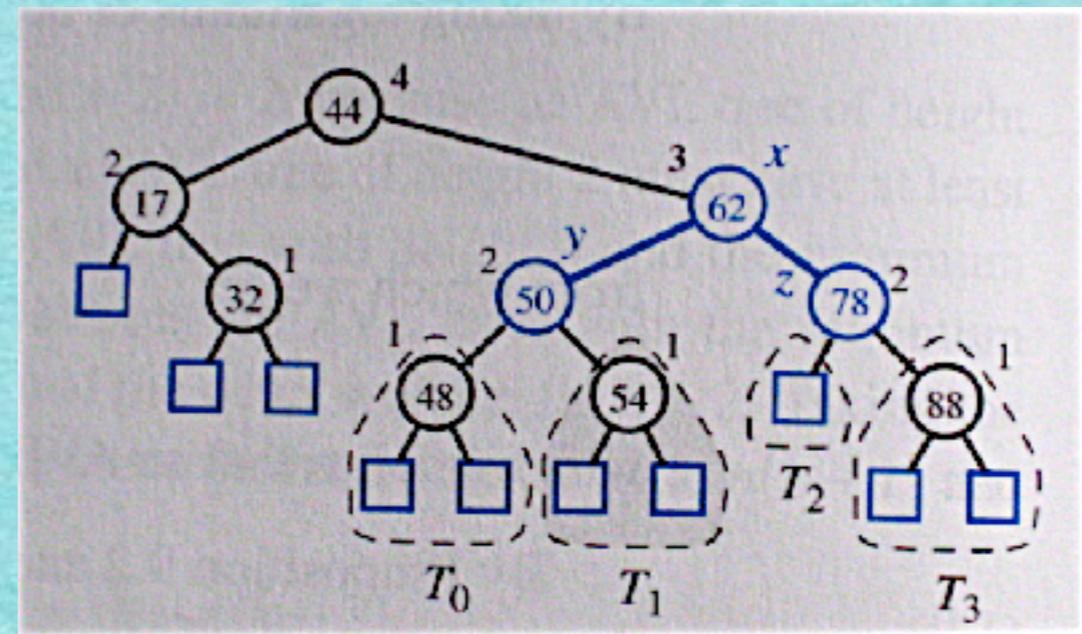
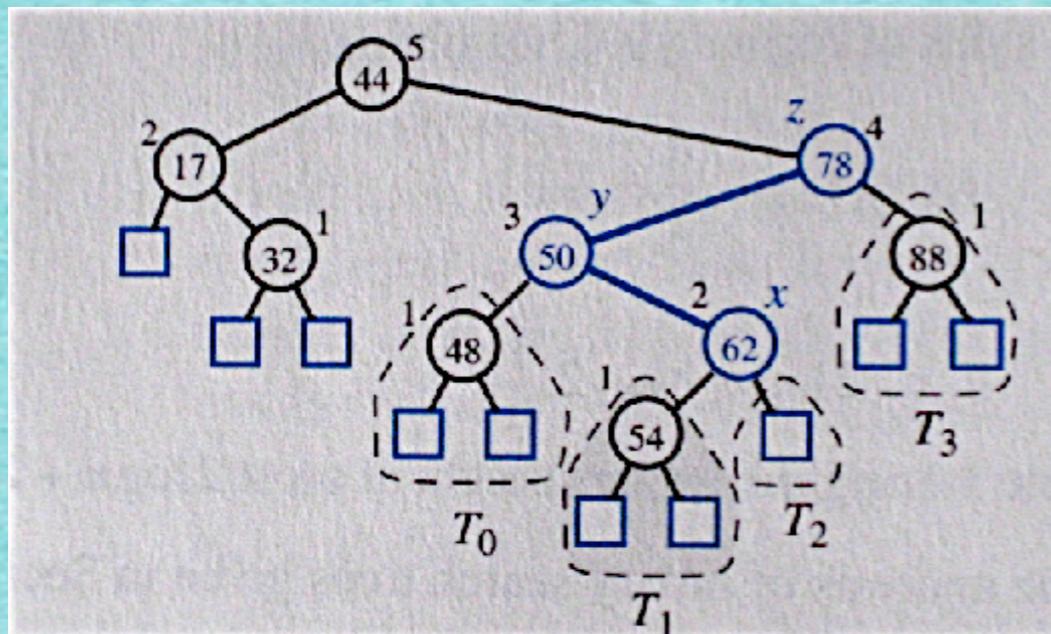


Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Welche Anordnungen gibt es?

- (1) $x \leq y \leq z$
- (2) $x \leq z \leq y$
- (3) $y \leq x \leq z$
- (4) $y \leq z \leq x$
- (5) $z \leq x \leq y$

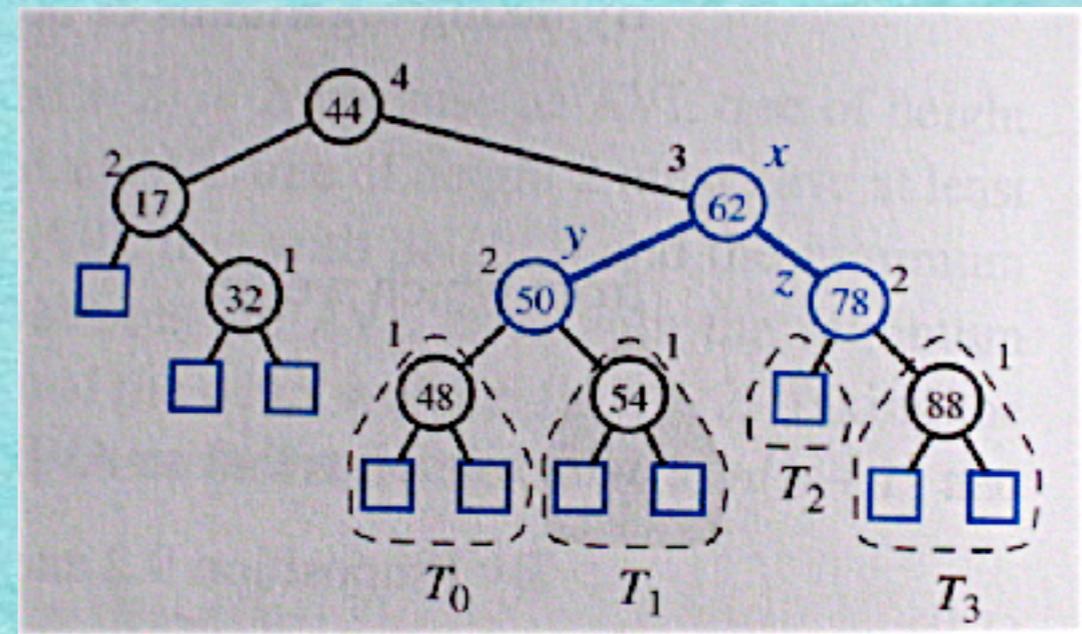
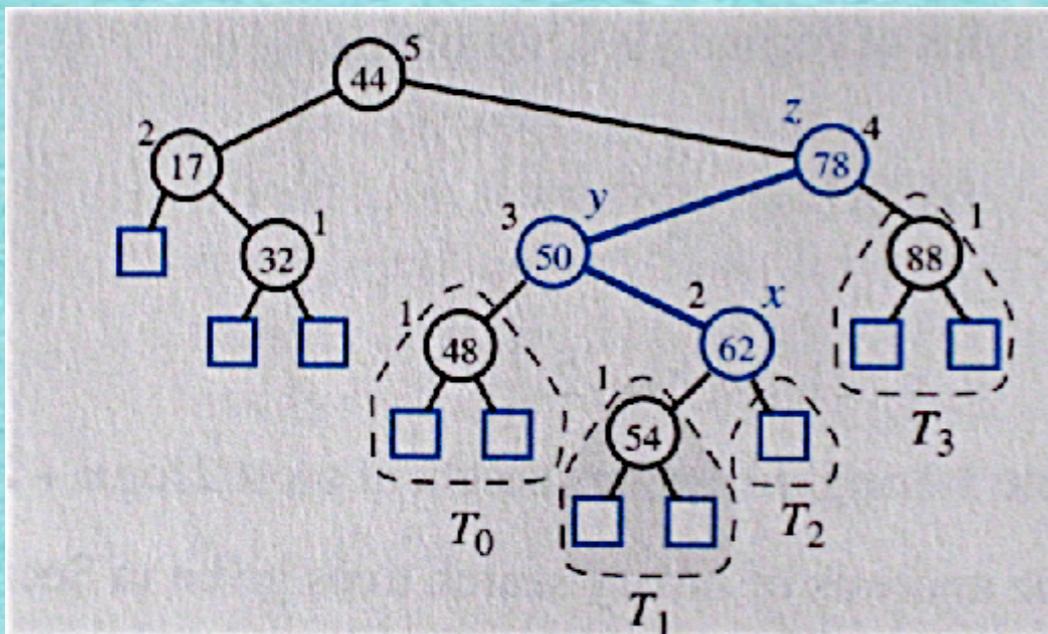


Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Welche Anordnungen gibt es?

- (1) $x \leq y \leq z$
- (2) $x \leq z \leq y$
- (3) $y \leq x \leq z$
- (4) $y \leq z \leq x$
- (5) $z \leq x \leq y$
- (6) $z \leq y \leq x$



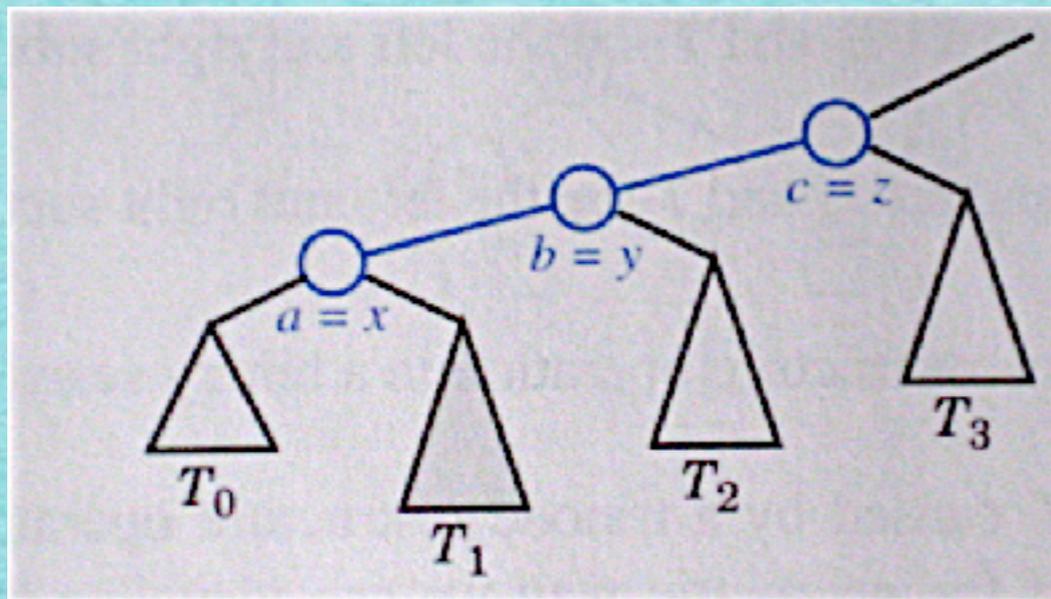
Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(1) $x \leq y \leq z$

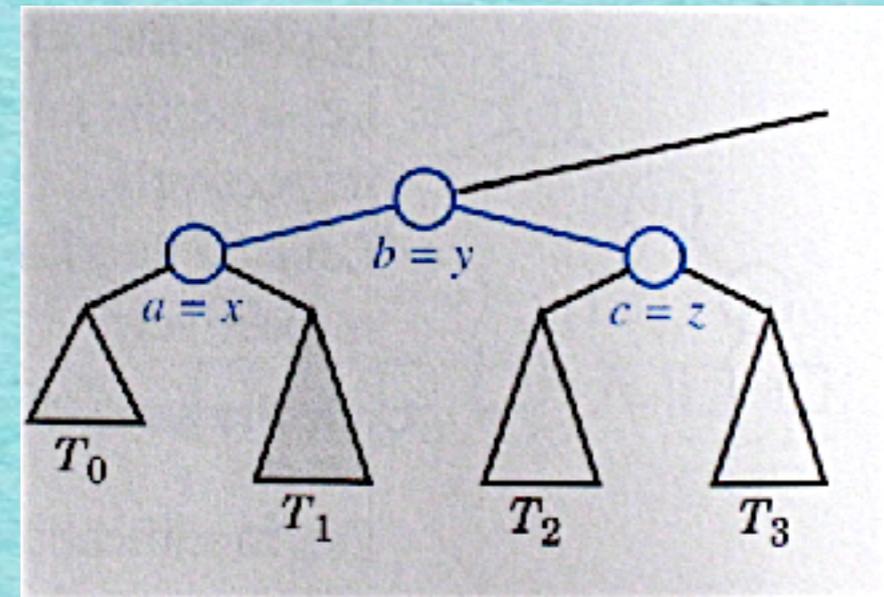
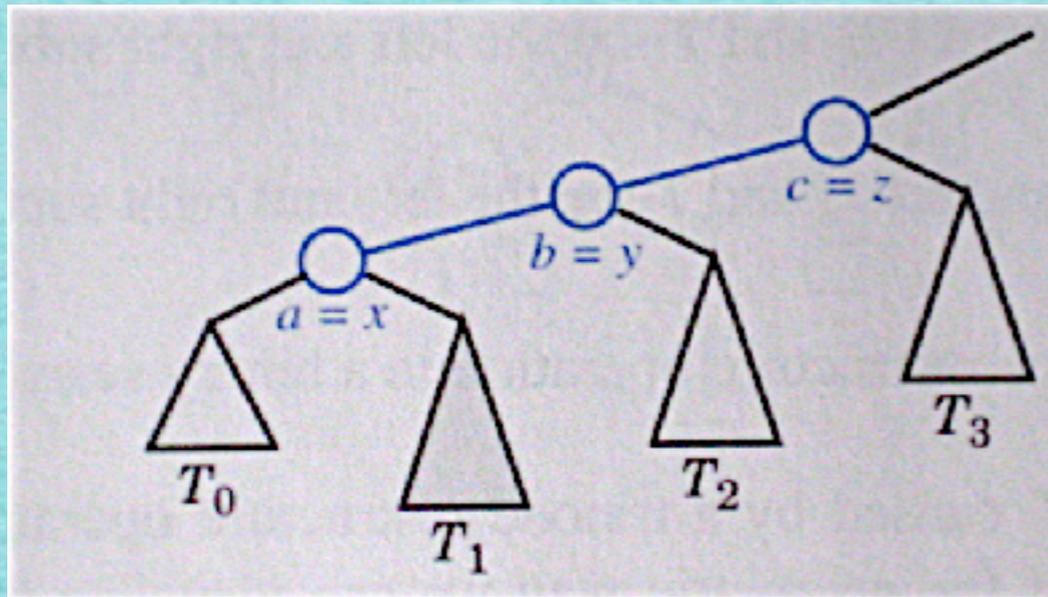
Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(1) $x \leq y \leq z$



Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

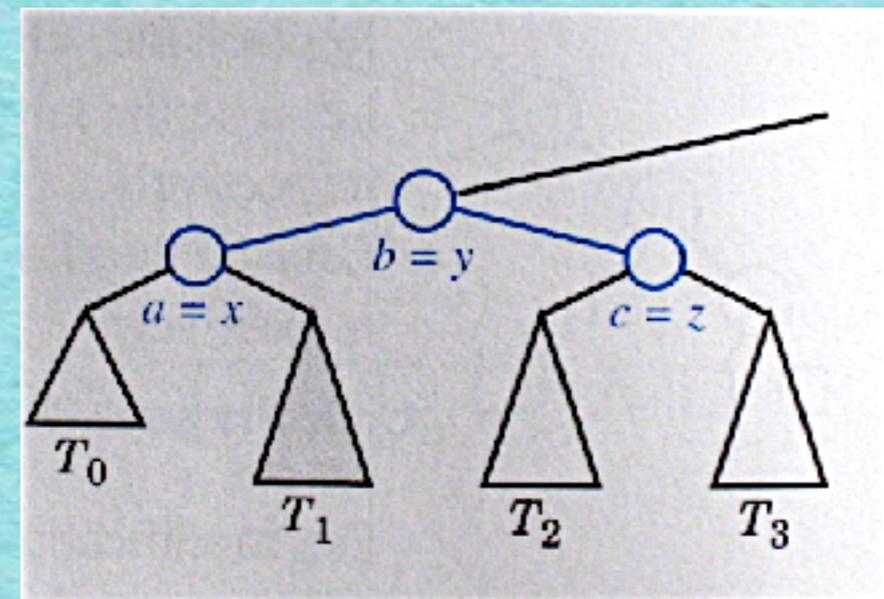
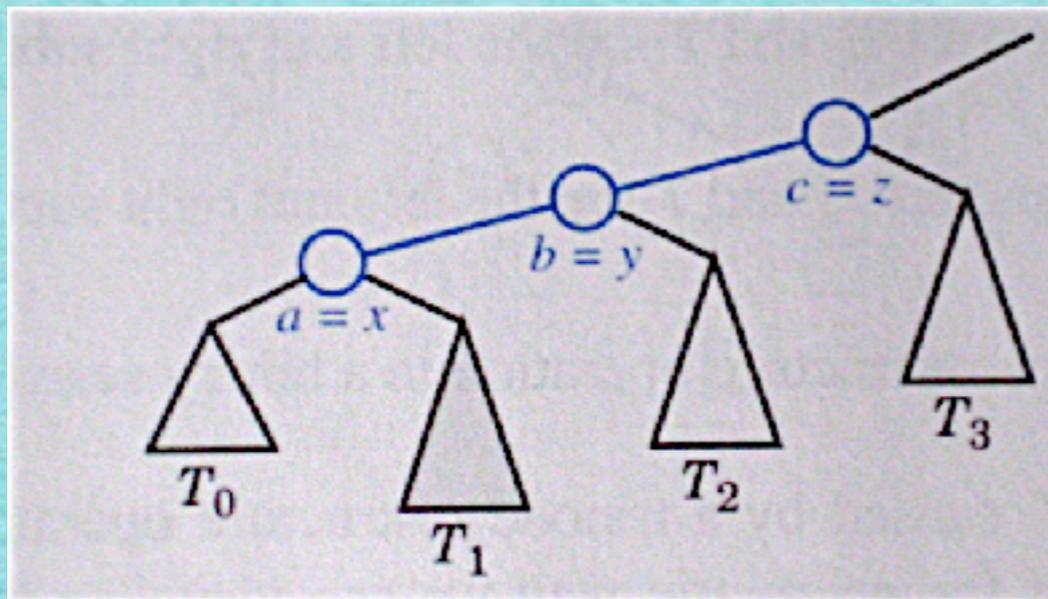
(1) $x \leq y \leq z$



Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(1) $x \leq y \leq z$



Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

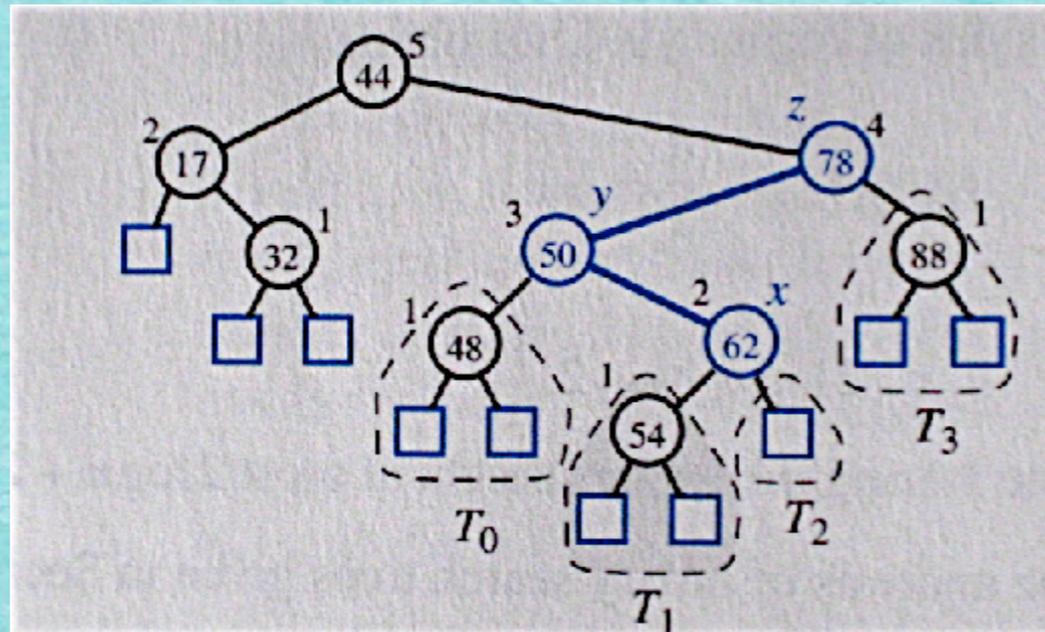
Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(2) $x \leq z \leq y$

Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

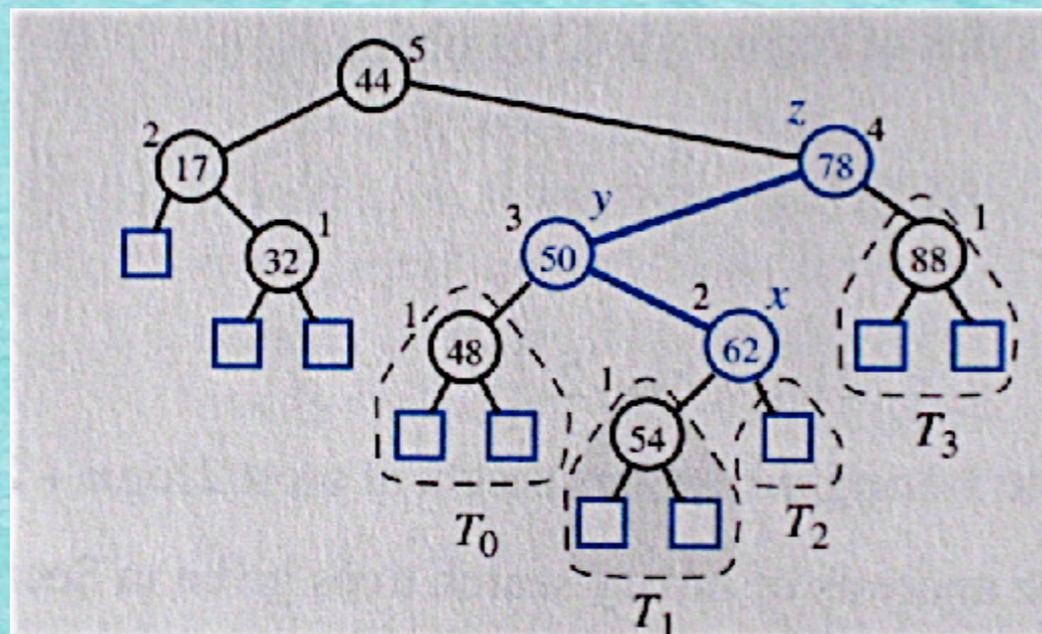
(2) $x \leq z \leq y$



Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(2) $x \leq z \leq y$



Der Fall kann nicht auftreten!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(2) $x \leq z \leq y$

Der Fall kann nicht auftreten!

Einfügen

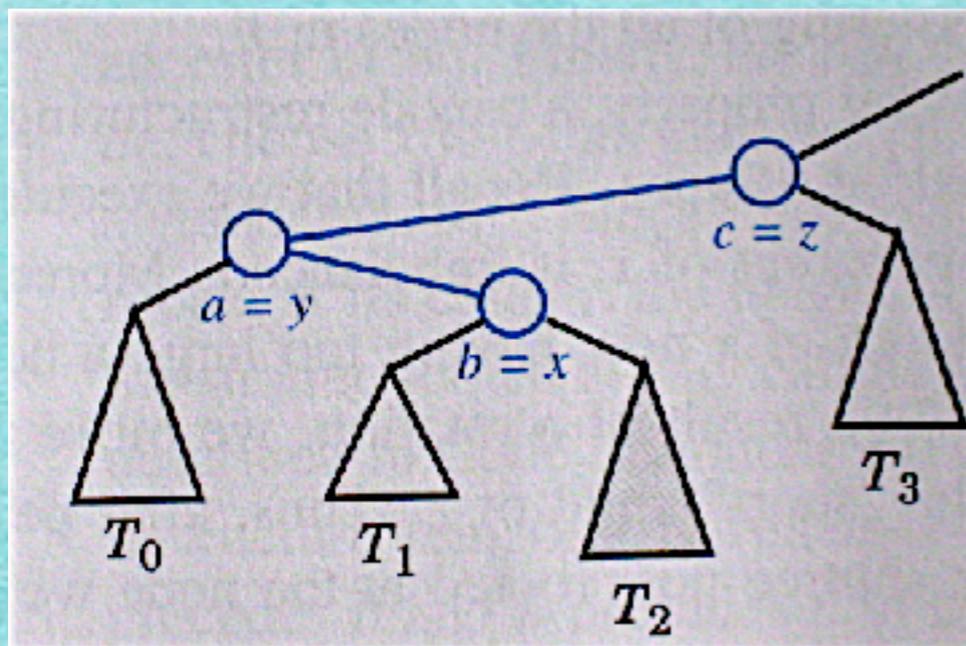
Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(3) $y \leq x \leq z$

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

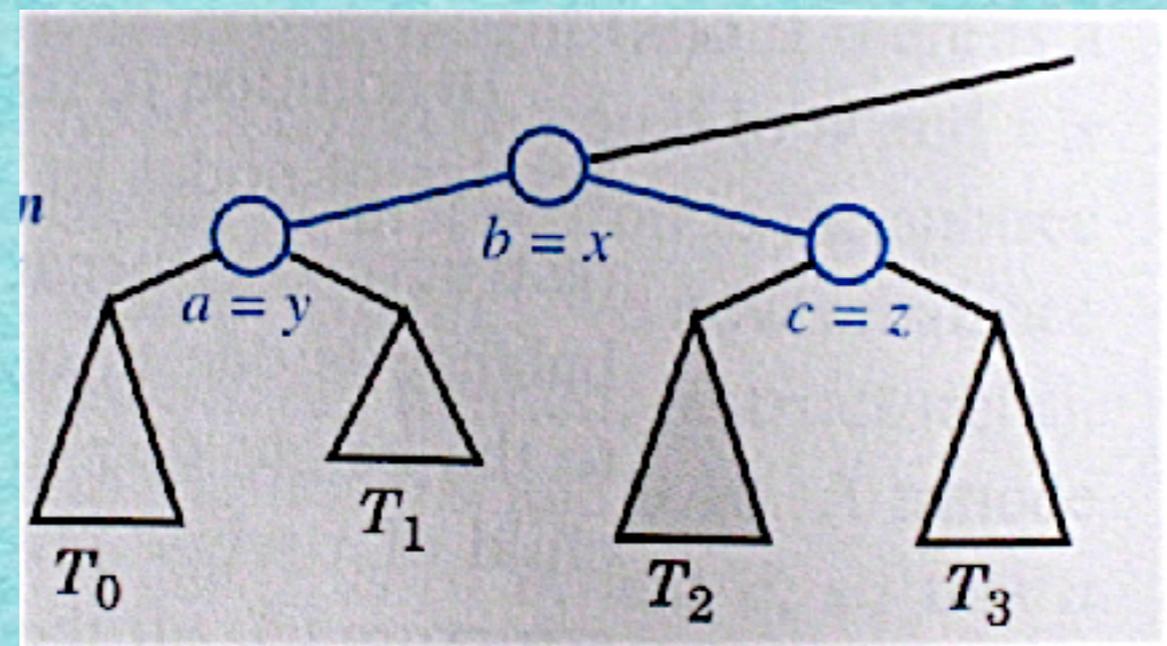
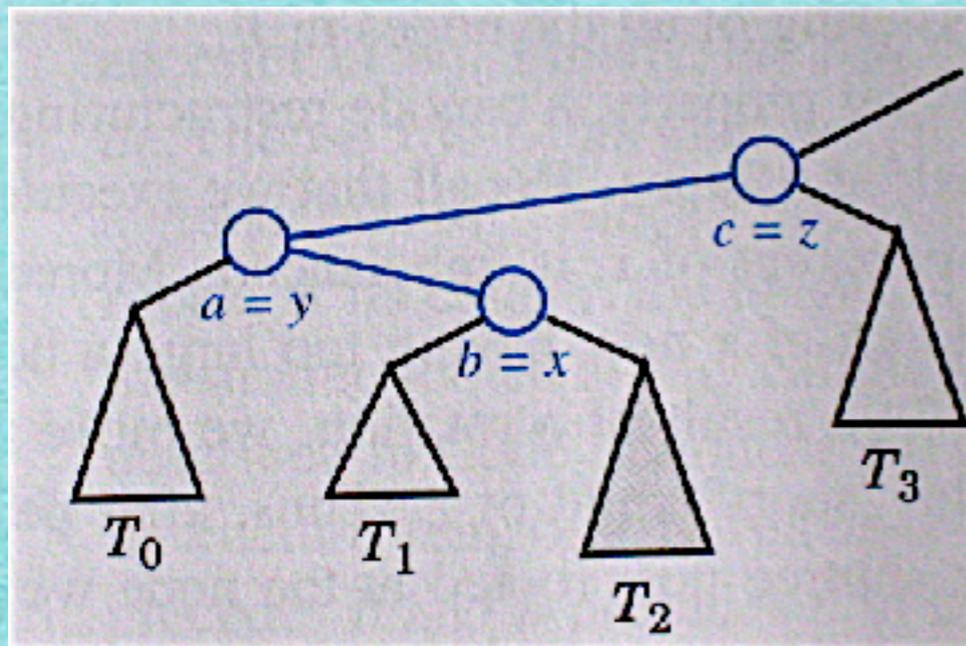
(3) $y \leq x \leq z$



Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

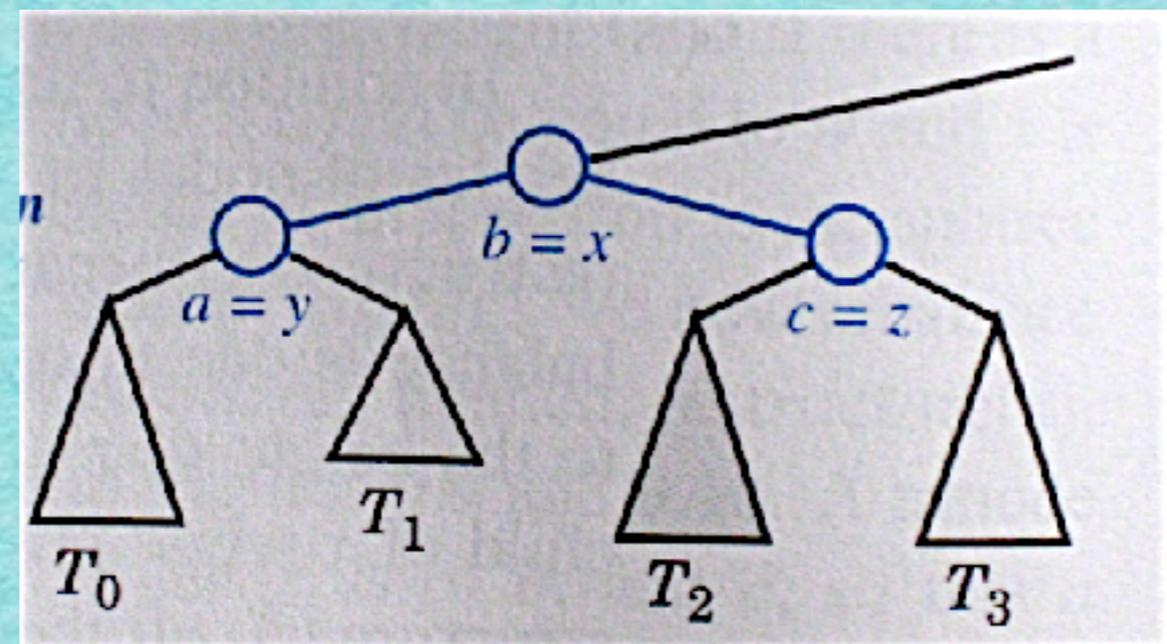
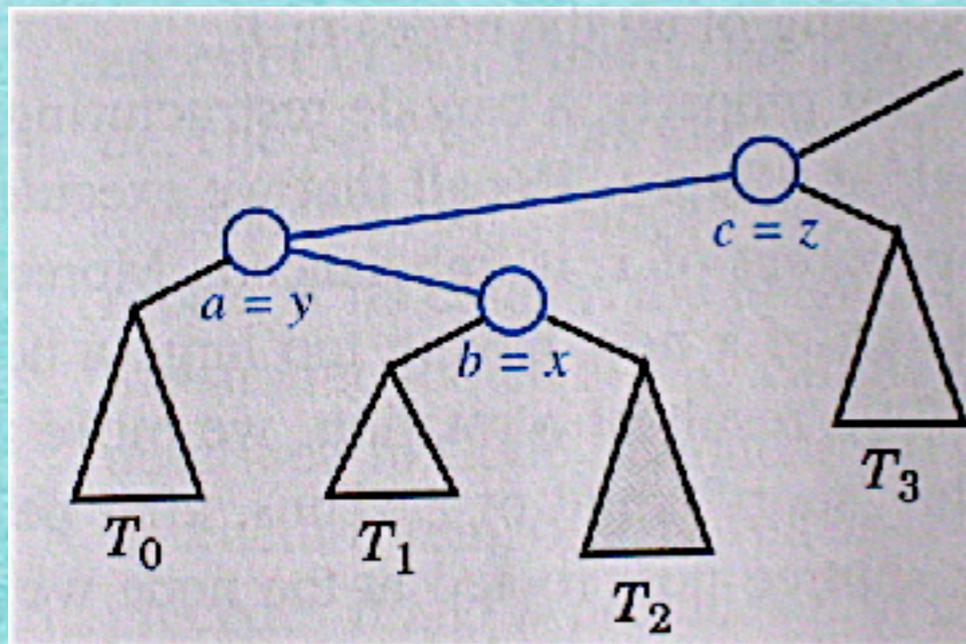
(3) $y \leq x \leq z$



Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(3) $y \leq x \leq z$



Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

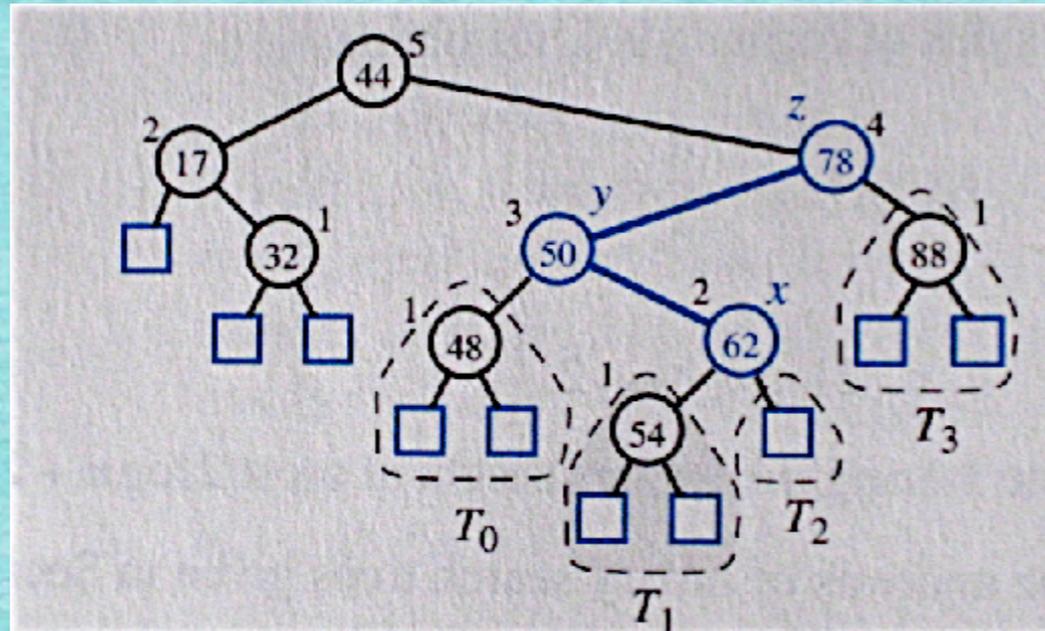
Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(4) $y \leq z \leq x$

Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

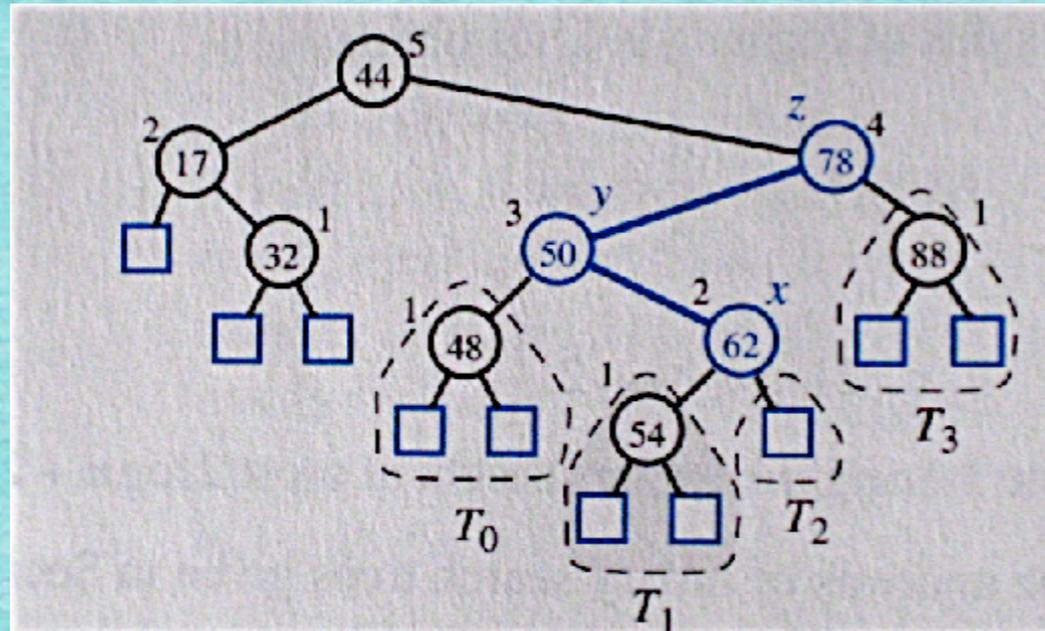
(4) $y \leq z \leq x$



Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(4) $y \leq z \leq x$



Der Fall kann nicht auftreten!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(4) $y \leq z \leq x$

Der Fall kann nicht auftreten!

Einfügen

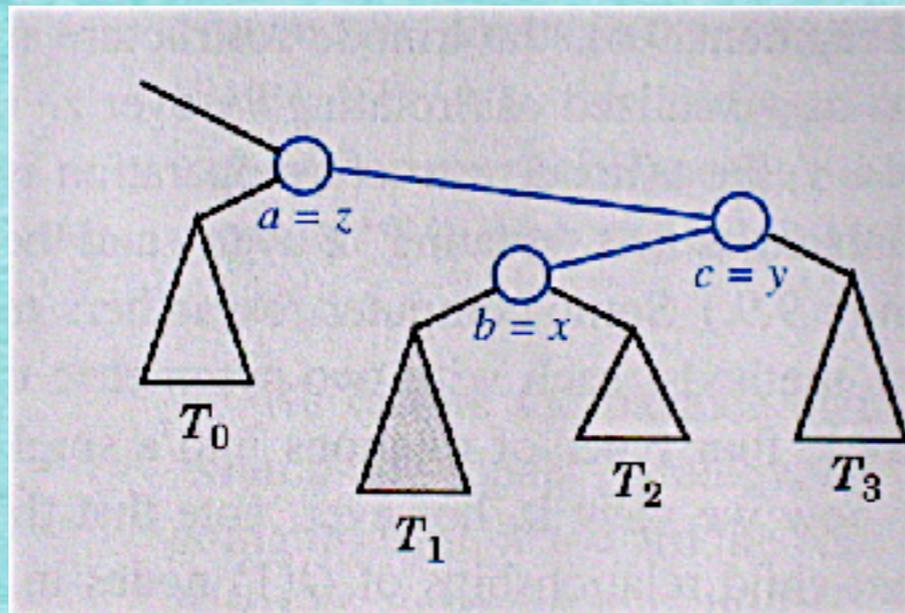
Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(5) $z \leq x \leq y$

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

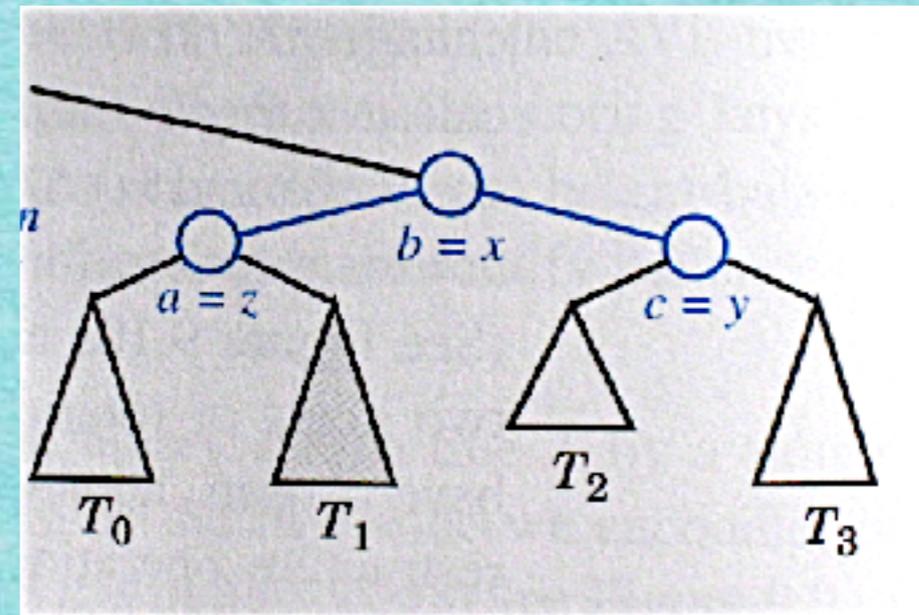
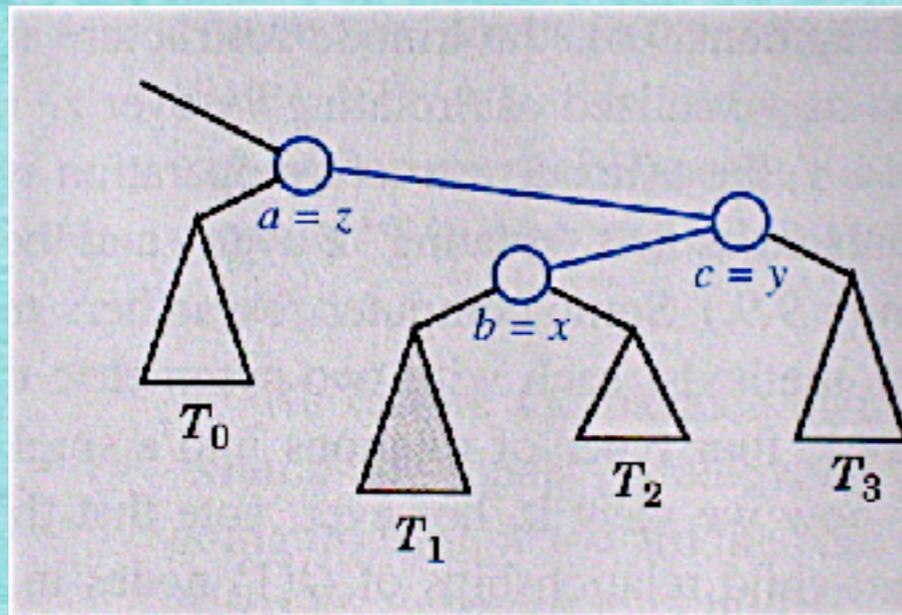
(5) $z \leq x \leq y$



Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

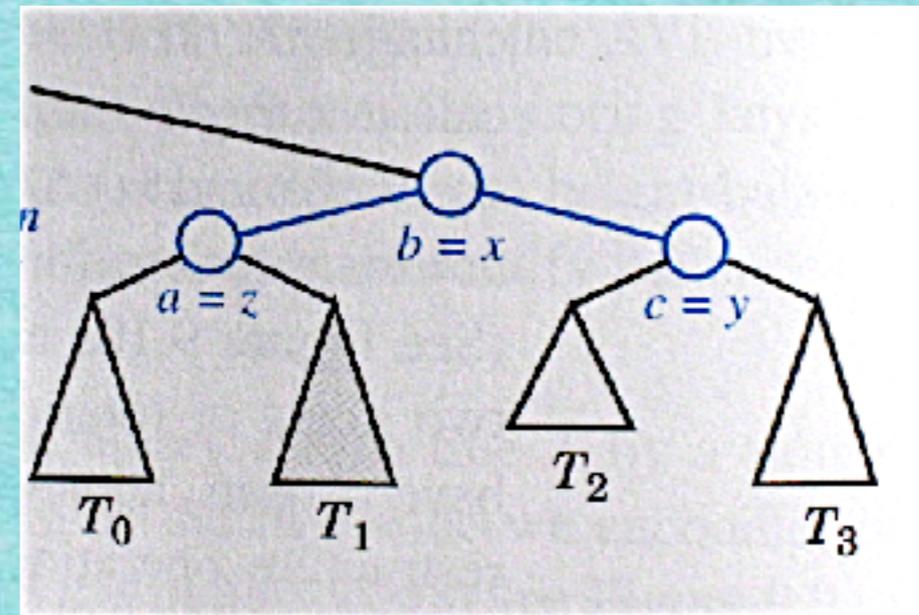
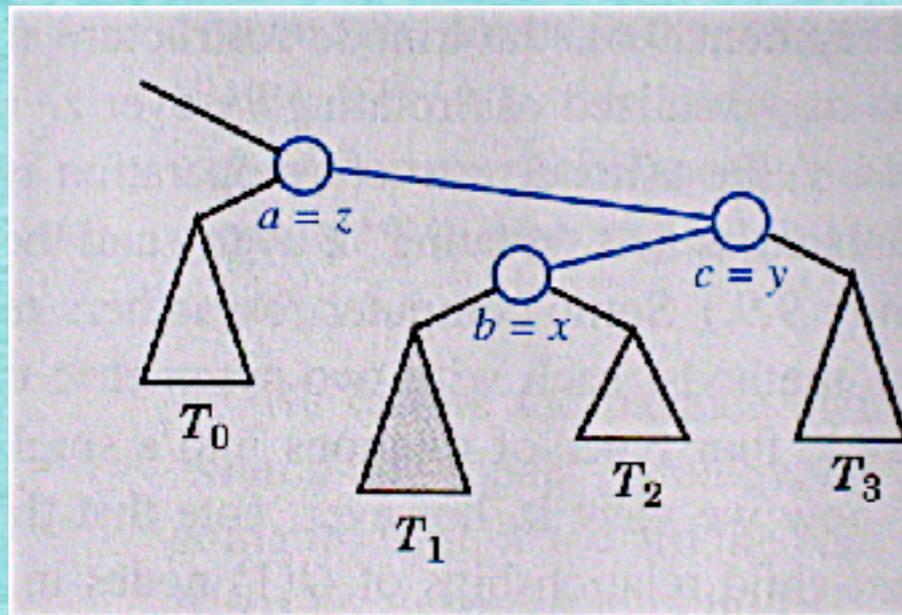
(5) $z \leq x \leq y$



Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(5) $z \leq x \leq y$



Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Einfügen

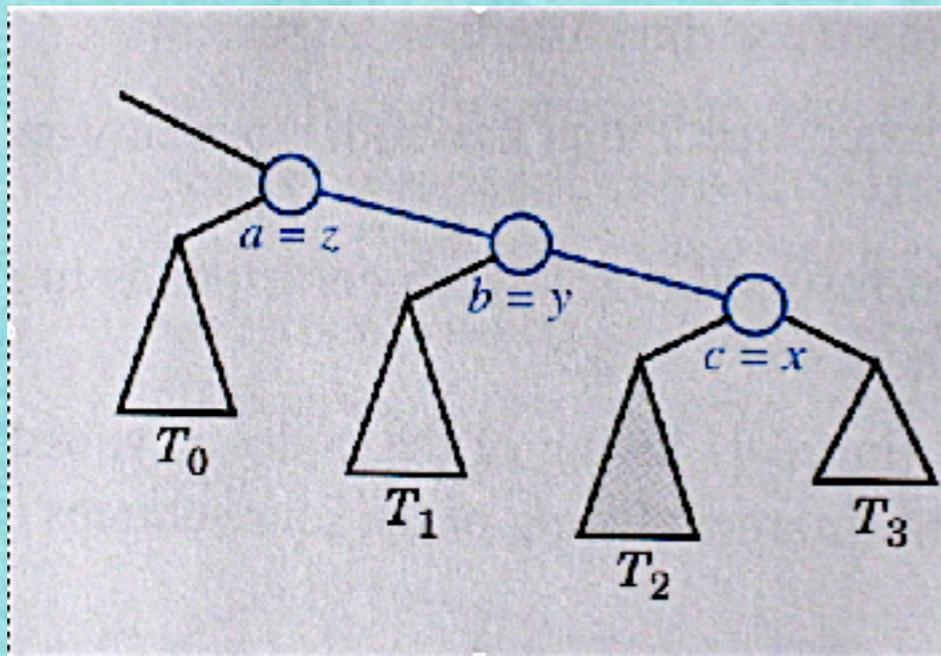
Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(6) $z \leq y \leq x$

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

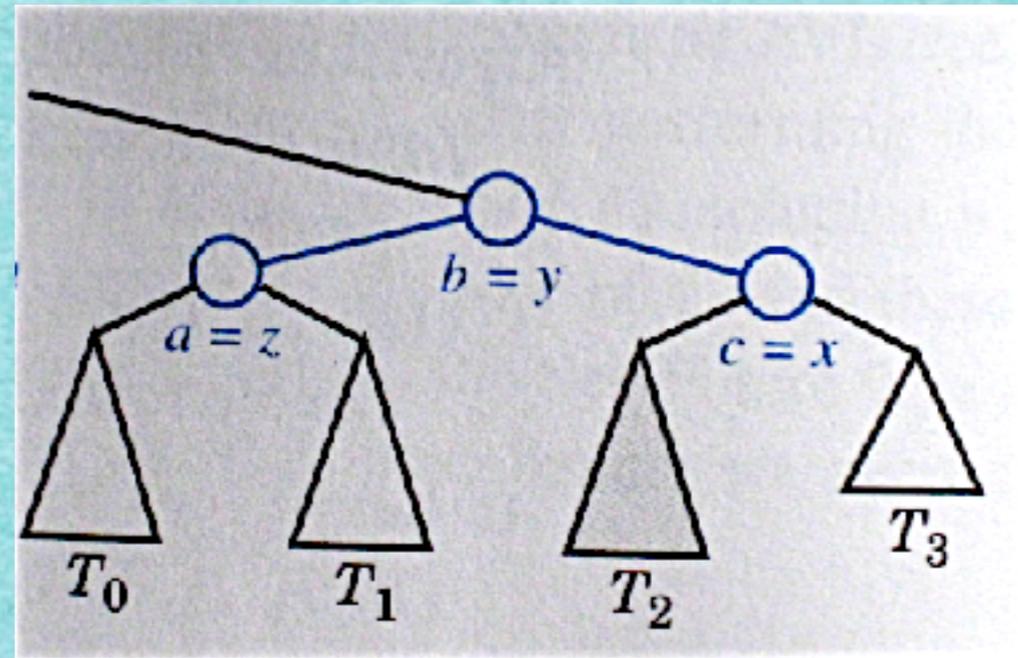
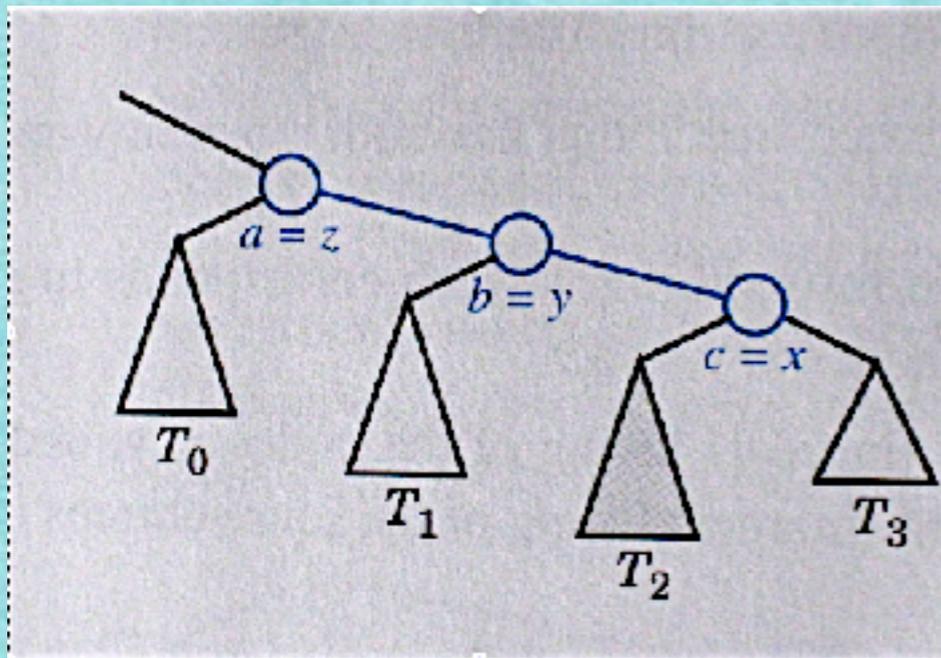
(6) $z \leq y \leq x$



Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

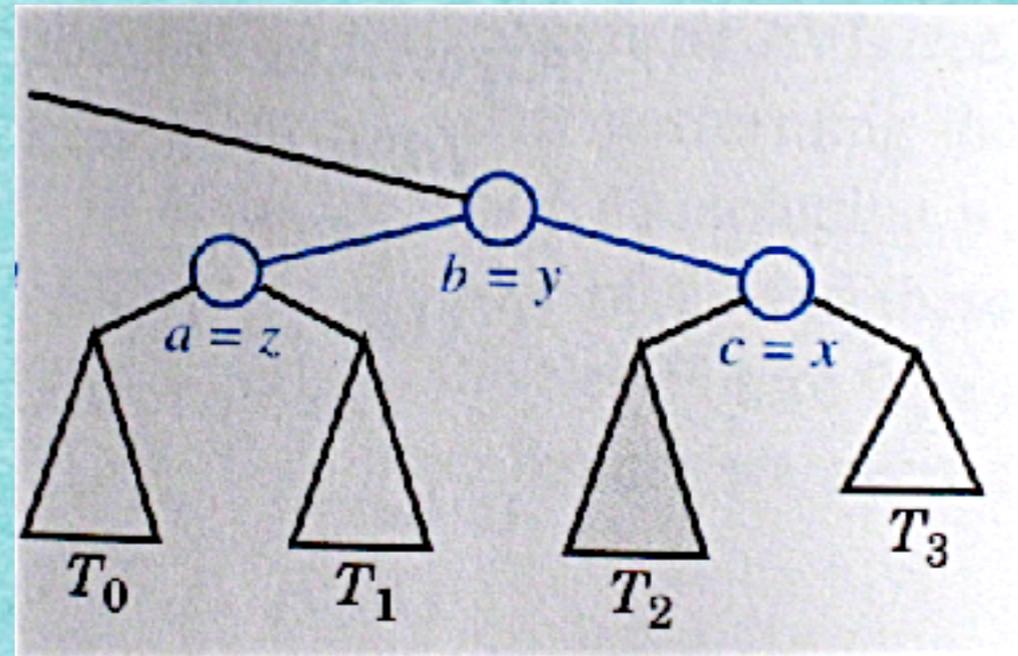
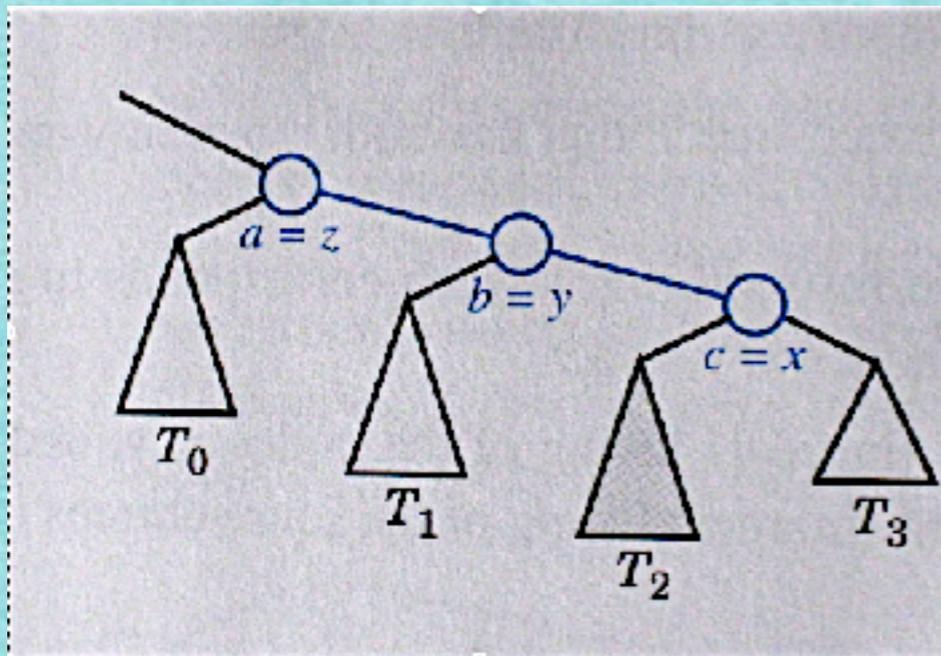
(6) $z \leq y \leq x$



Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(6) $z \leq y \leq x$

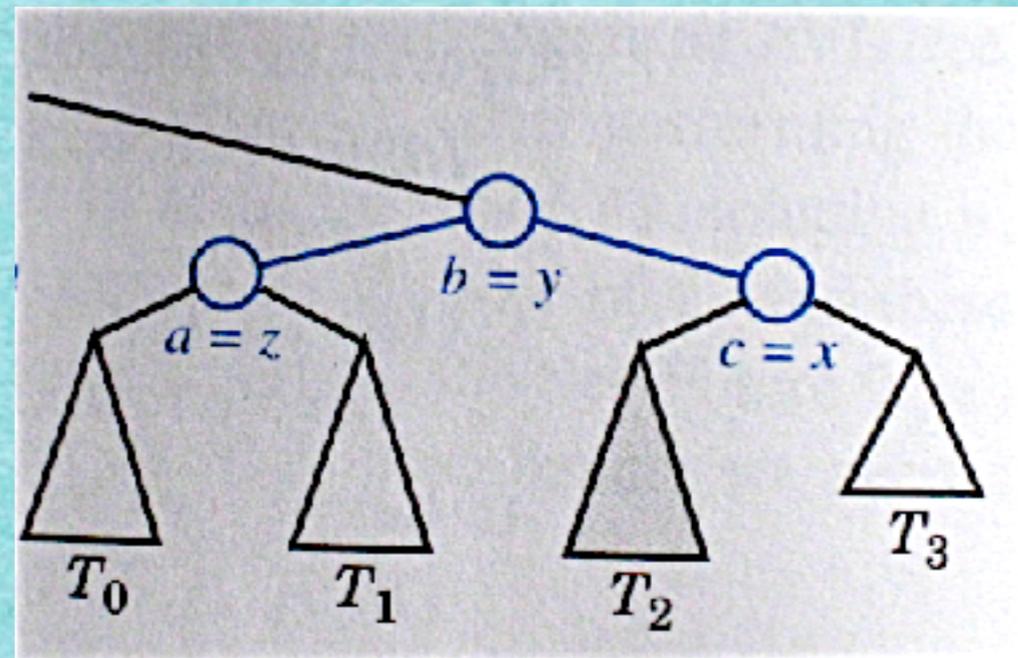
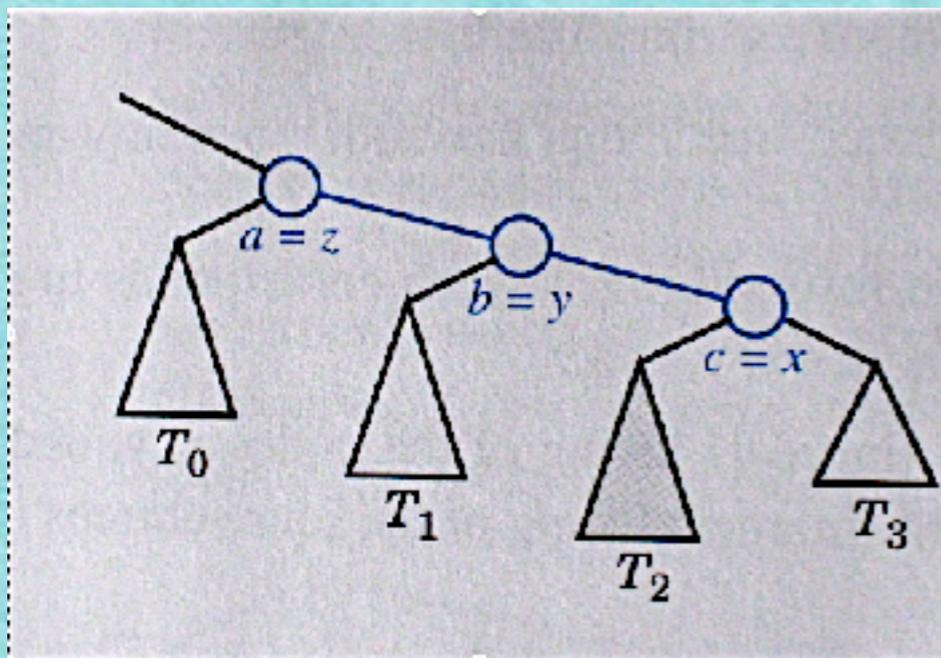


Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(6) $z \leq y \leq x$

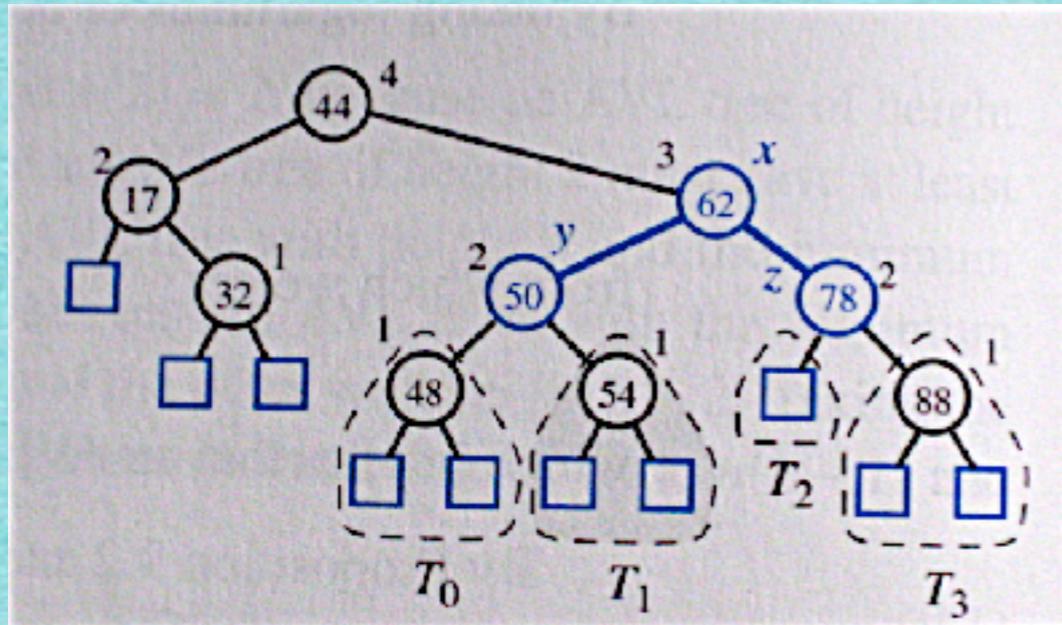


Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Alle Schritte erfordern nur konstant viele Rechenoperationen.

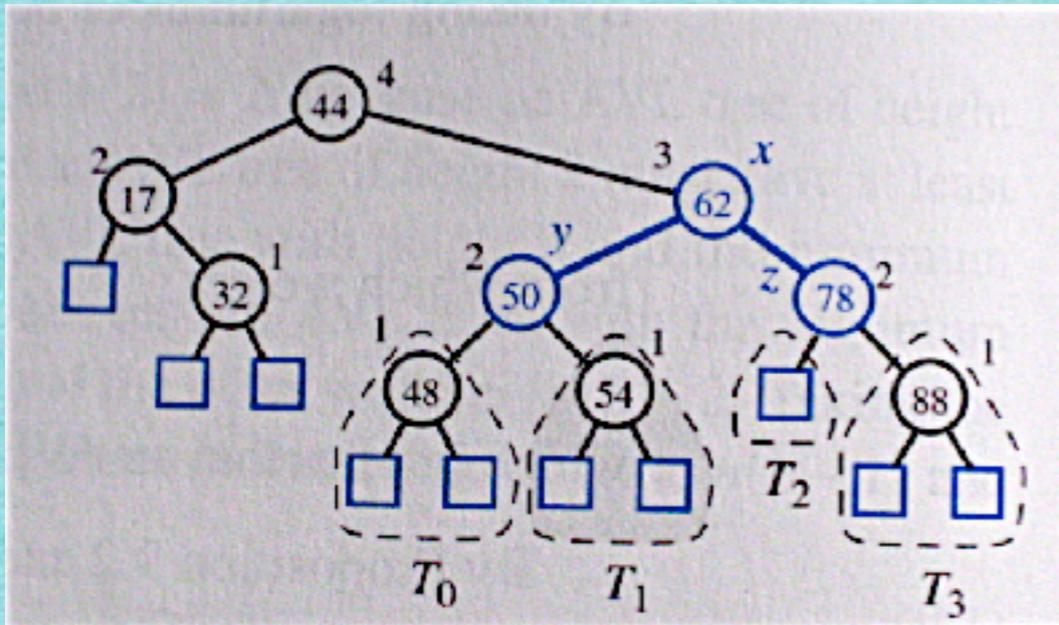
Löschen („DELETE“)

Löschen („DELETE“)



Löschen („DELETE“)

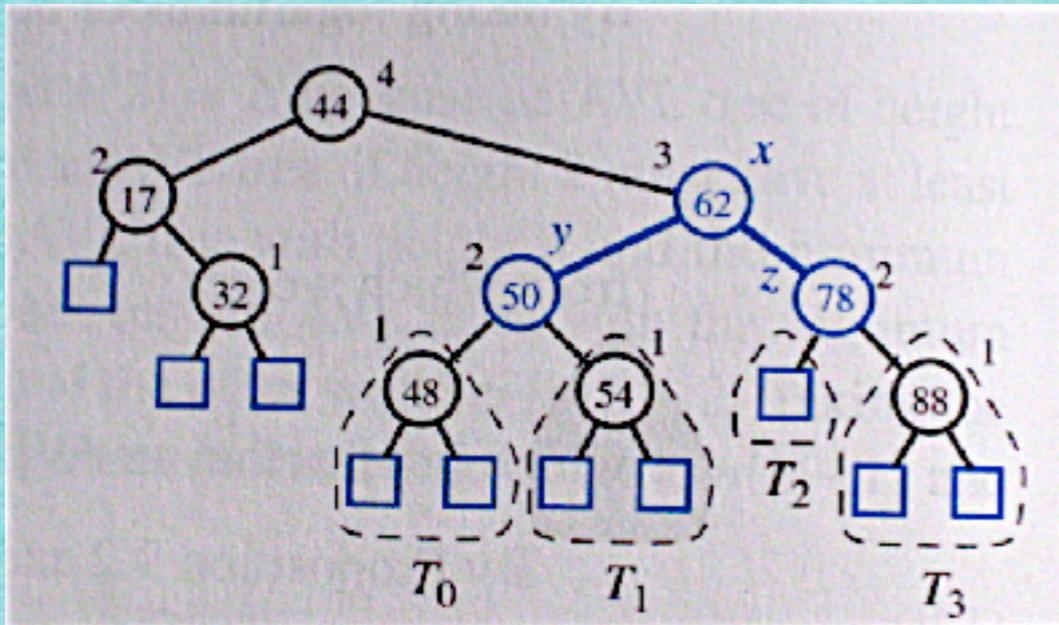
Aufgabe:



Löschen („DELETE“)

Aufgabe:

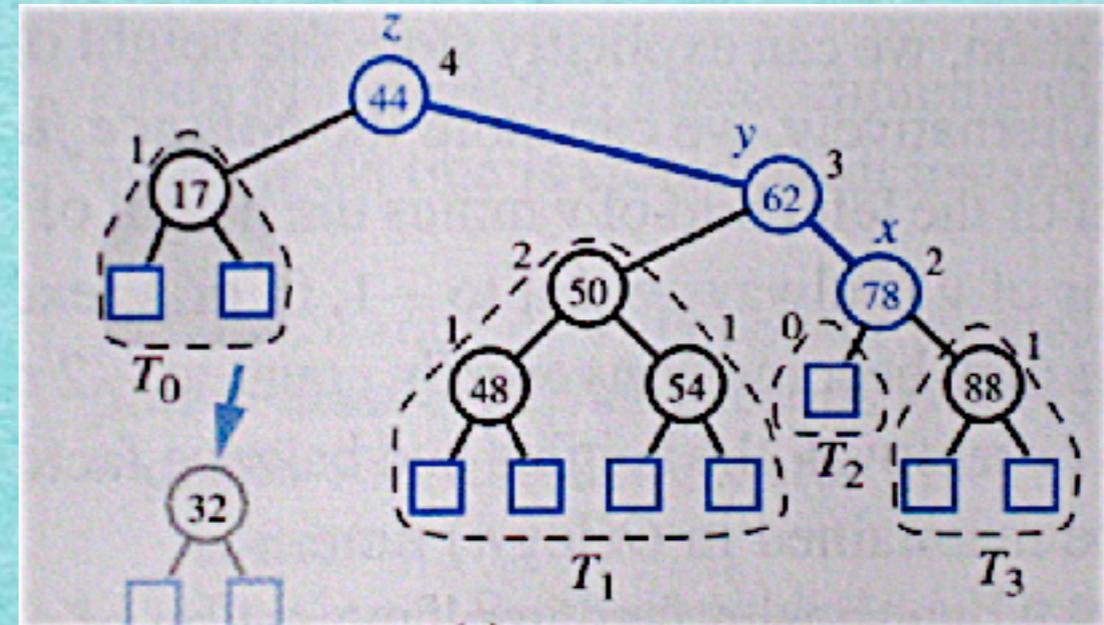
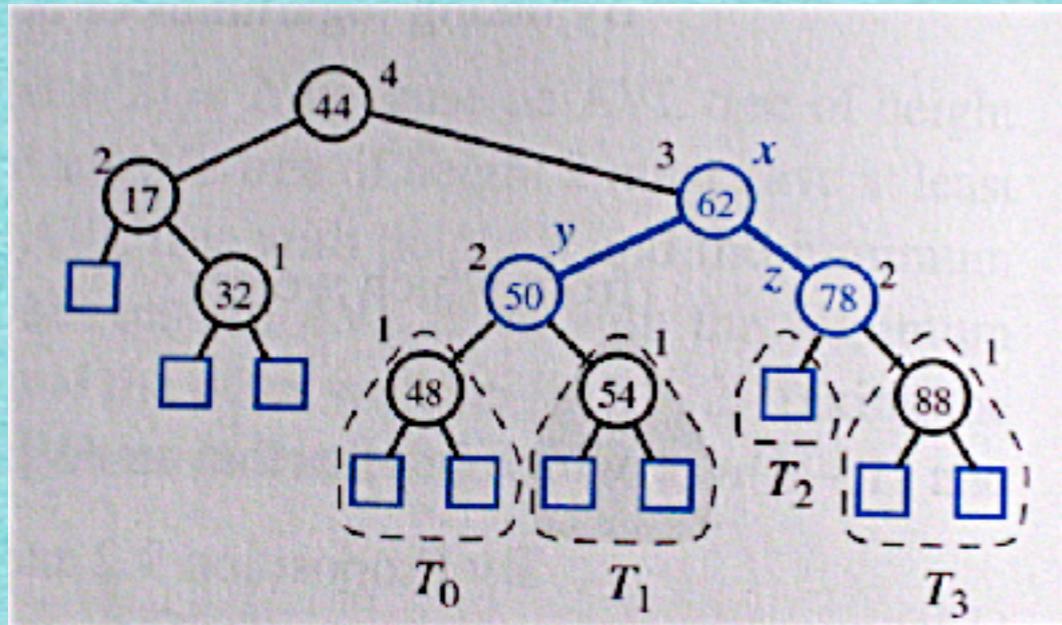
- *Lösche 32!*



Löschen („DELETE“)

Aufgabe:

- *Lösche 32!*



Löschen

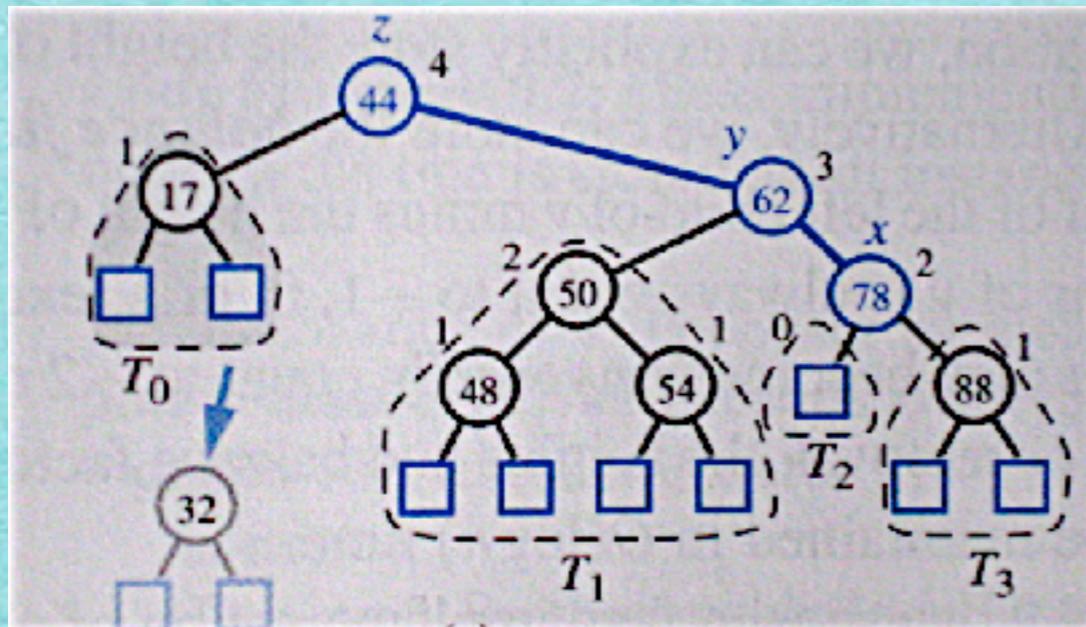
Wieder:

Wieder:

- ***Verwende **RESTRICTURE!*****

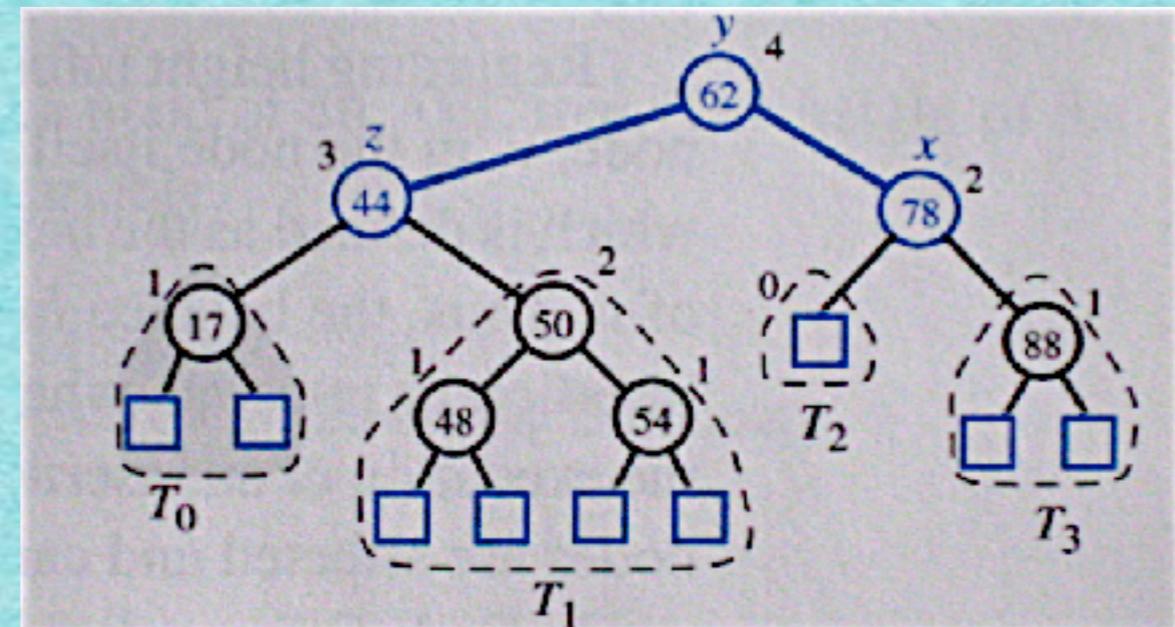
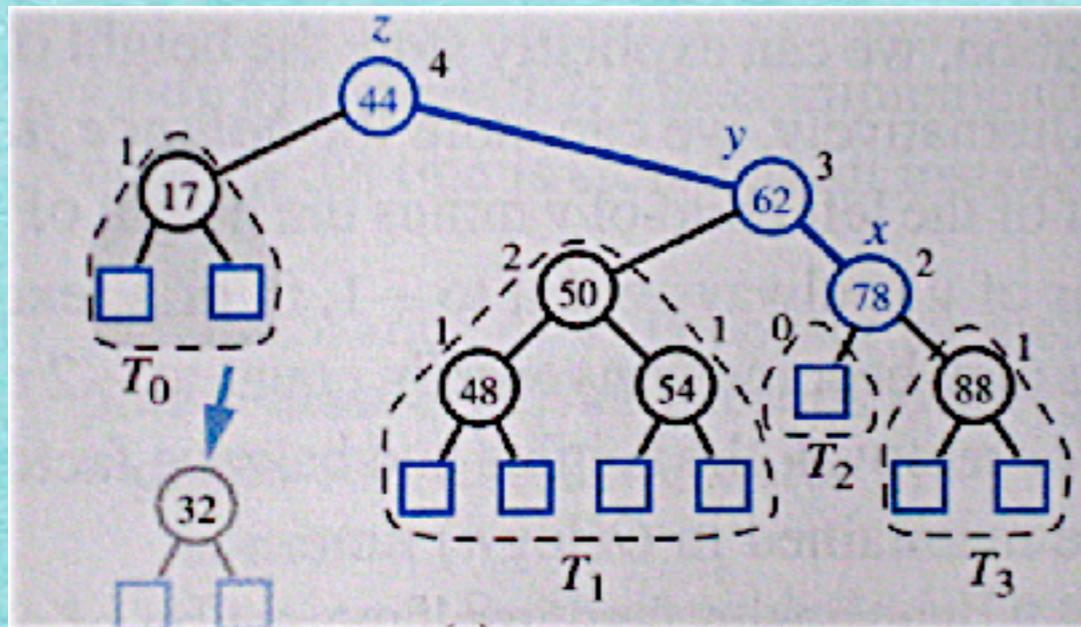
Wieder:

- *Verwende RESTRUCTURE!*



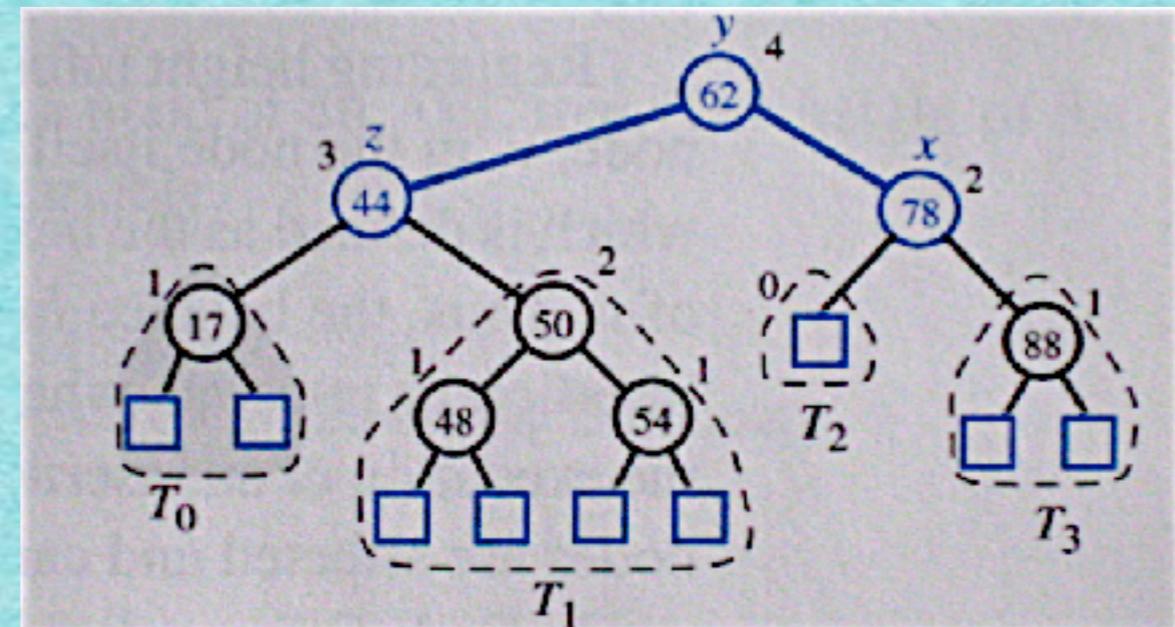
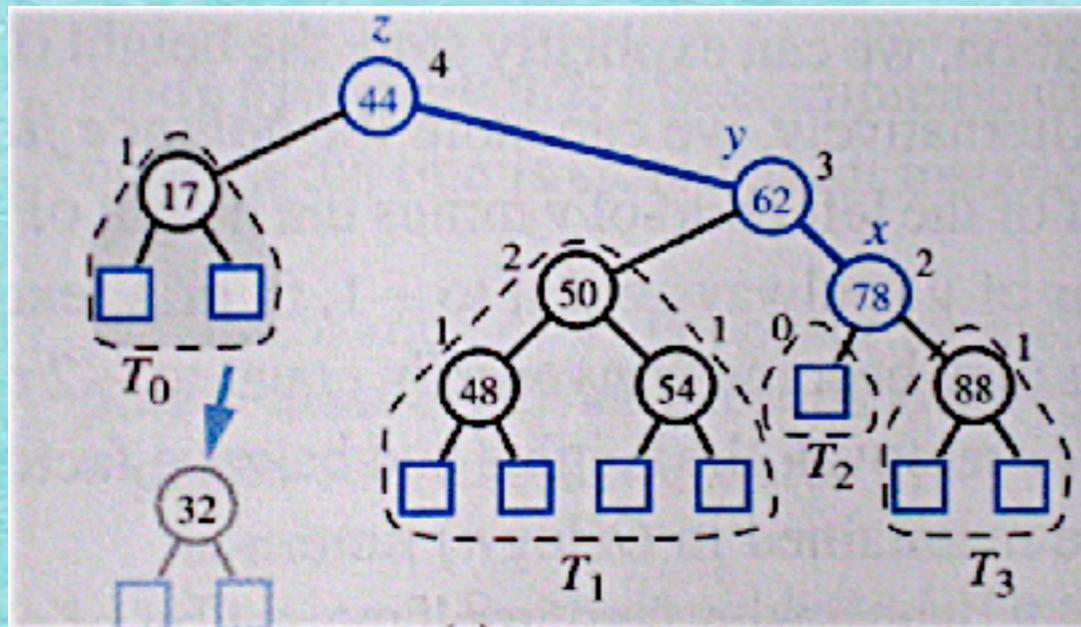
Wieder:

- *Verwende RESTRUCTURE!*



Wieder:

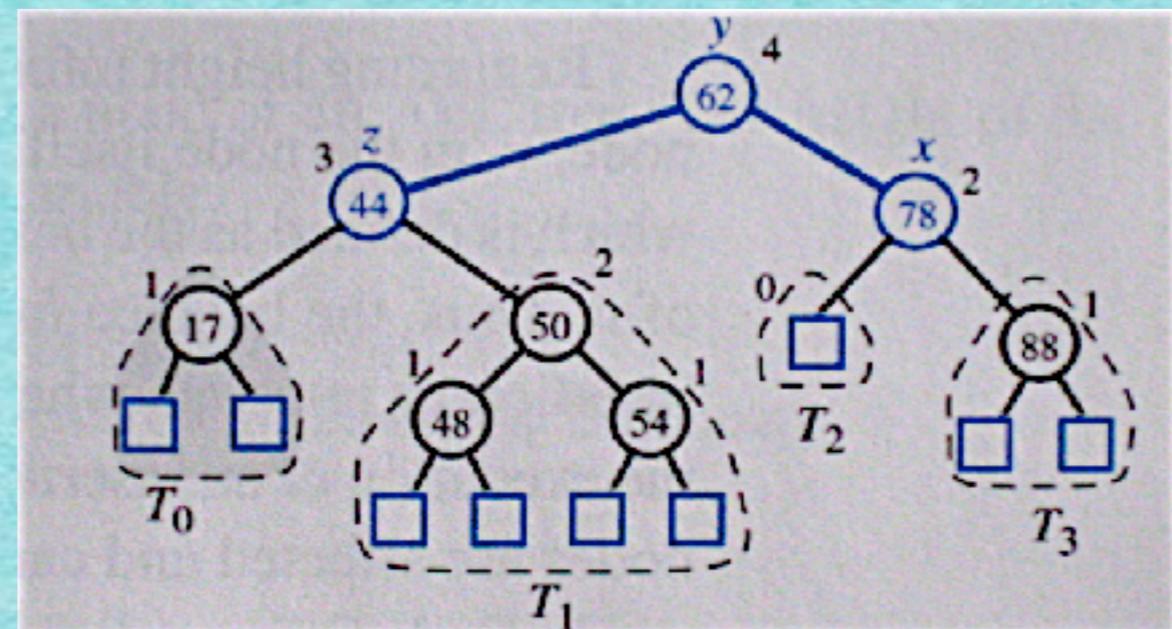
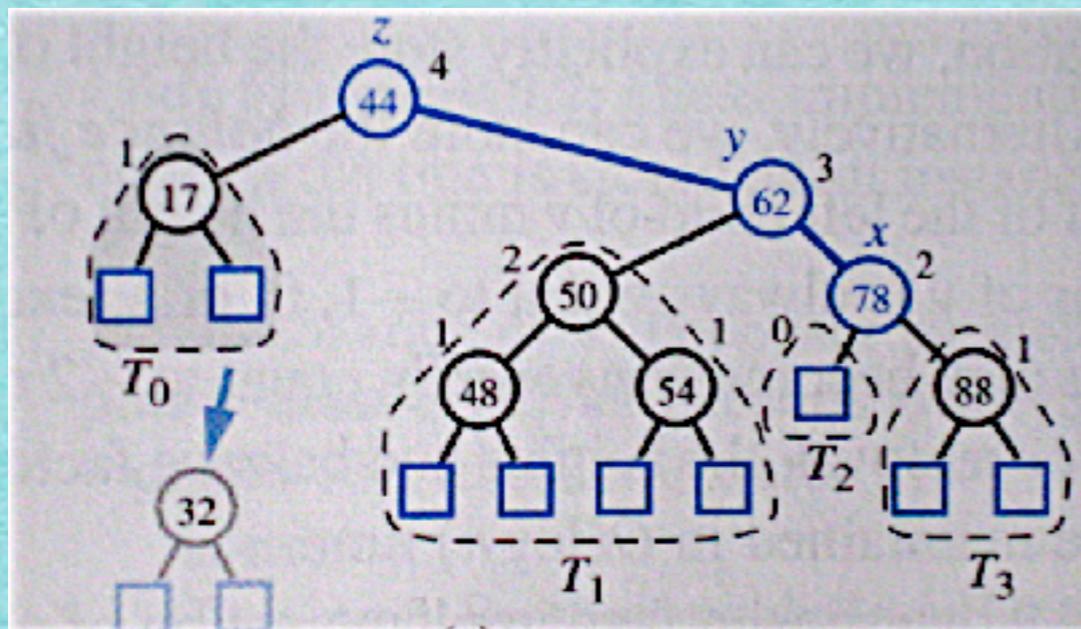
- *Verwende RESTRUCTURE!*



Das reicht in diesem Beispiel!

Wieder:

- *Verwende RESTRUCTURE!*

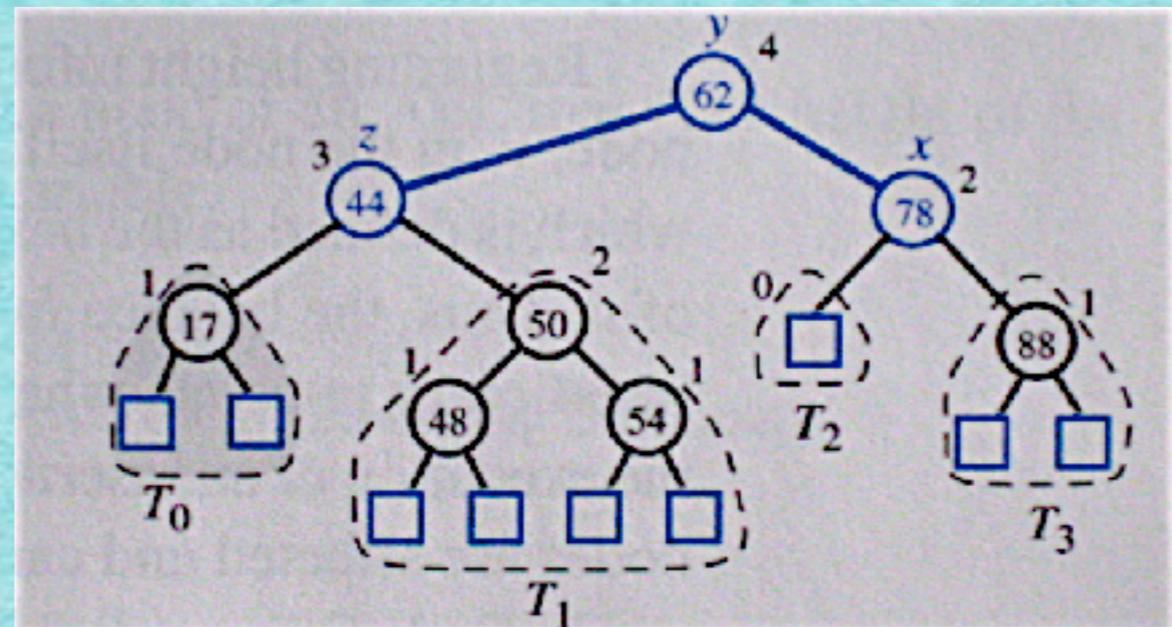
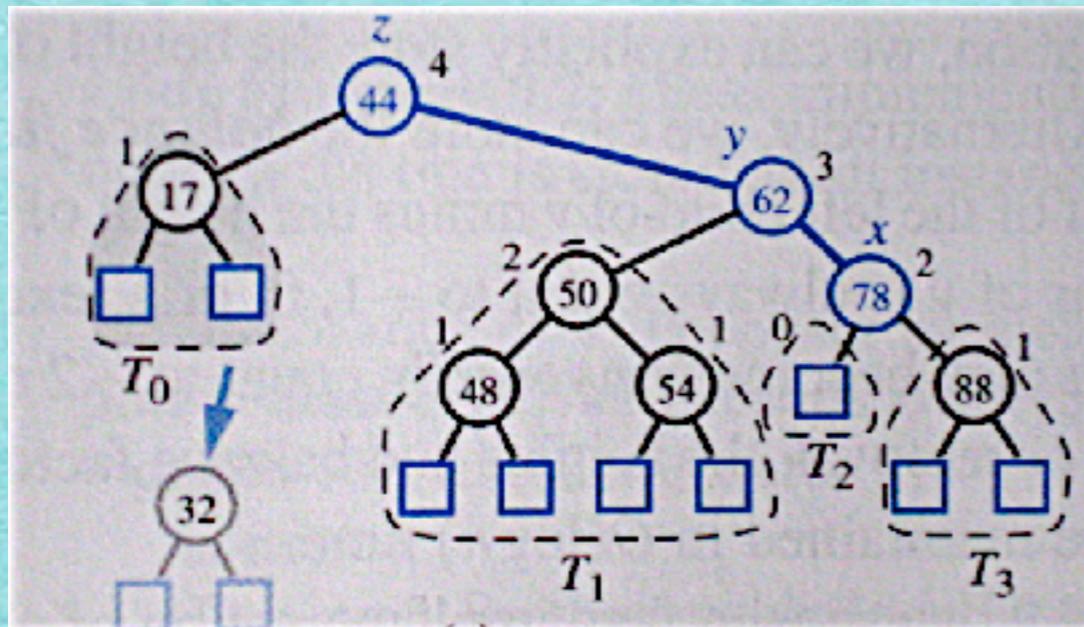


Das reicht in diesem Beispiel!

Allerdings kann im allgemeinen ein neues Problem auftauchen:

Wieder:

- *Verwende RESTRUCTURE!*

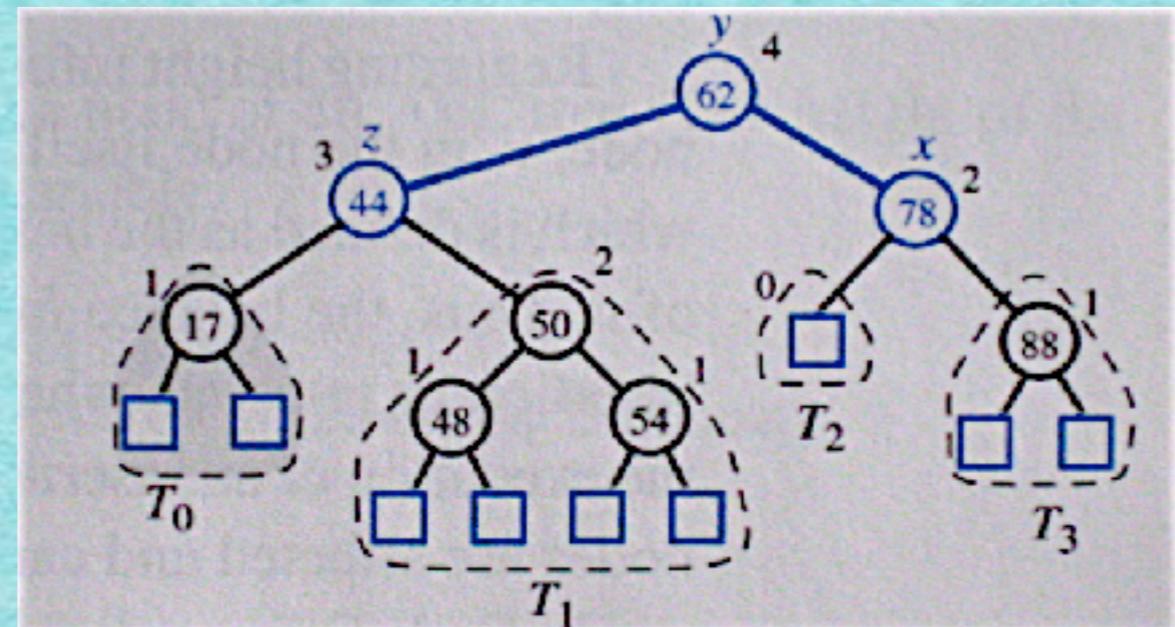
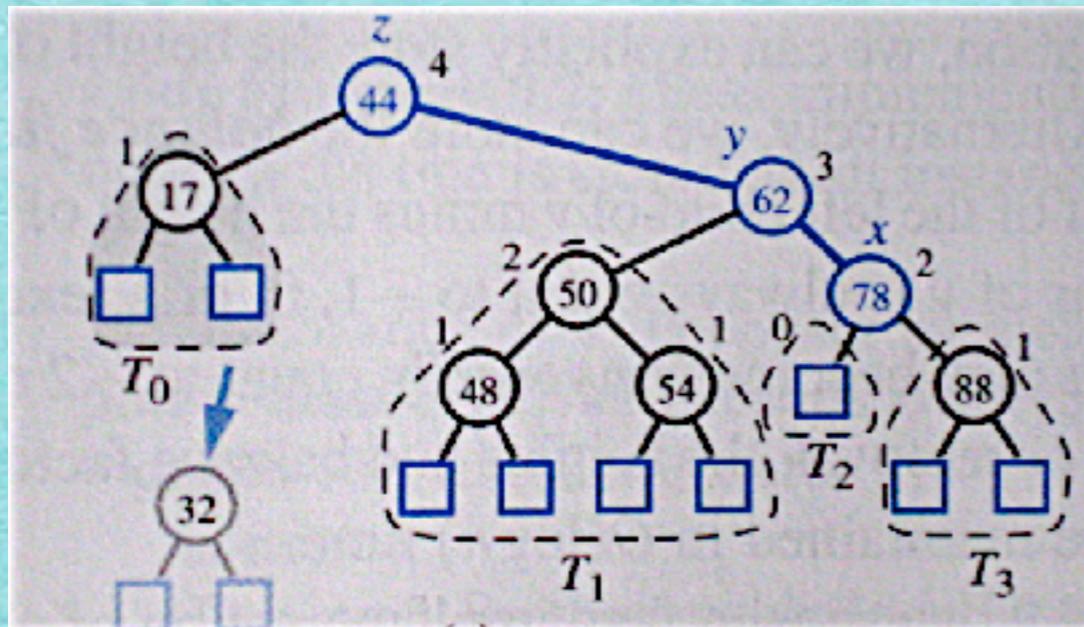


Das reicht in diesem Beispiel!

*Allerdings kann im allgemeinen ein neues Problem auftauchen:
Der neu höhenbalancierte Teilbaum von b kann niedriger sein als*

Wieder:

- ***Verwende RESTRUCTURE!***



Das reicht in diesem Beispiel!

***Allerdings kann im allgemeinen ein neues Problem auftauchen:
Der neu höhenbalancierte Teilbaum von b kann niedriger sein als
der vorher von z. Dadurch wird eventuell der Vater von z
unbalanciert!***

Löschen

Wieder:

Wieder:

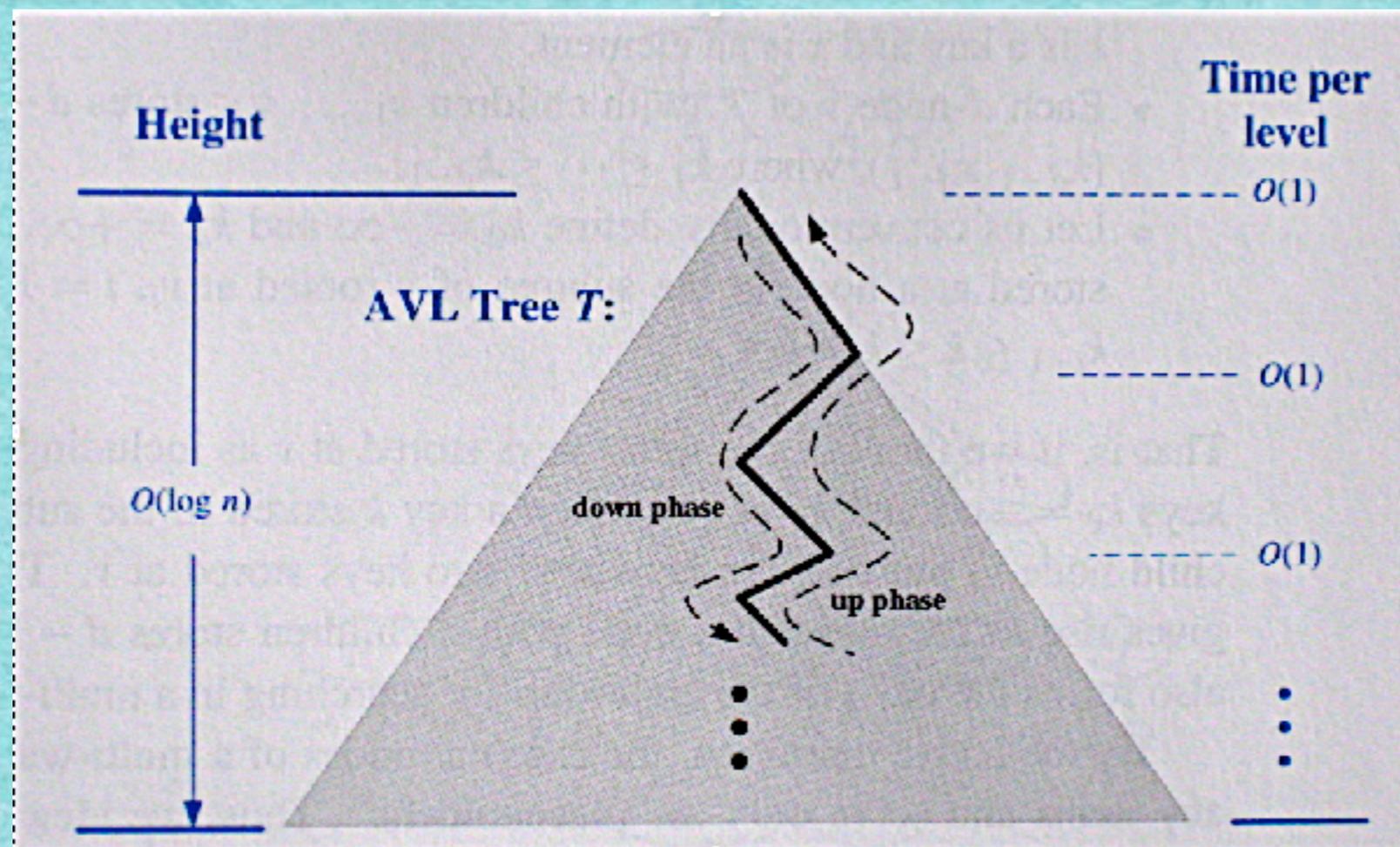
- *Verwende RESTRUCTURE!*

Wieder:

- *Verwende RESTRUCTURE!*
- *Ggf. immer wieder...*

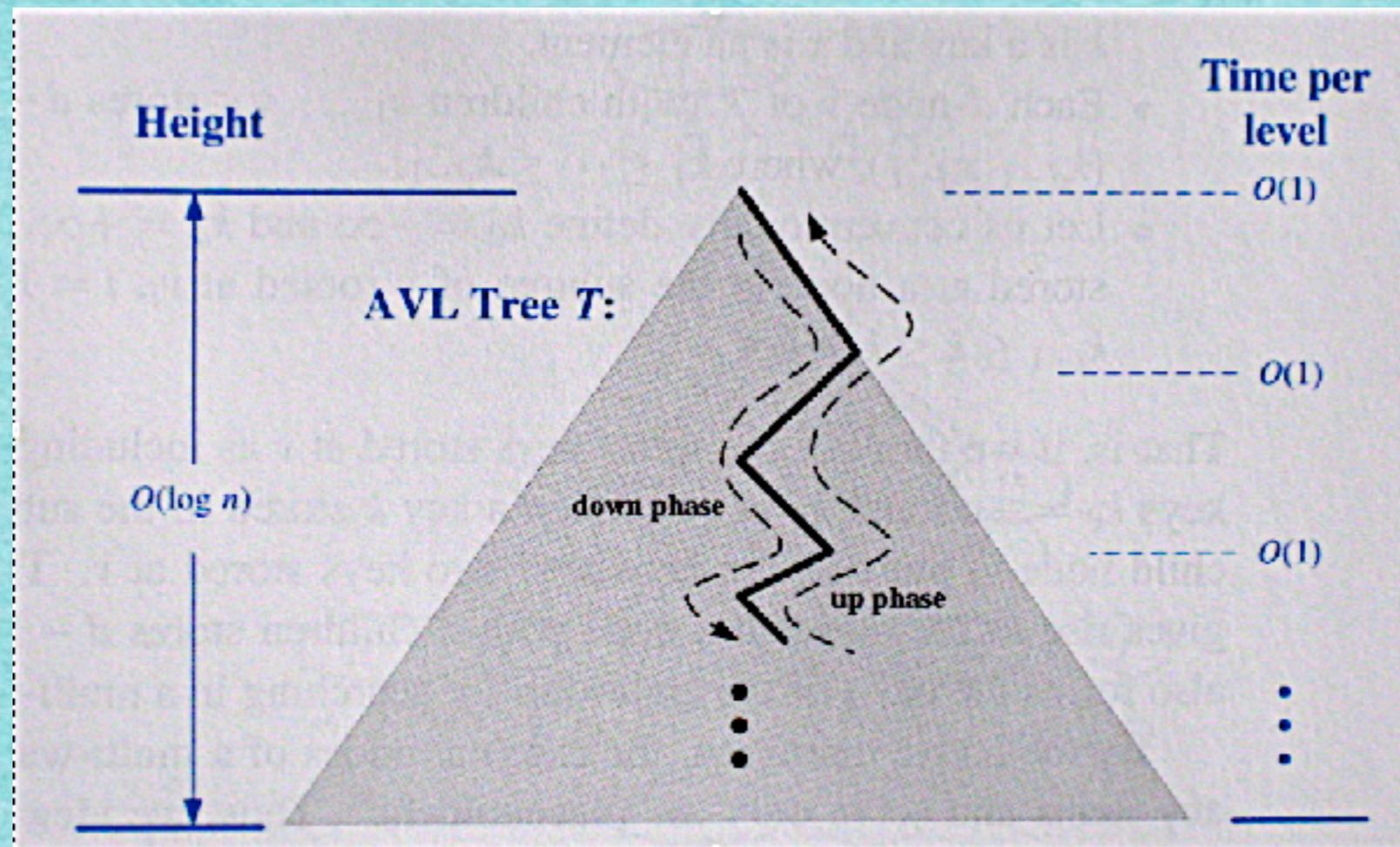
Wieder:

- *Verwende RESTRUCTURE!*
- *Ggf. immer wieder...*



Wieder:

- *Verwende RESTRUCTURE!*
- *Ggf. immer wieder...*



Höchstens $O(\log n)$ RESTRUCTURE-Operationen, jeweils in $O(1)$!

Löschen

Satz 4.11

Satz 4.11

Mithilfe von RESTRUCTURE kann man einen AVL-Baum auch nach einer Lösch-Operation höhenbalanciert halten.

Satz 4.11

*Mithilfe von RESTRUCTURE kann man einen AVL-Baum auch nach einer Lösch-Operation höhenbalanciert halten.
Die Zeit dafür ist $O(\log n)$.*

BÄLÄNCE TREE

1/2

idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

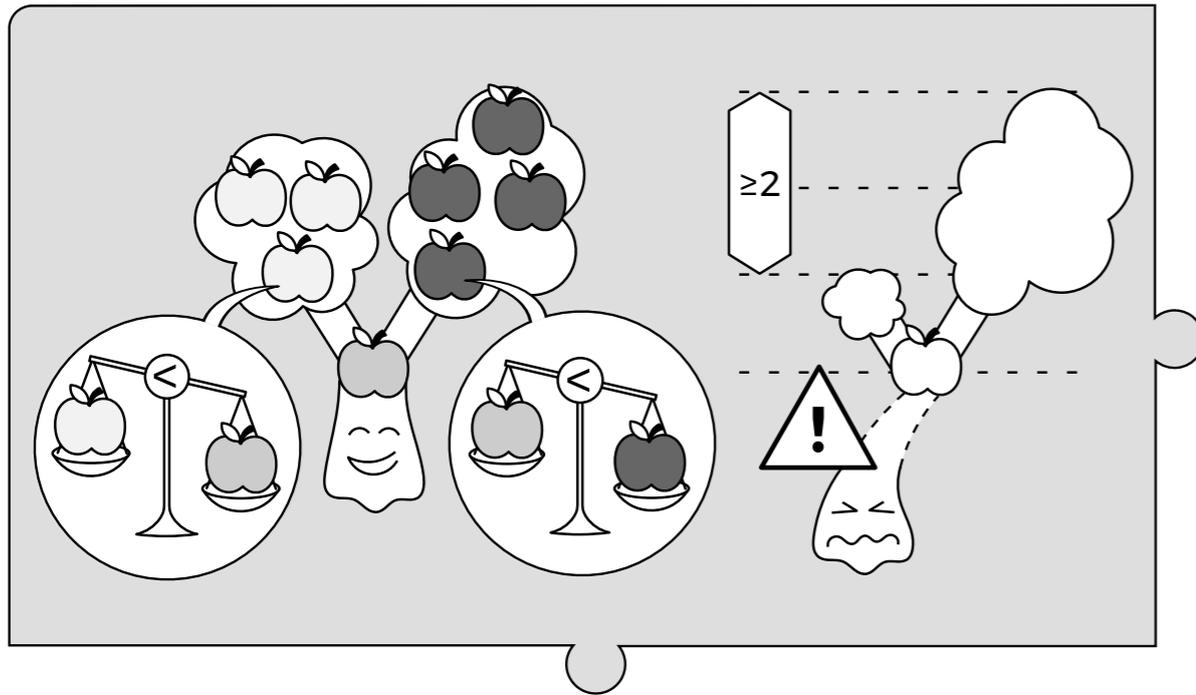
IDEA

BÄLÄNCE TREE

1/2

idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

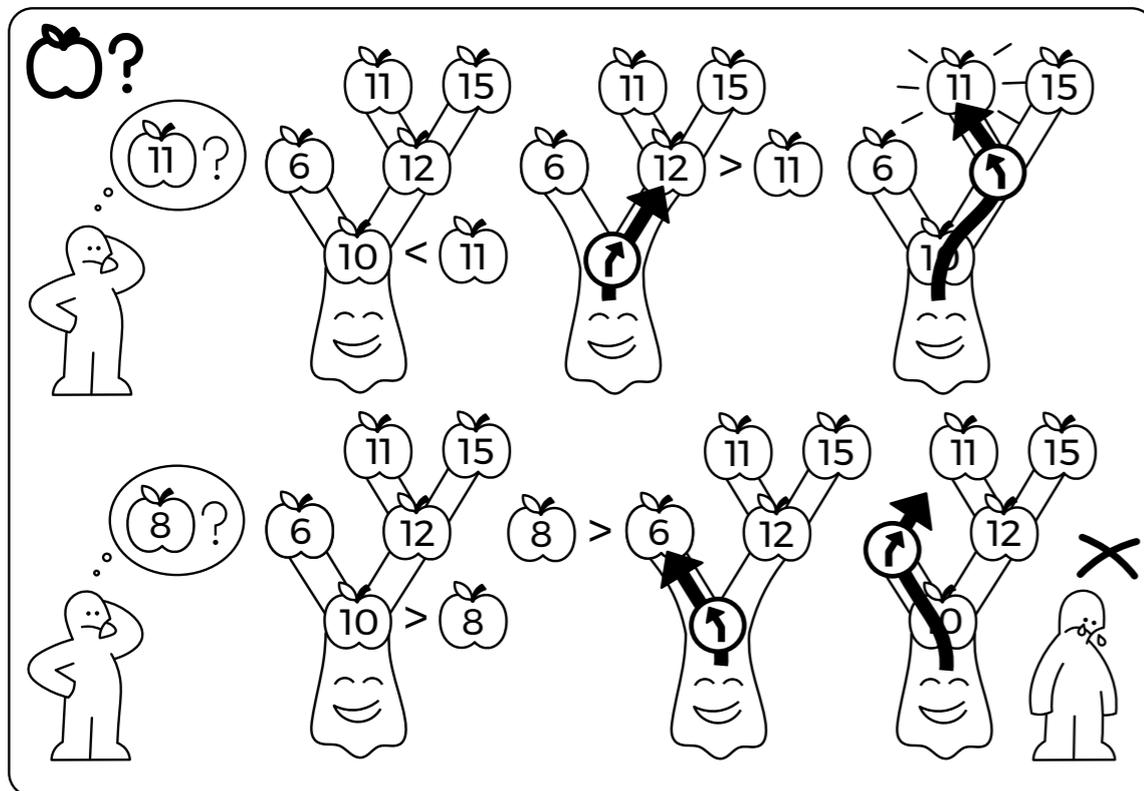
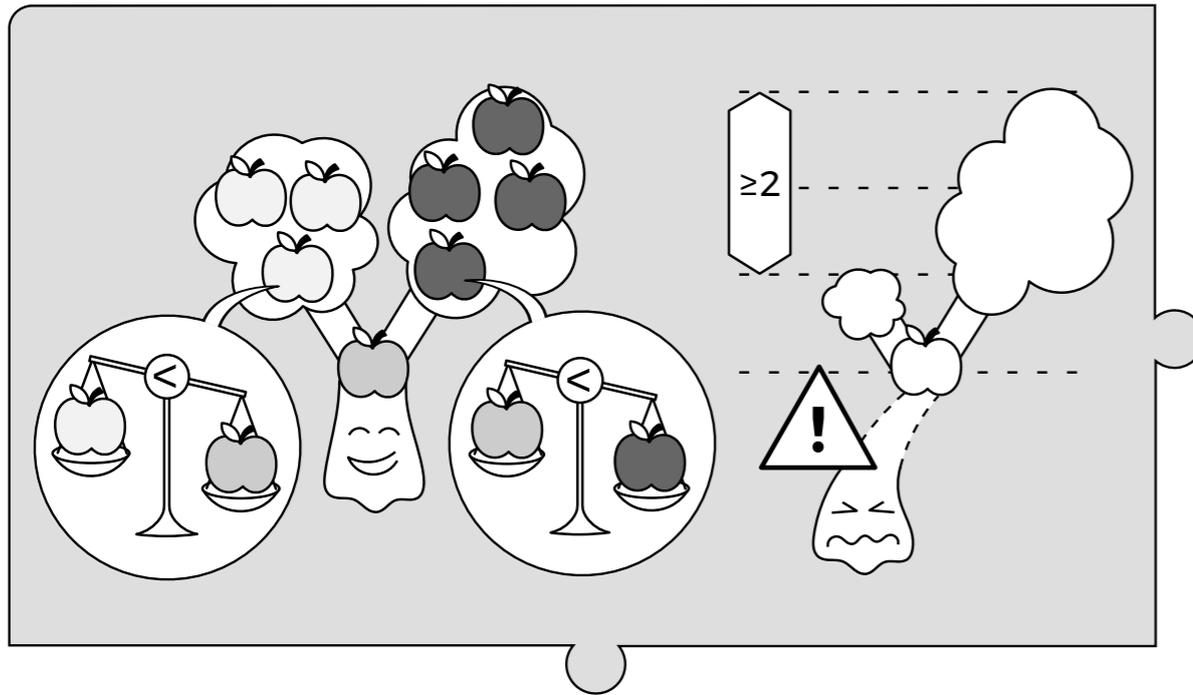
IDEA



BÄLÄNCE TREE

1/2

idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

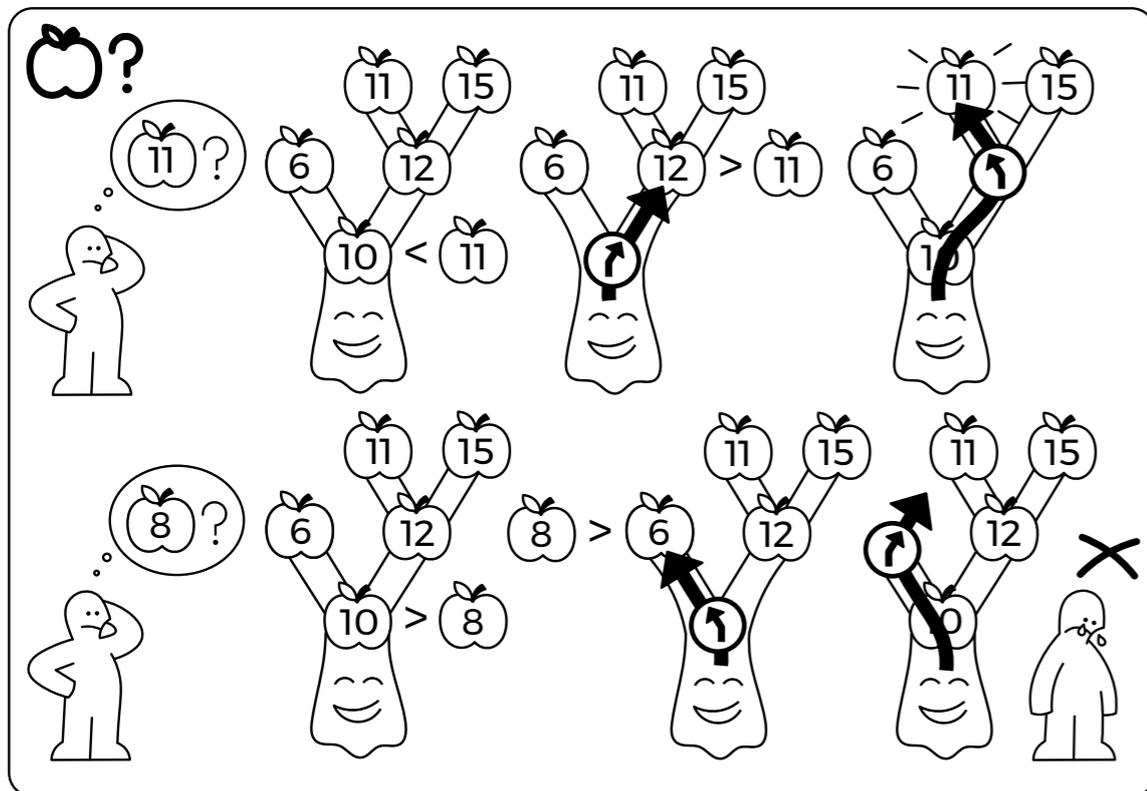
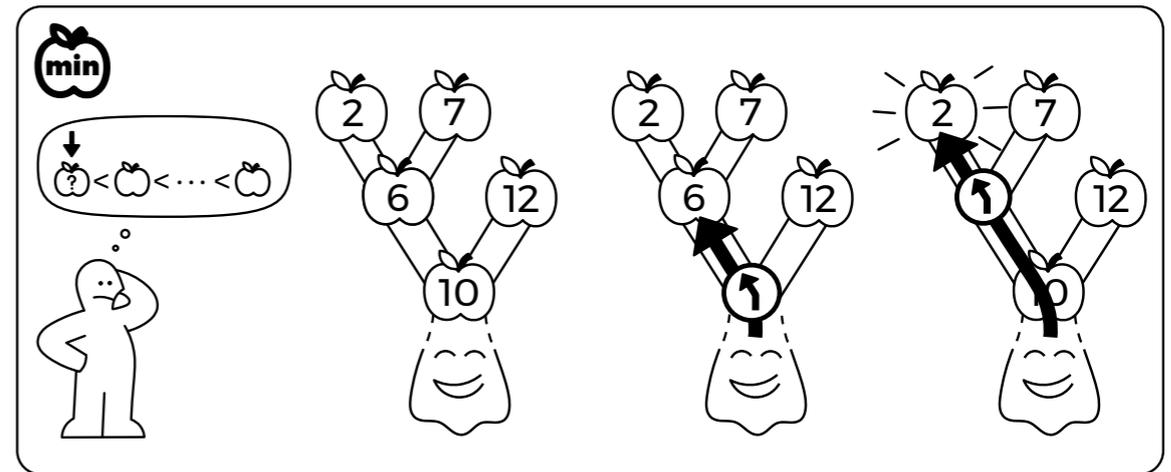
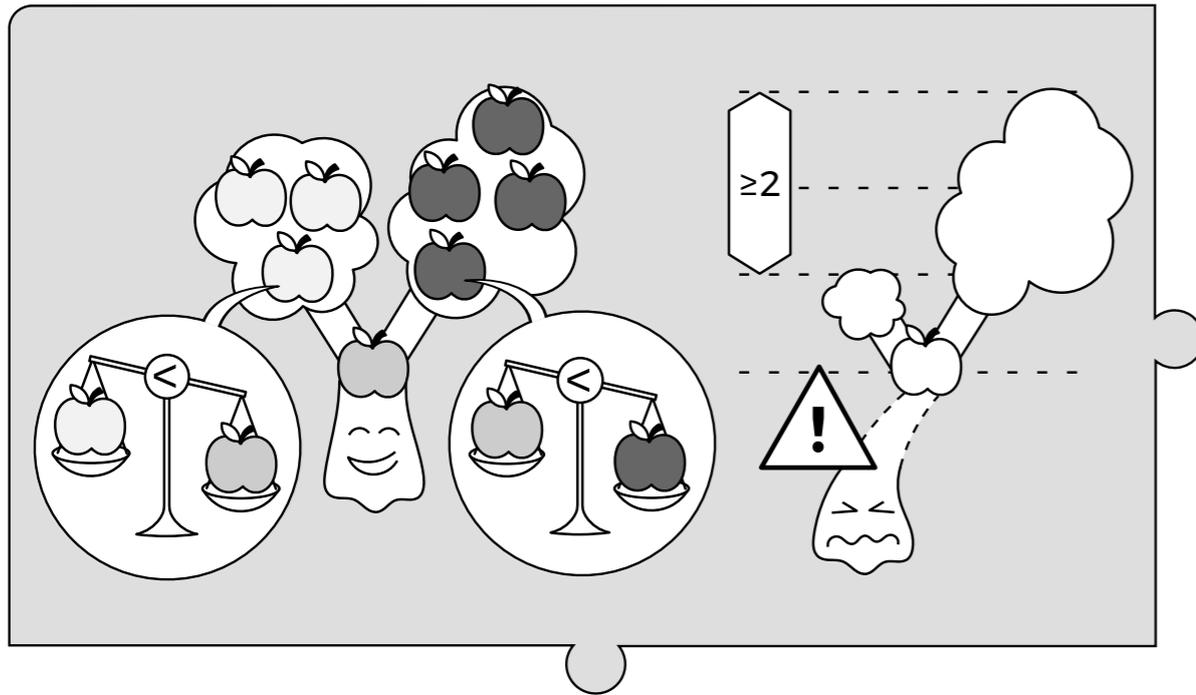


BÄLÄNCE TREE

1/2

idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

IDEA

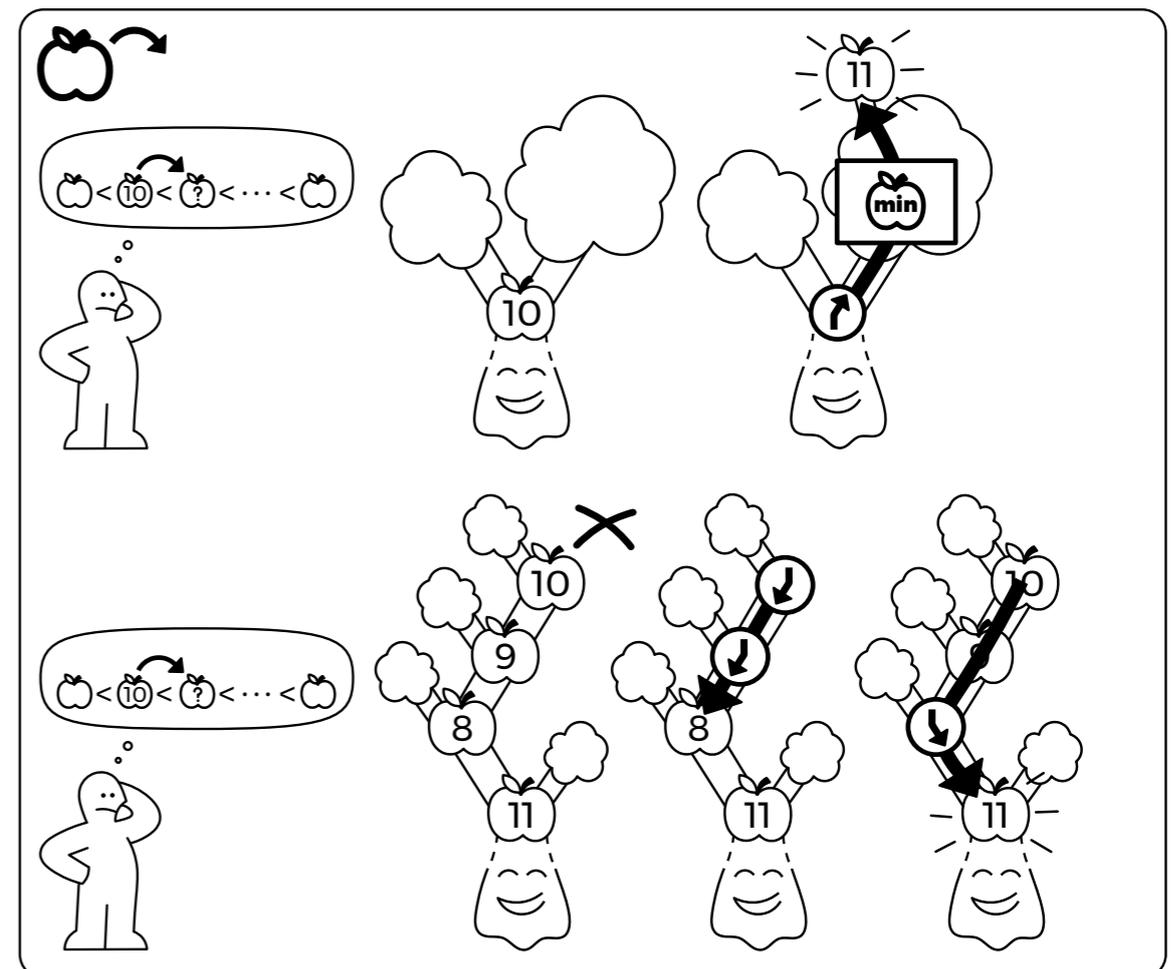
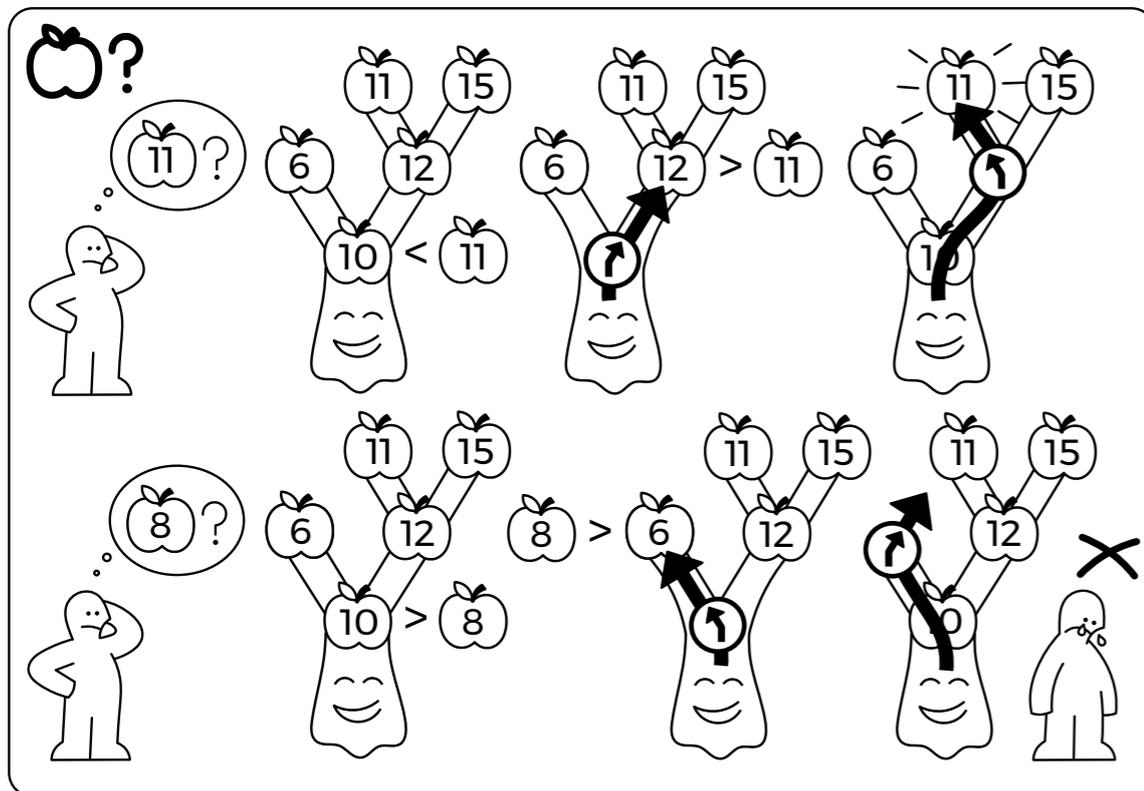
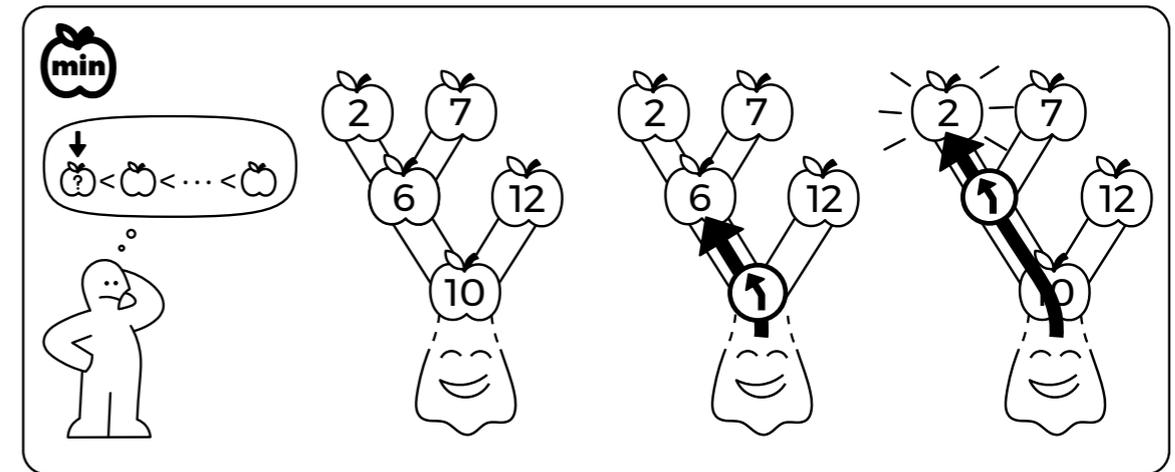
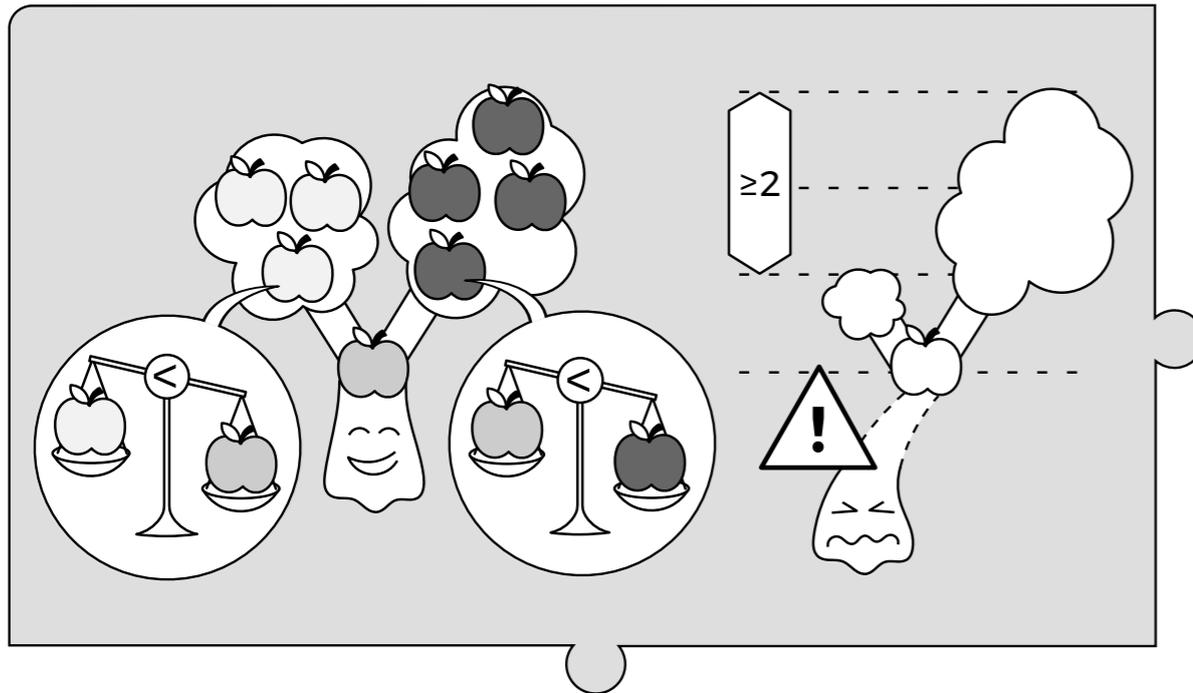


BÄLÄNCE TREE

1/2

idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

IDEA



BÄLÄNCE TREE

2/2

idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

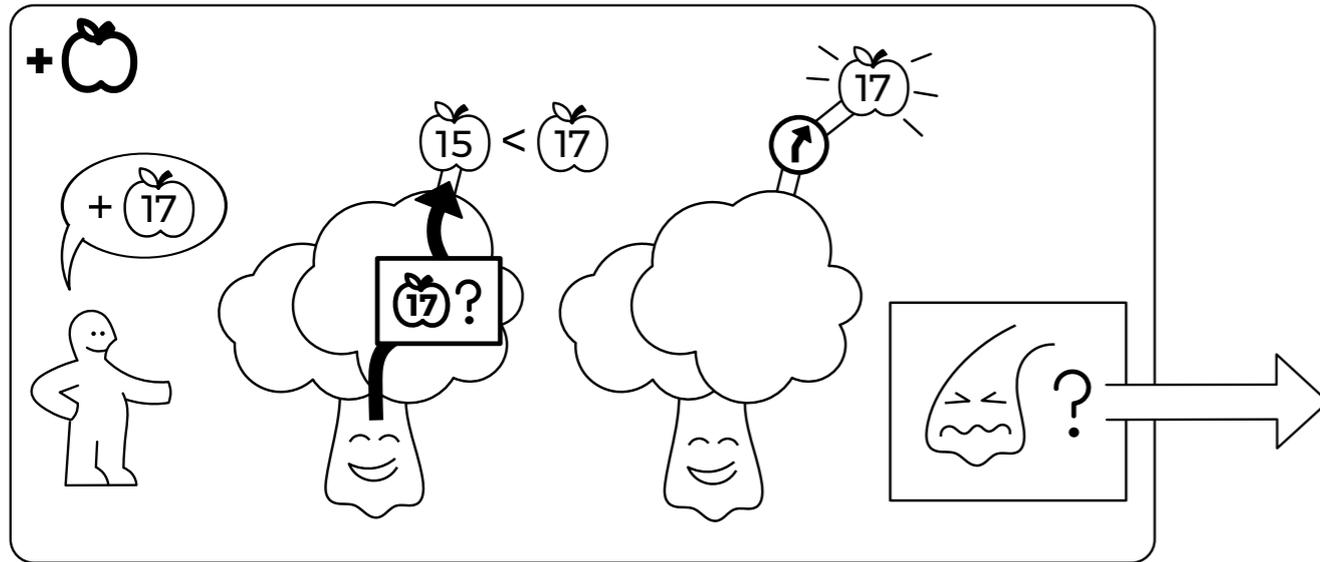
IDEA

BÄLÄNCE TREE

2/2

idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

IDEA

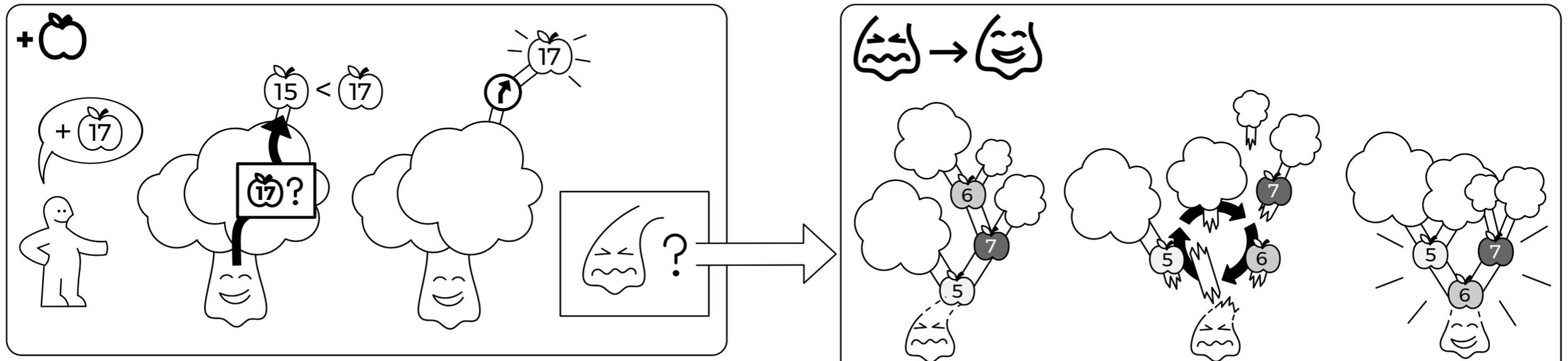


BÄLÄNCE TREE

2/2

idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

IDEA

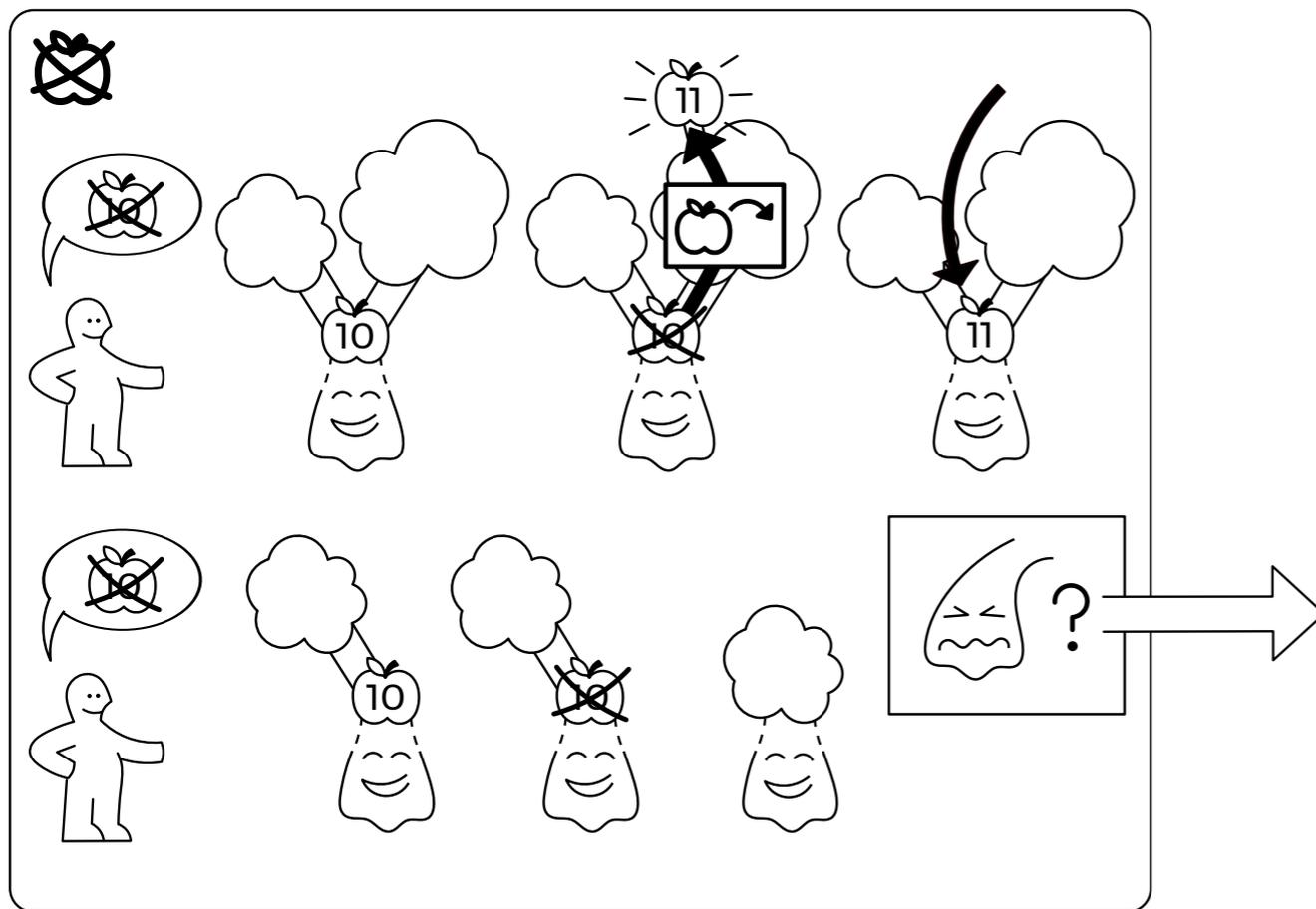
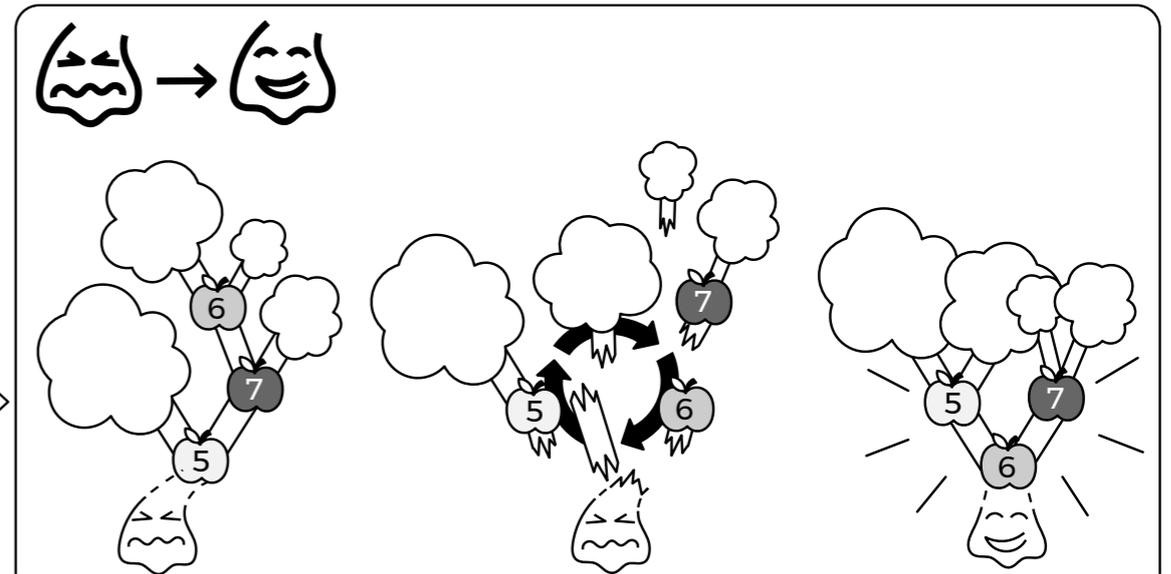
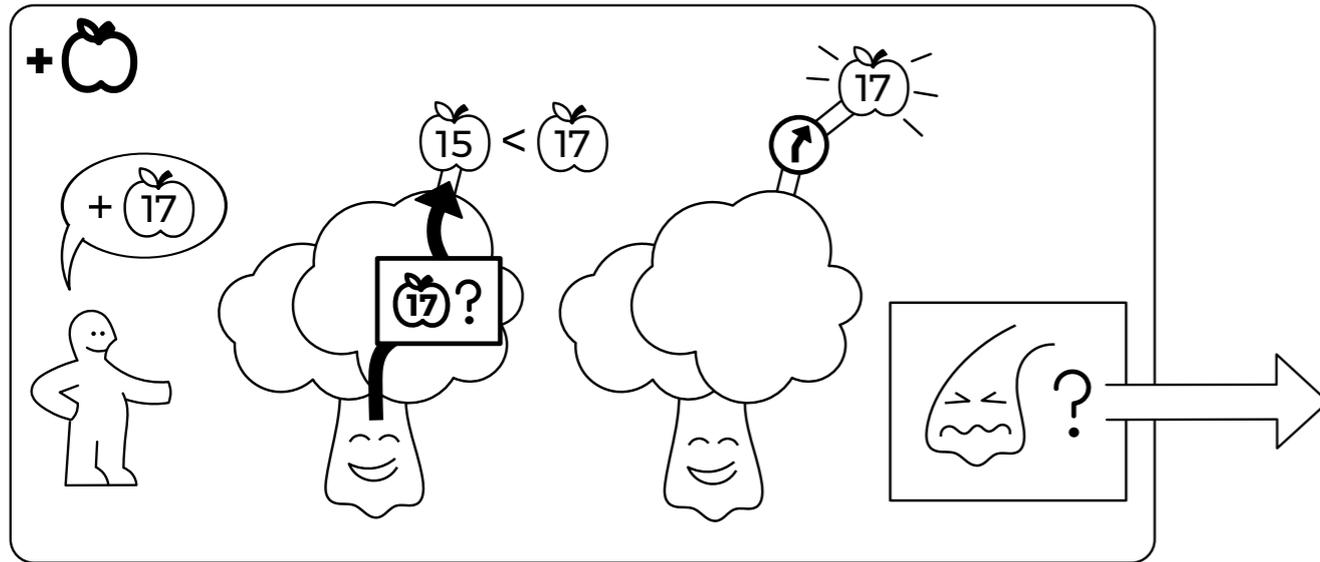


BÄLÄNCE TREE

2/2

idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

IDEA

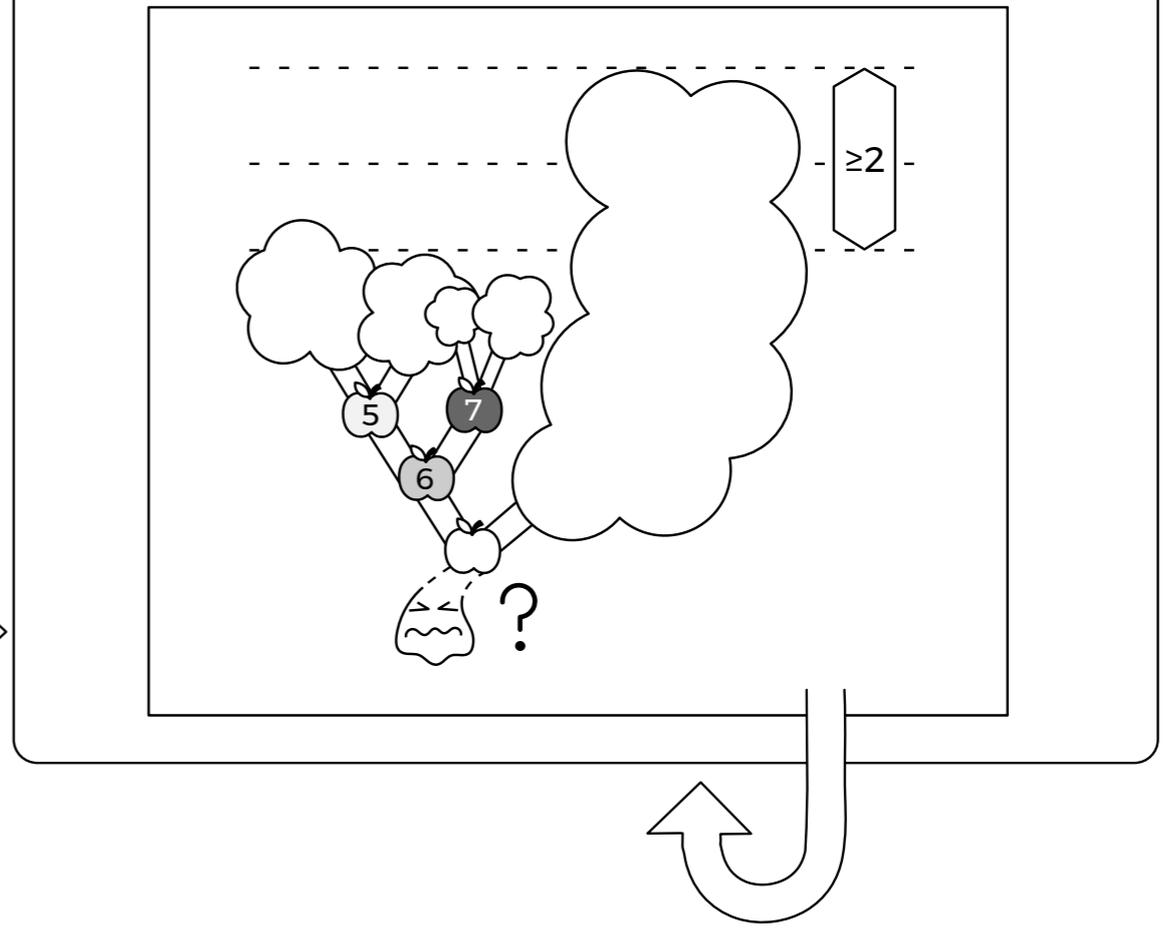
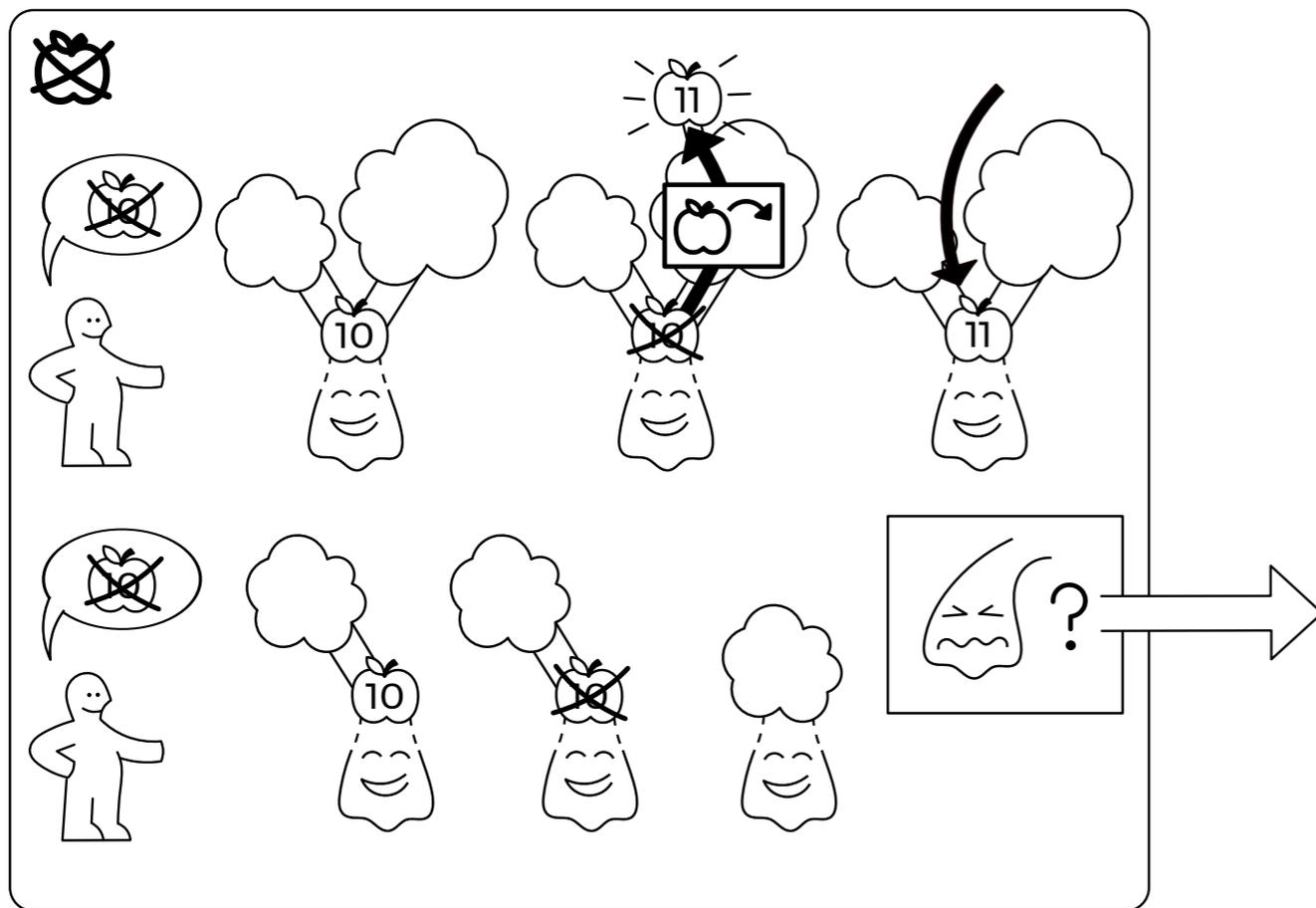
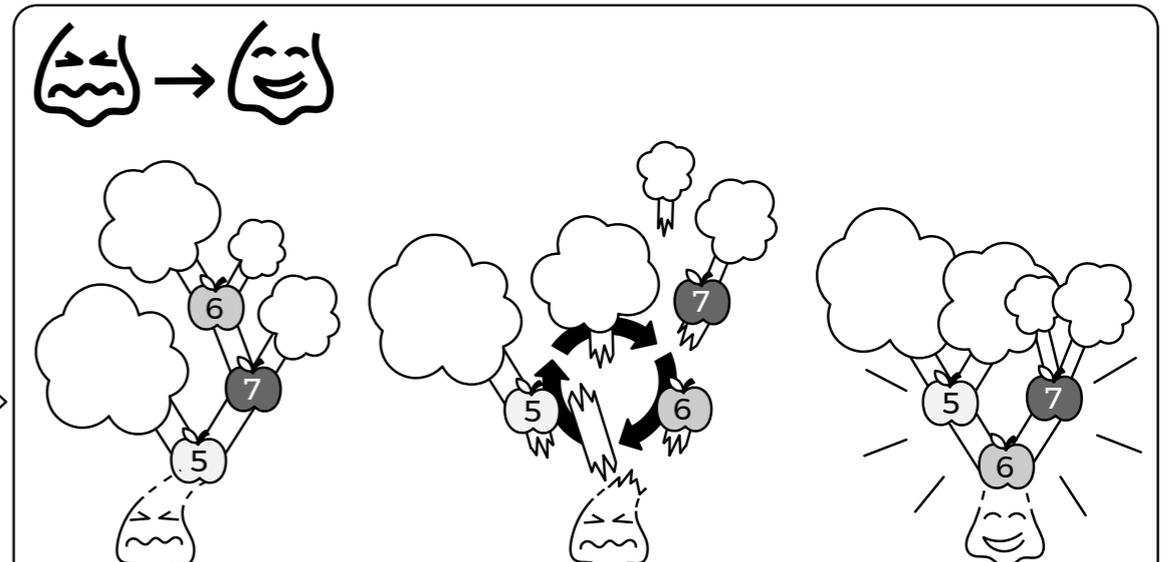
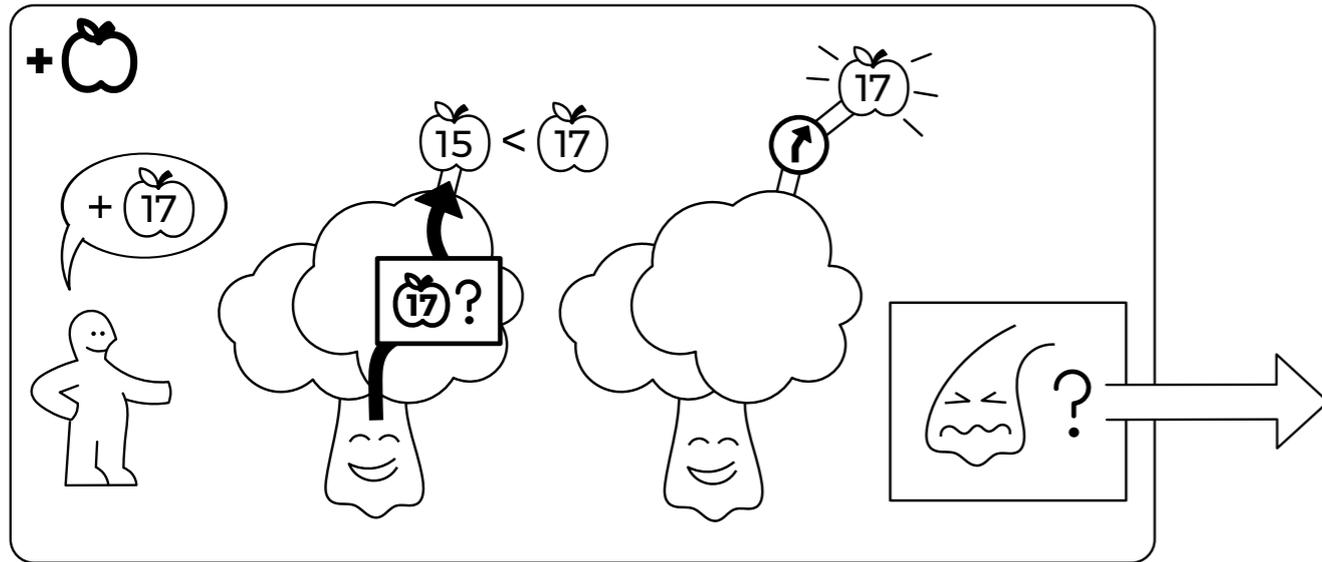


BÄLÄNCE TREE

2/2

idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

IDEA



QUIZ!

4.7 Fibonacci-Zahlen

4.7 Fibonacci-Zahlen



4.7 Fibonacci-Zahlen

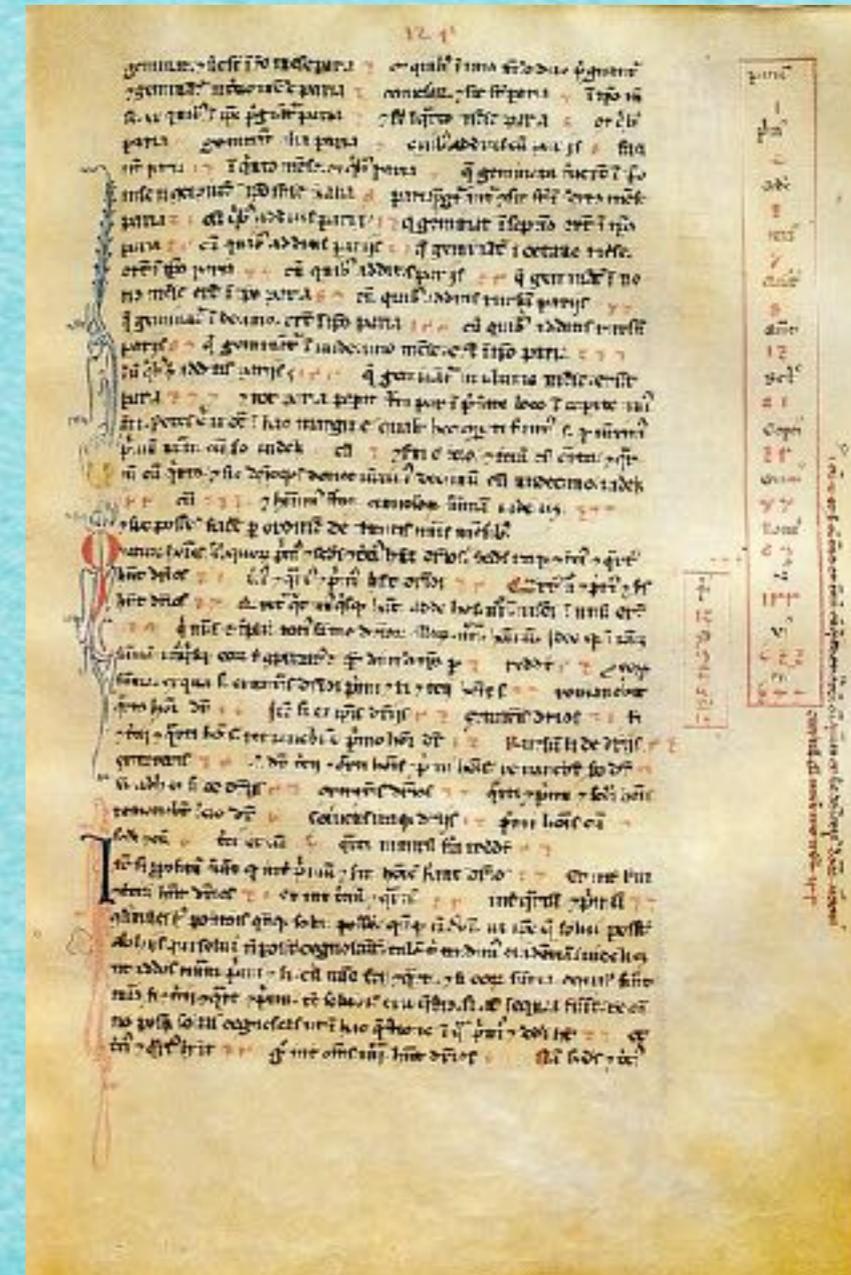


Leonardo da Pisa,
gen. Fibonacci
1180-1241

4.7 Fibonacci-Zahlen



Leonardo da Pisa,
gen. Fibonacci
1180-1241



Fibonacci-Zahlen

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Fibonacci-Zahlen



$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Fibonacci-Zahlen



$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Fibonacci-Zahlen



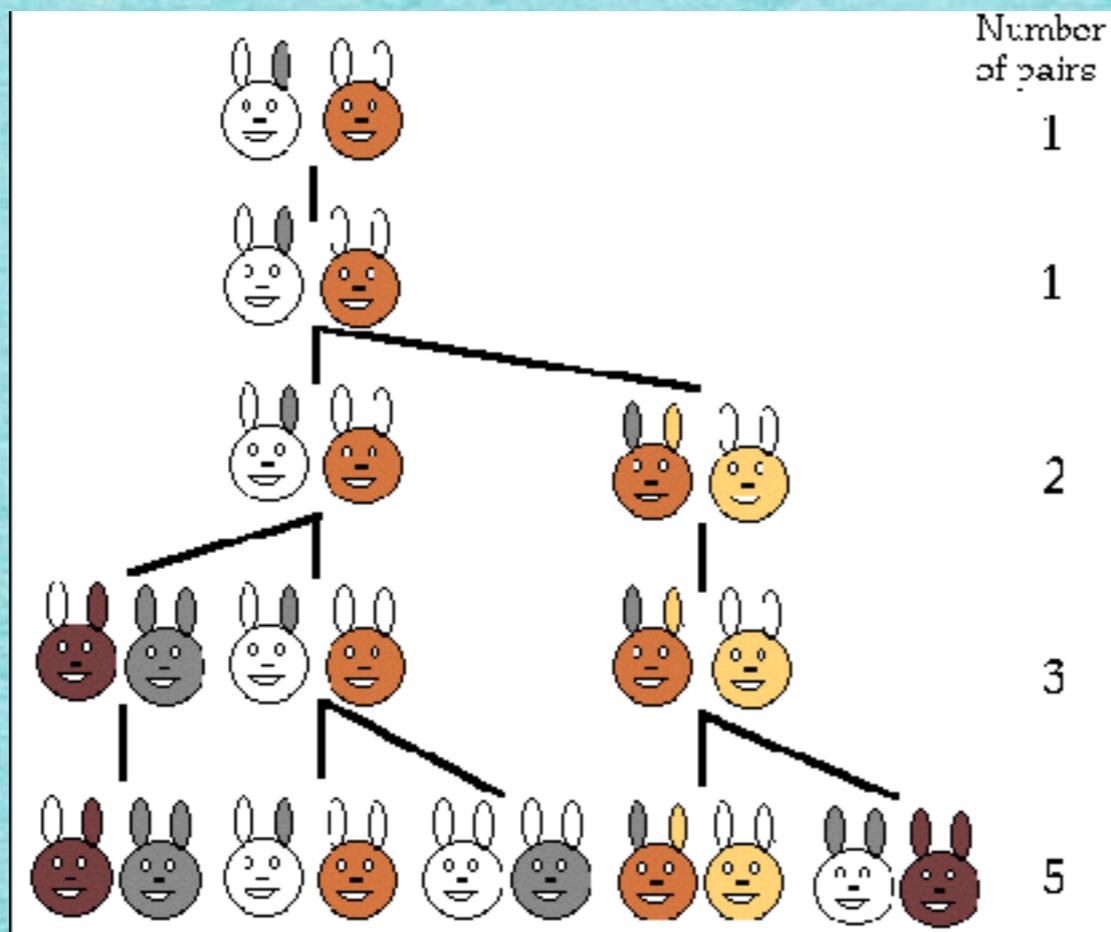
$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Fibonacci-Zahlen



$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

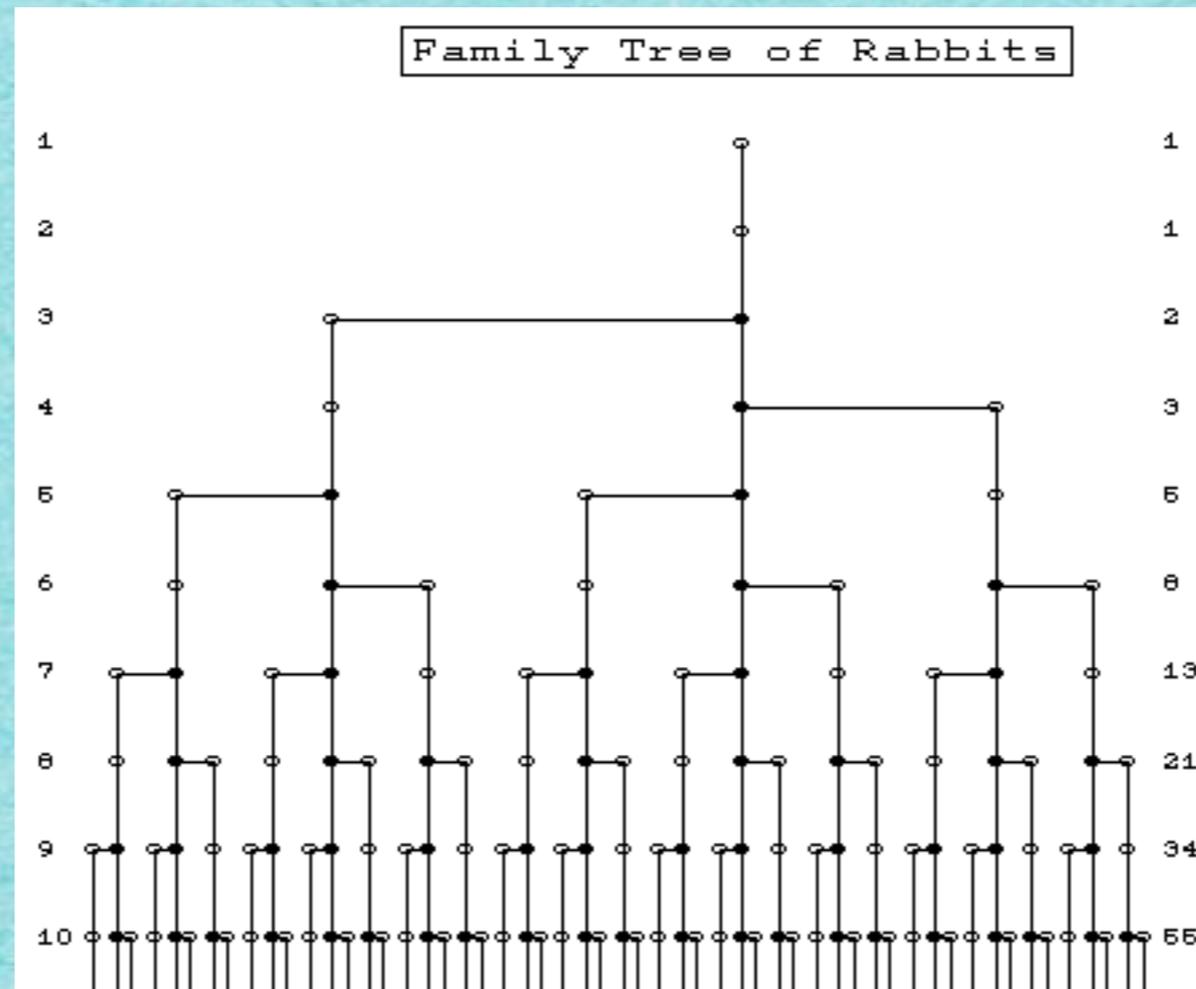
Fibonacci-Zahlen



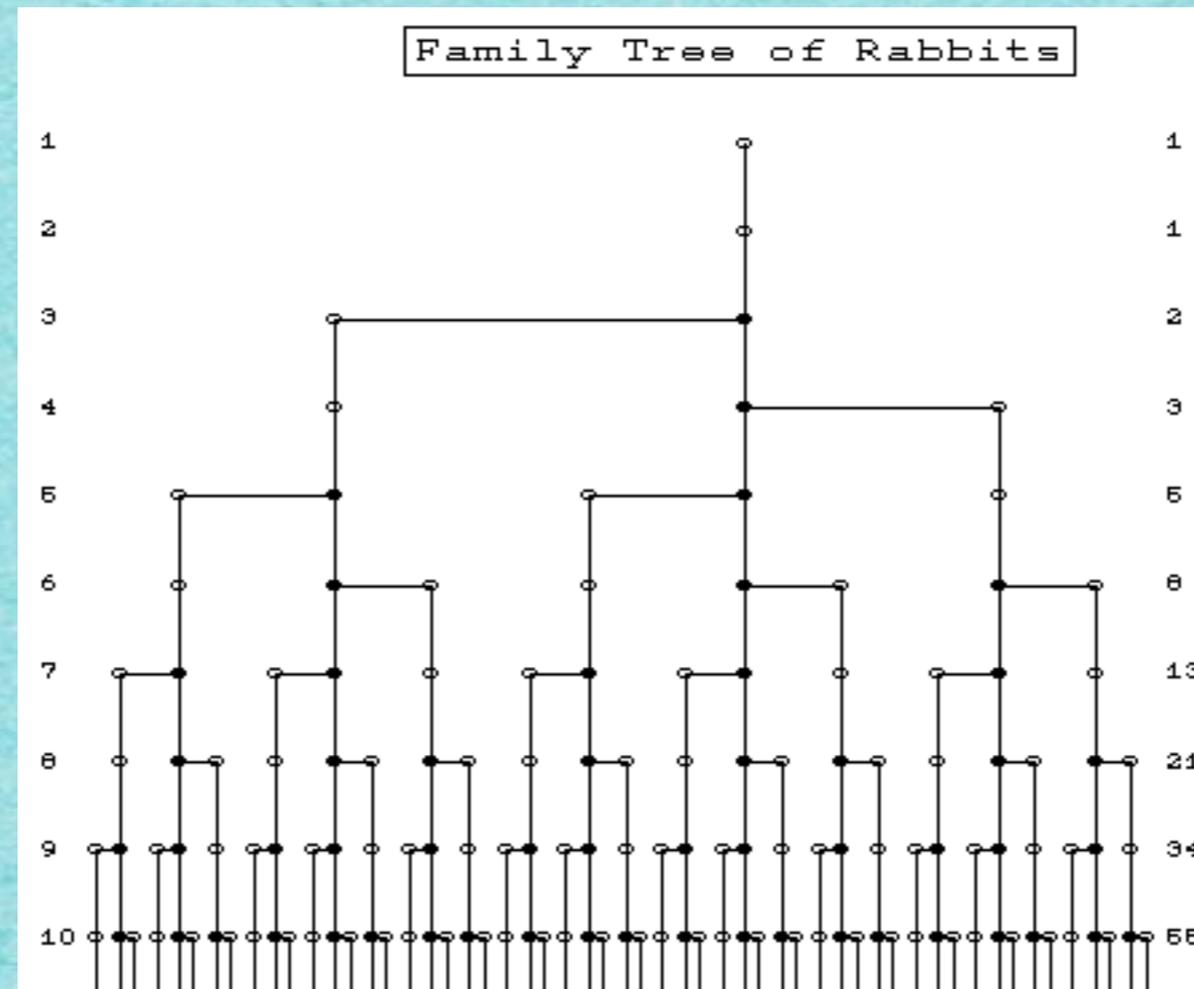
$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen



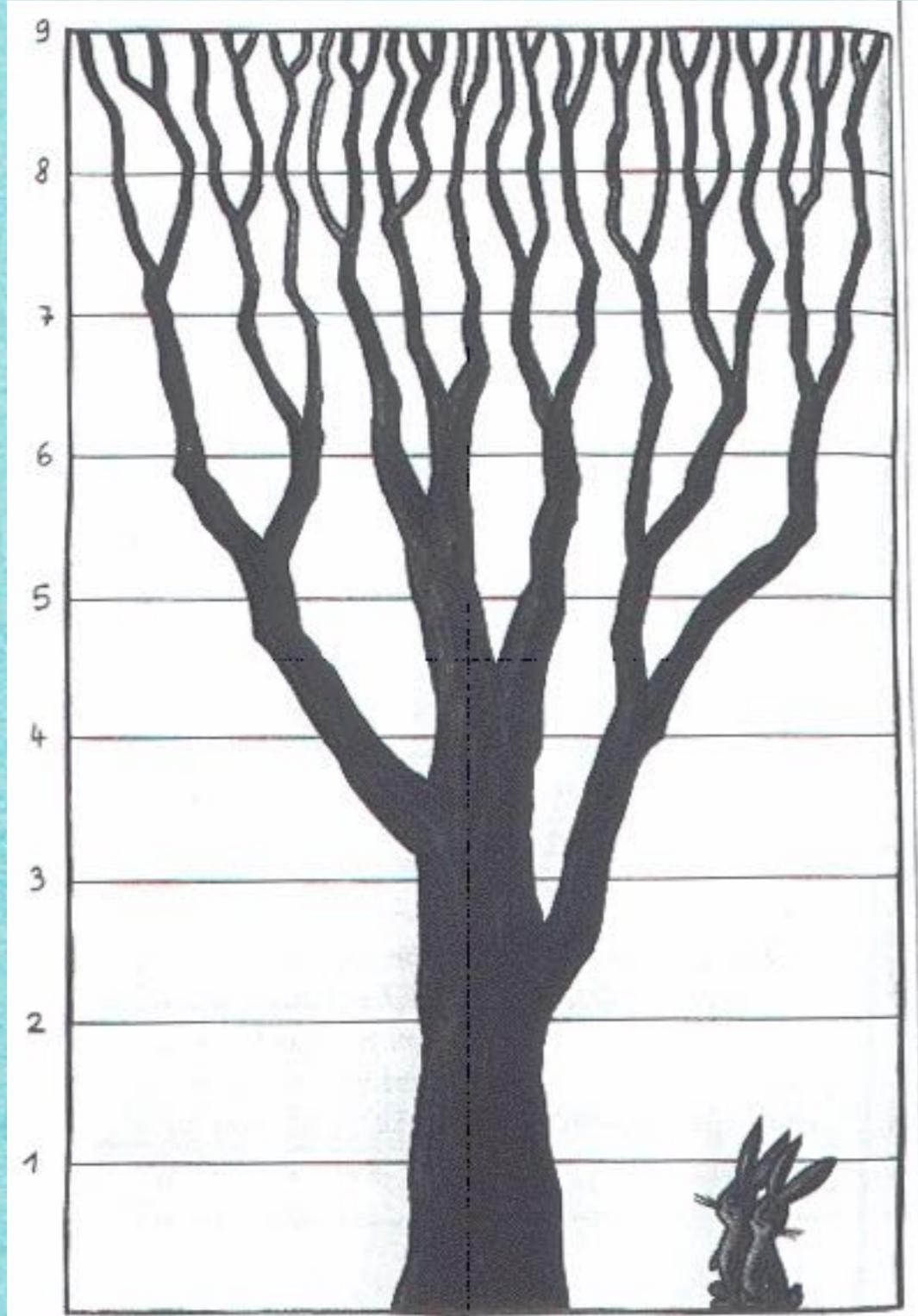
Fibonacci-Zahlen



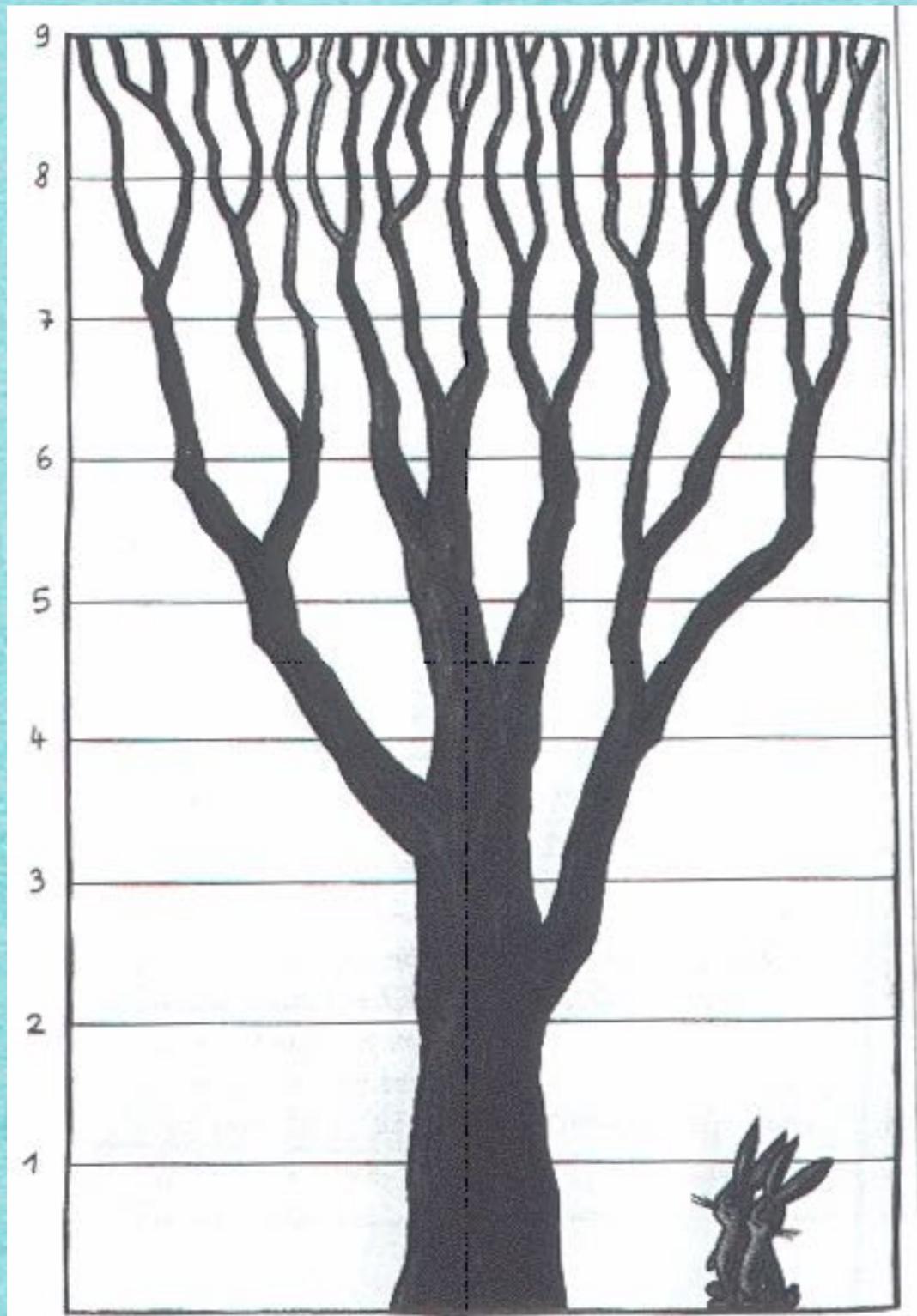
$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen

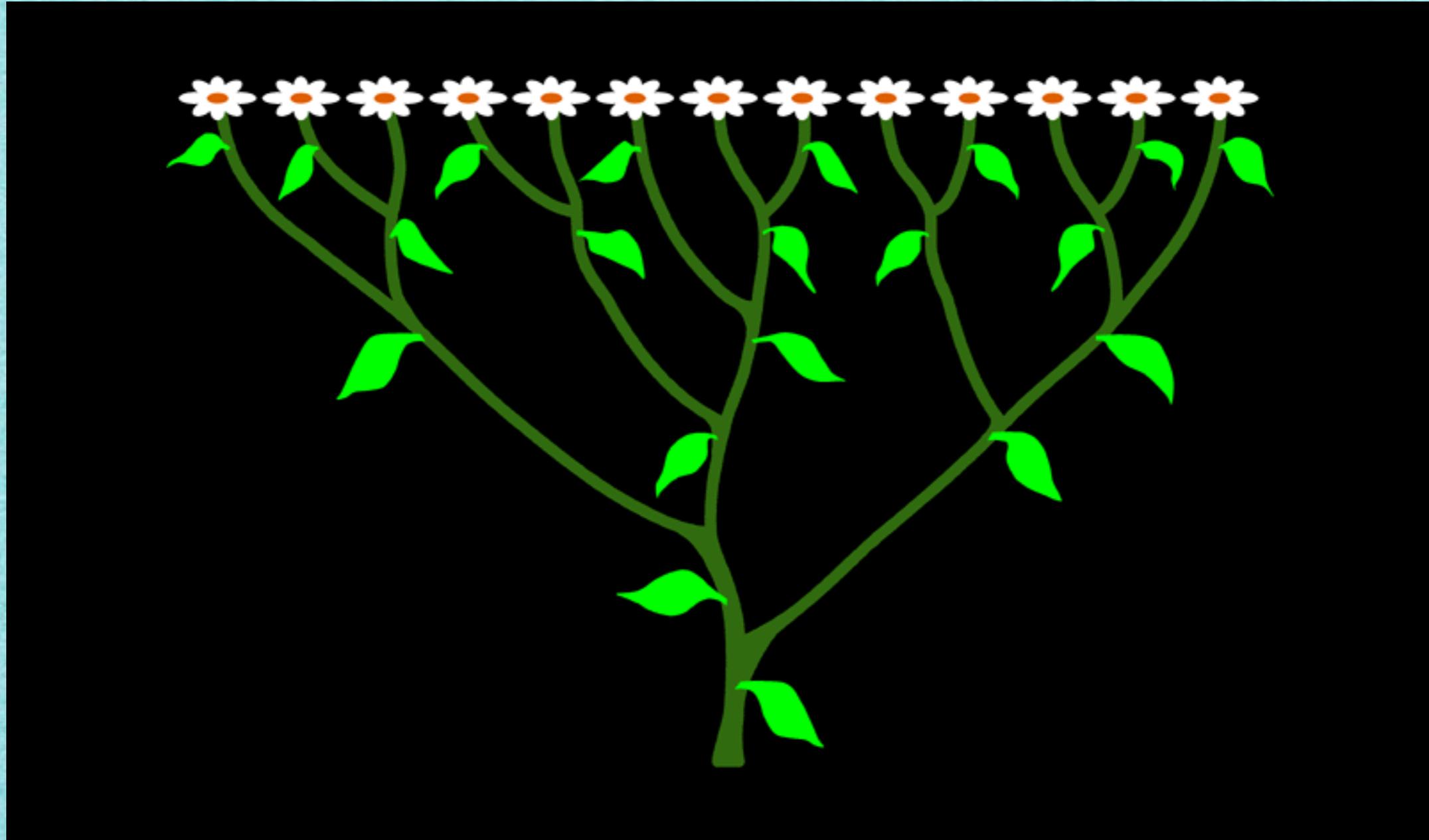


Fibonacci-Zahlen

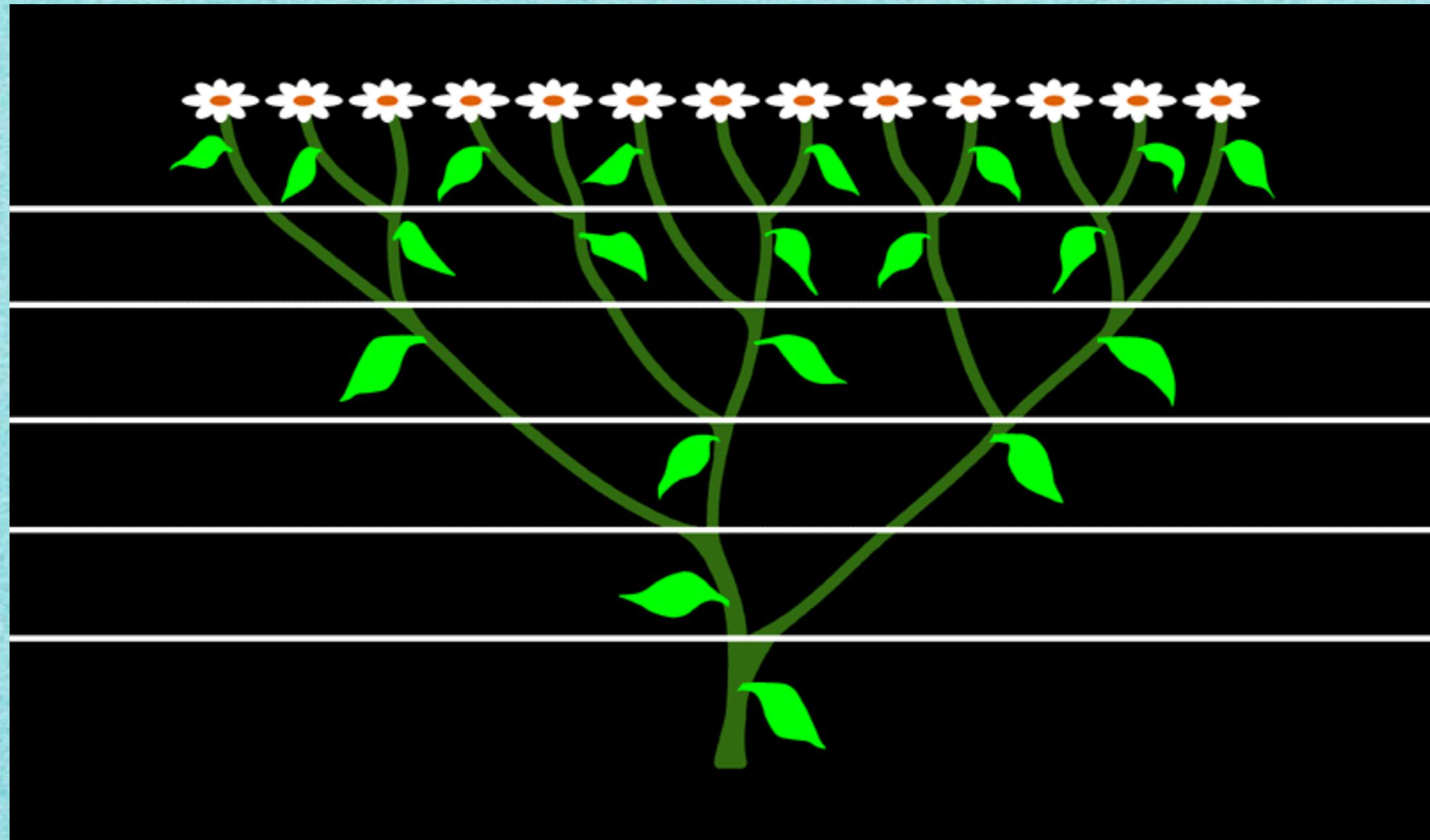


Fibonacci-Zahlen

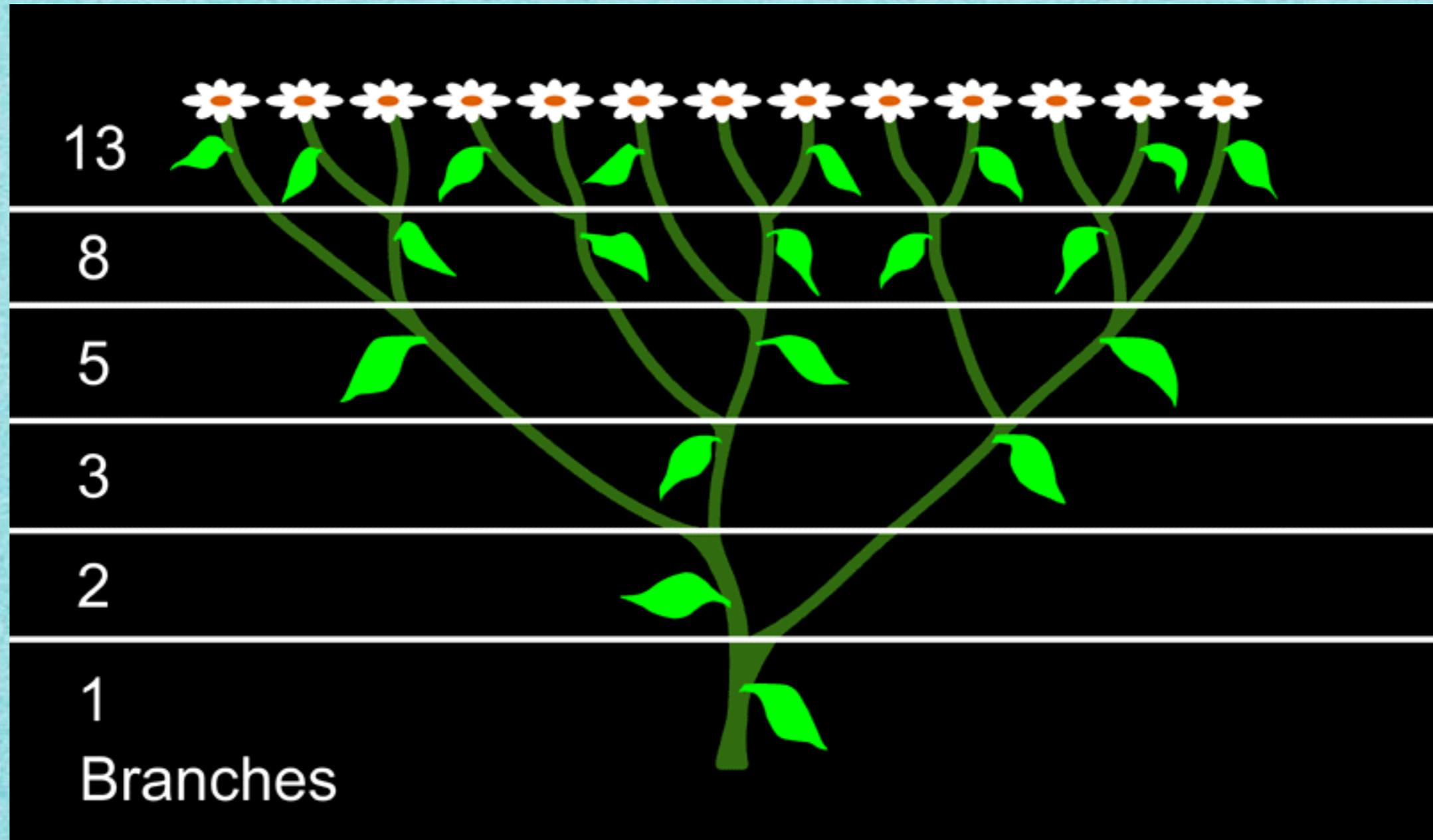
Fibonacci-Zahlen



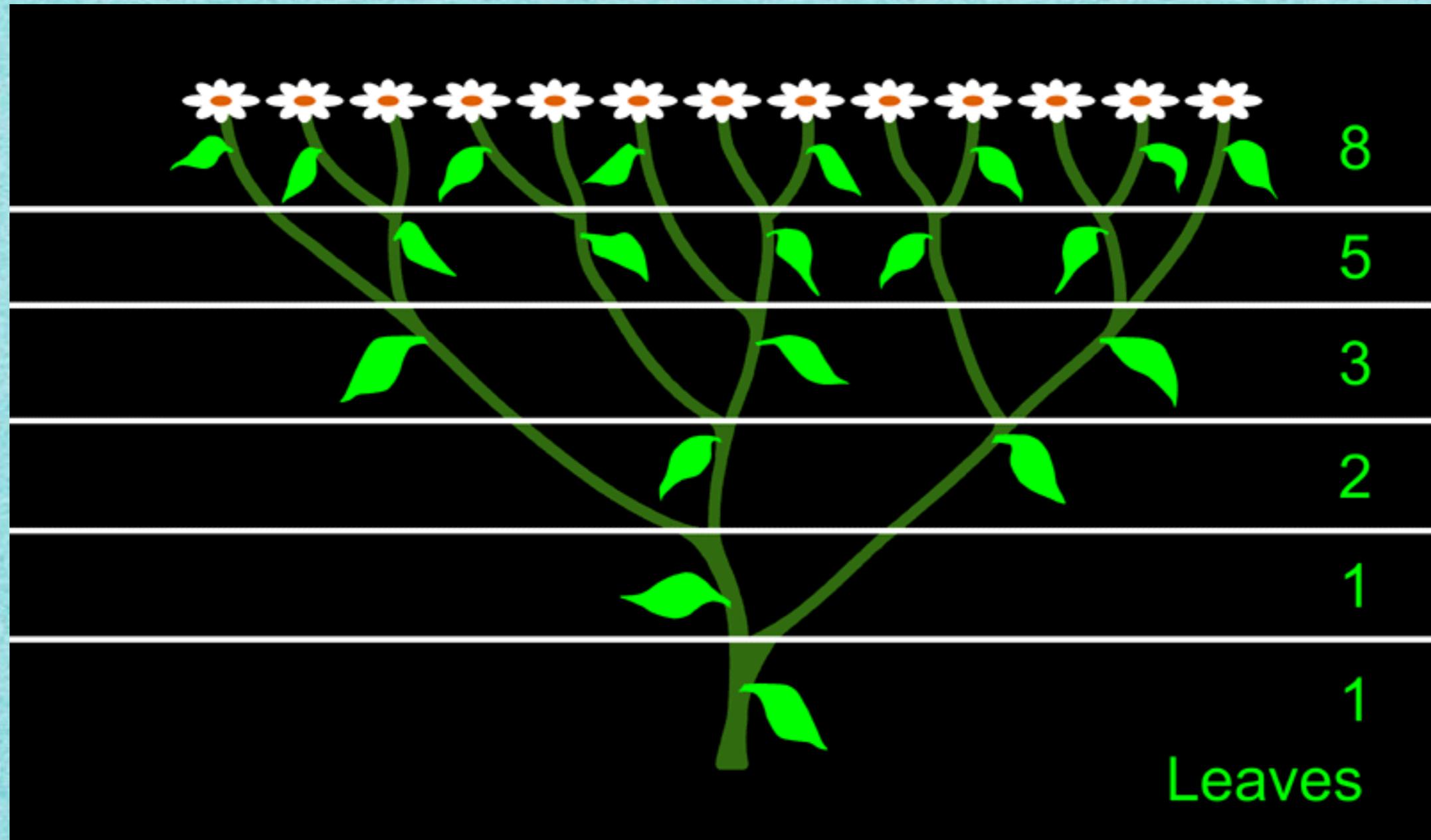
Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

1



Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

2



Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

3



Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

5



Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

8



Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

1 3



Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

21



Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

3 4

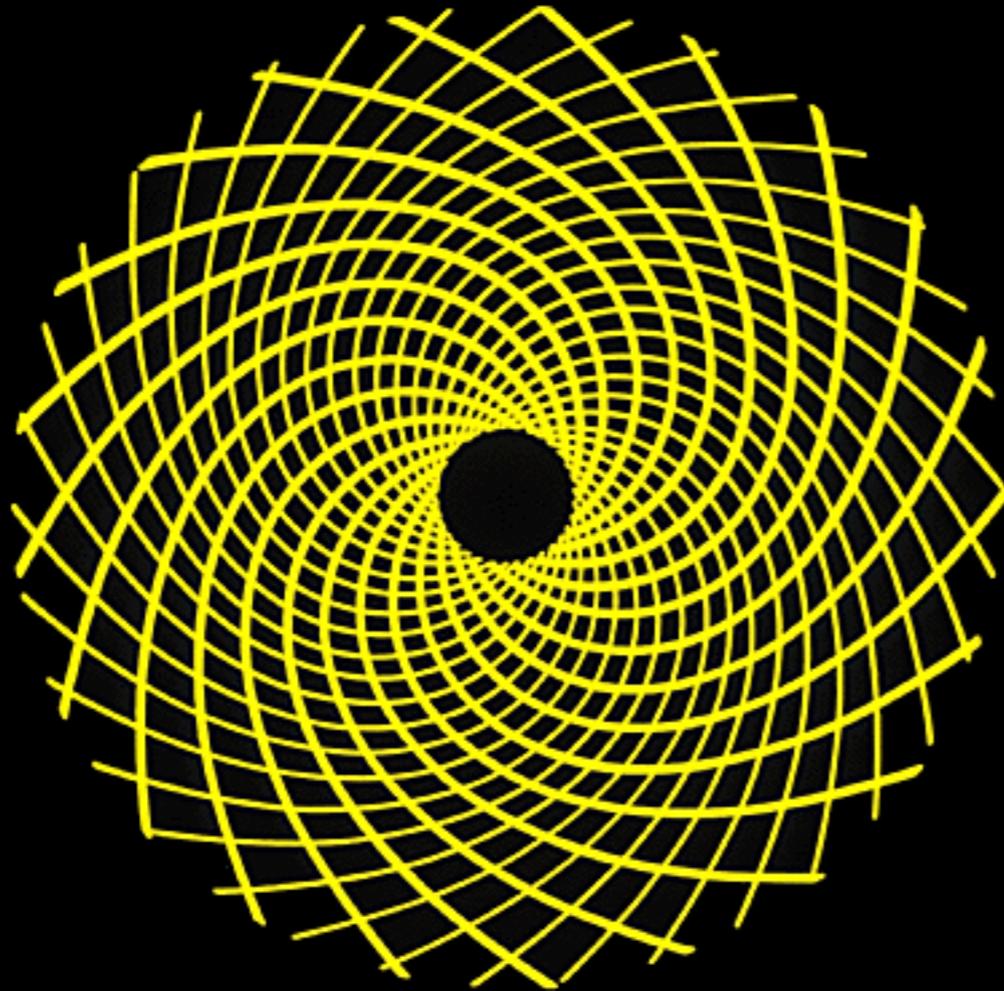


Fibonacci-Zahlen

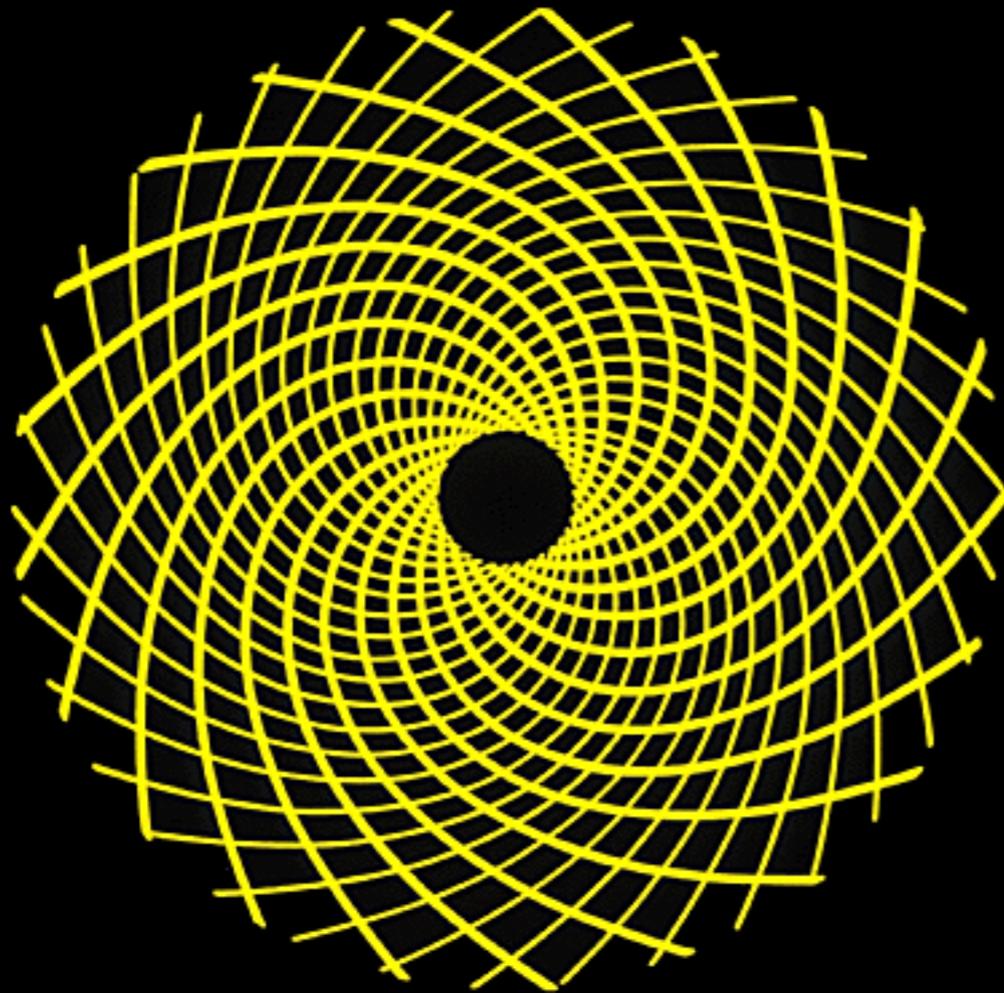
Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



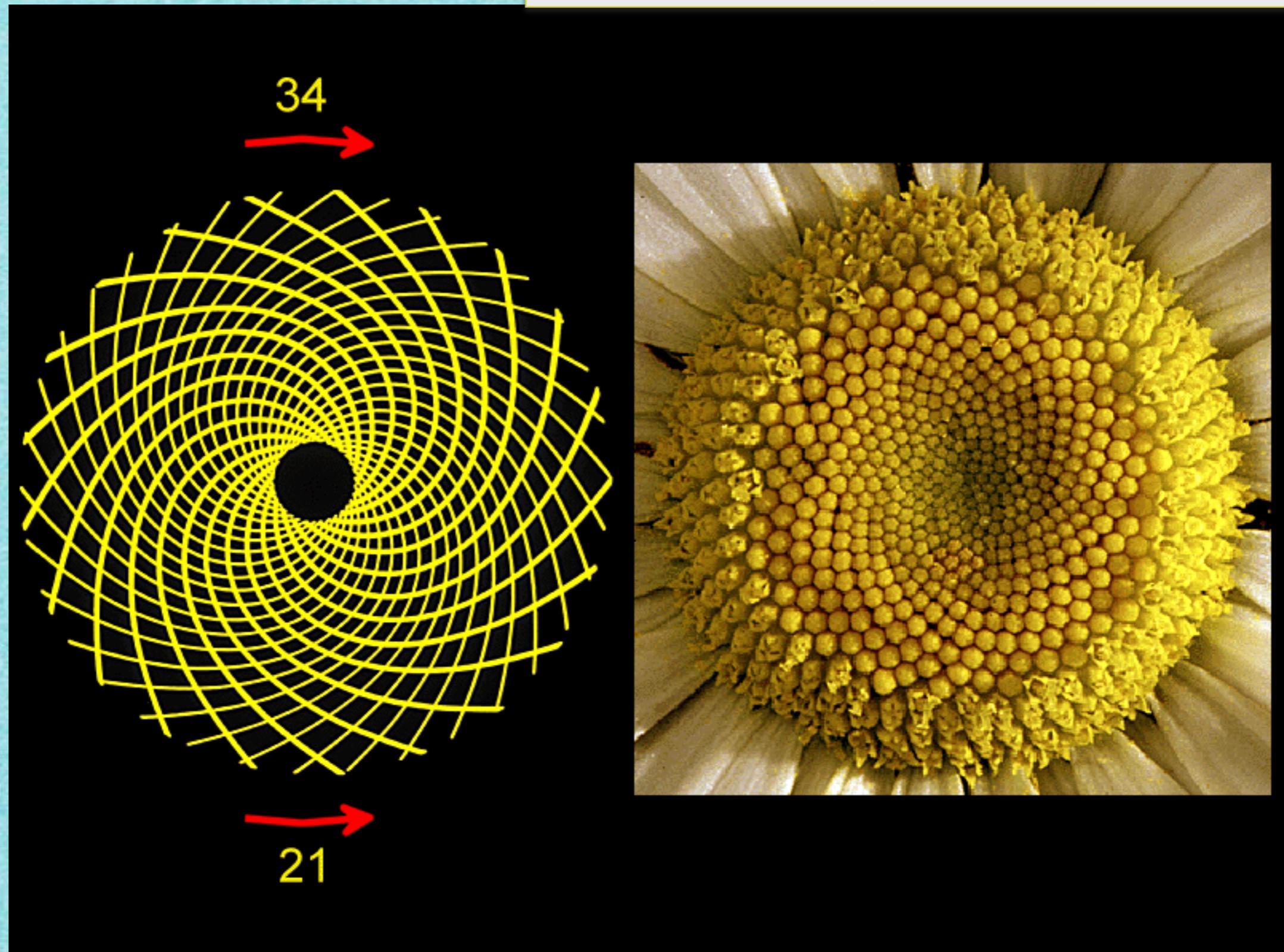
Fibonacci-Zahlen



21

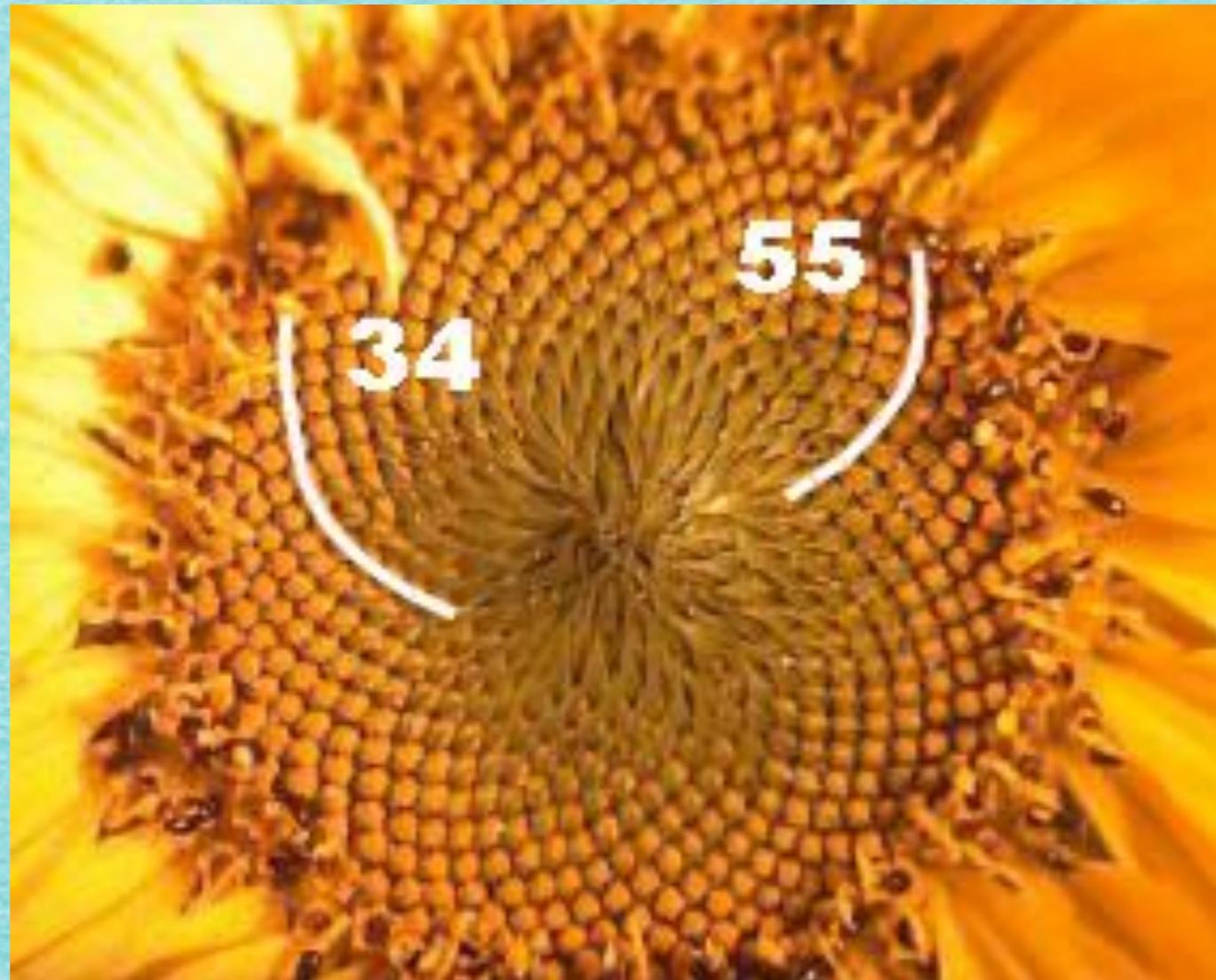


Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen

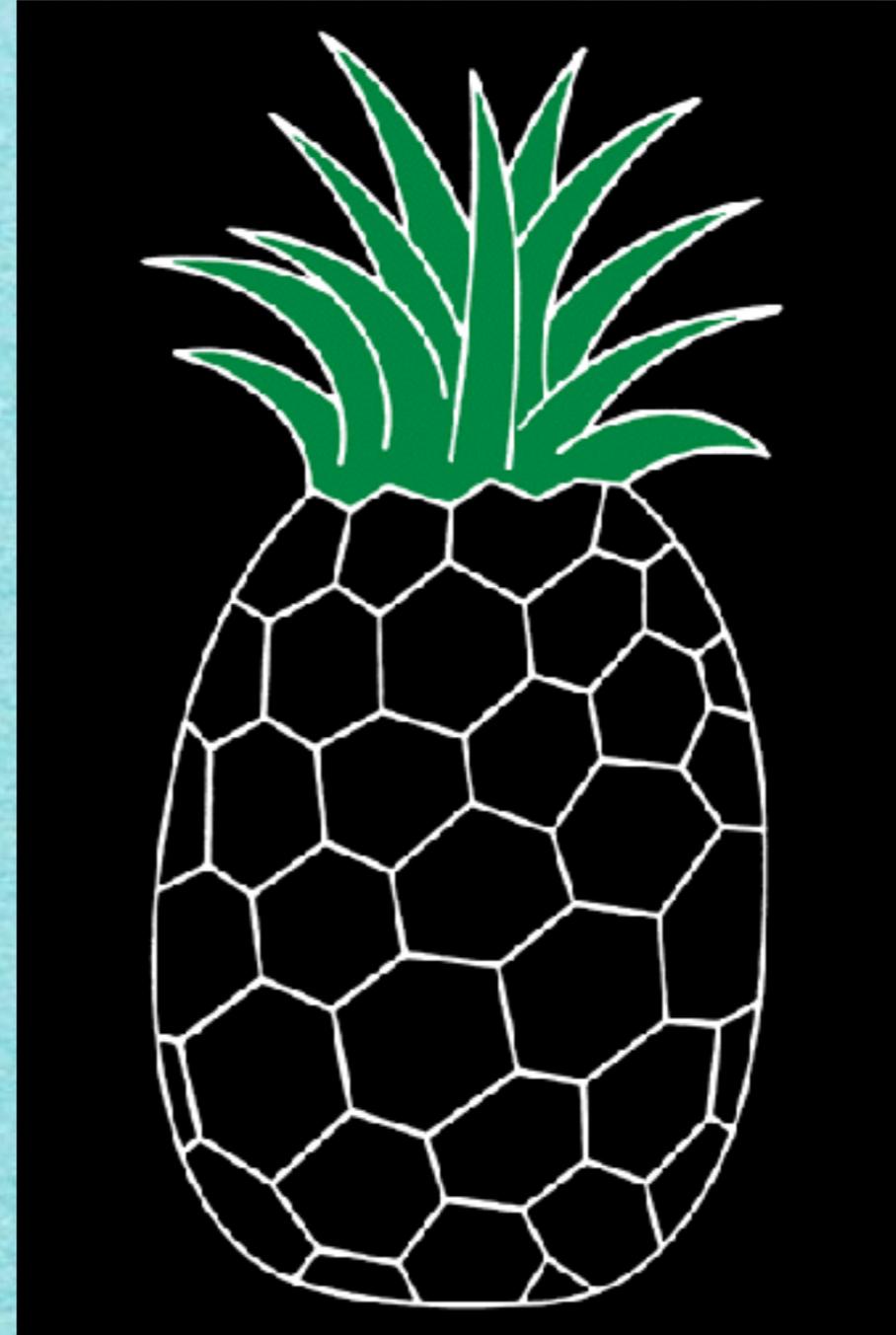


Fibonacci-Zahlen

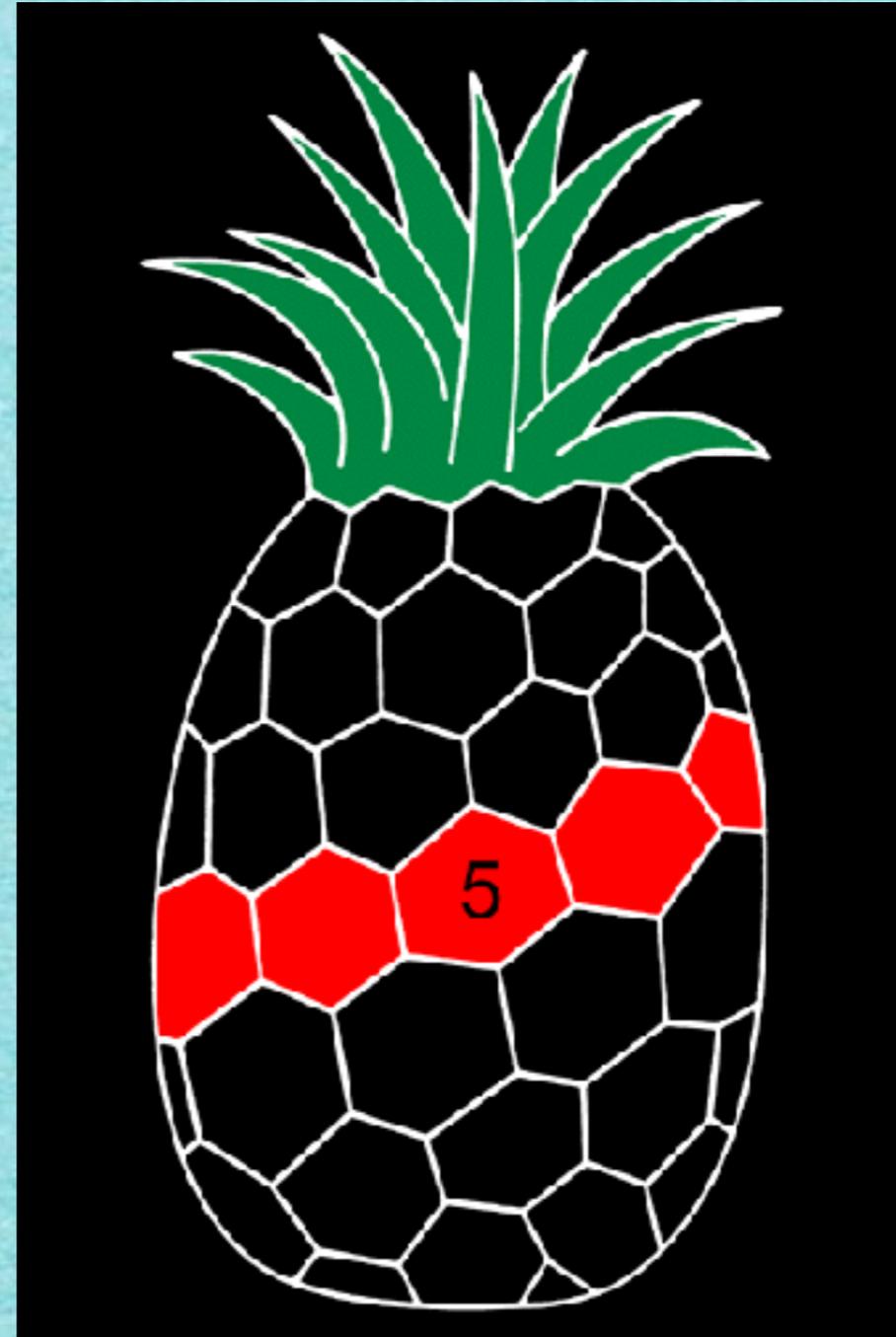
Fibonacci-Zahlen



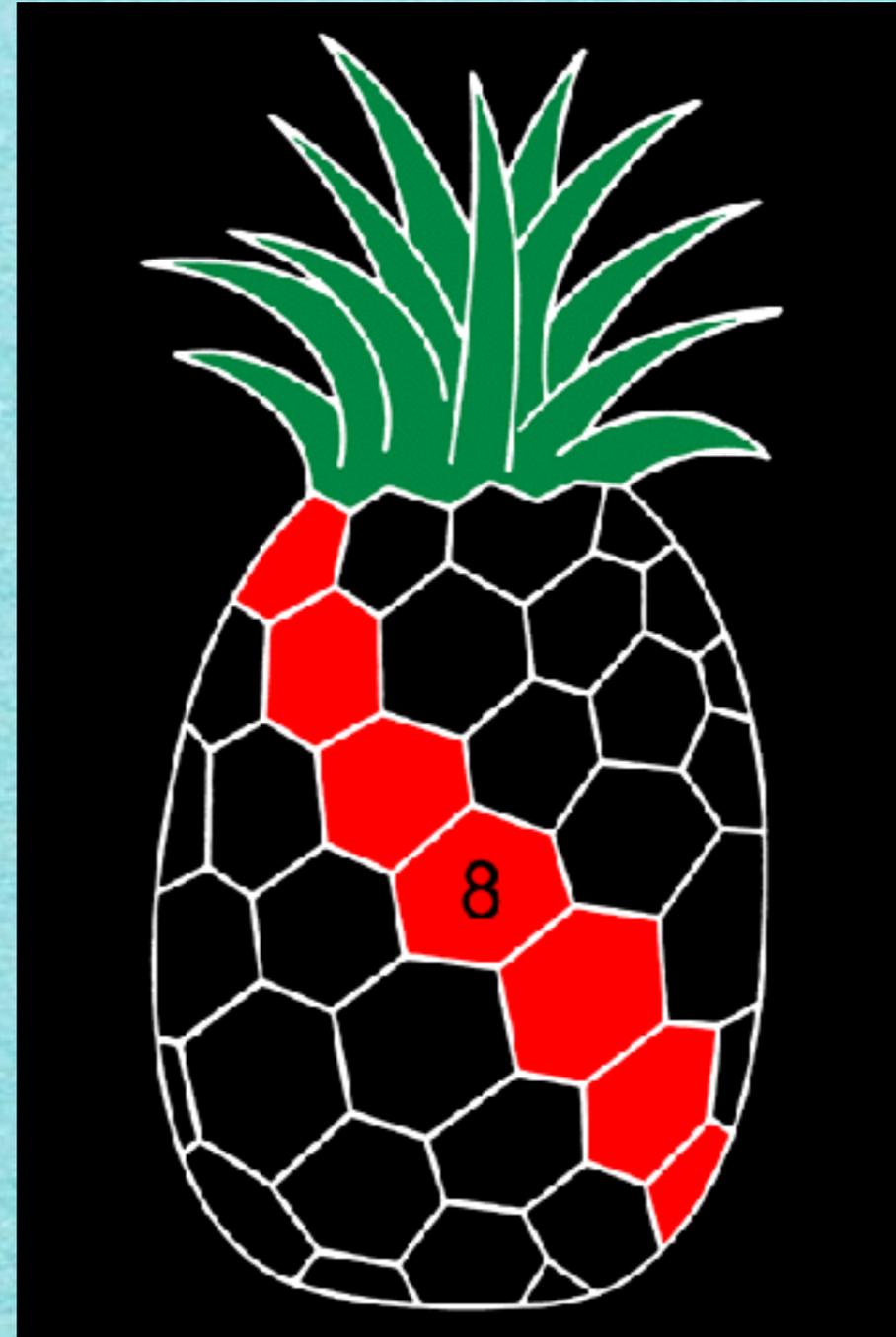
Fibonacci-Zahlen



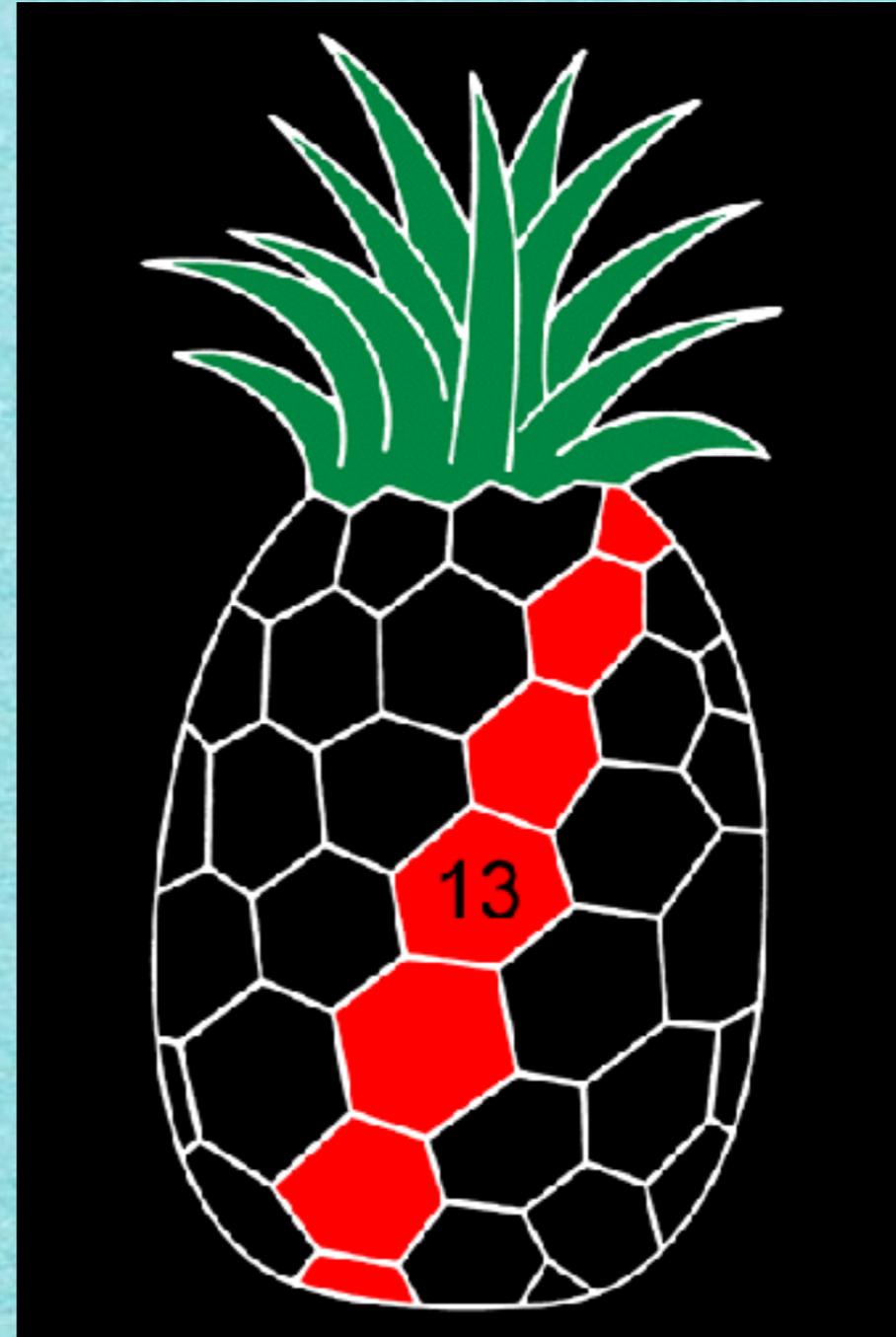
Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



$$3:2=1.500$$

Fibonacci-Zahlen



$$3:2=1.500$$

$$5:3=1.666$$

Fibonacci-Zahlen



$$3:2=1.500$$

$$5:3=1.666$$

$$8:5=1.600$$

Fibonacci-Zahlen



$$3:2=1.500$$

$$5:3=1.666$$

$$8:5=1.600$$

$$13:8=1.625$$

Fibonacci-Zahlen



$$3:2=1.500$$

$$5:3=1.666$$

$$8:5=1.600$$

$$13:8=1.625$$

$$21:13=1.615$$

Fibonacci-Zahlen



$$3:2=1.500$$

$$5:3=1.666$$

$$8:5=1.600$$

$$13:8=1.625$$

$$21:13=1.615$$

$$34:21=1.619$$

Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen

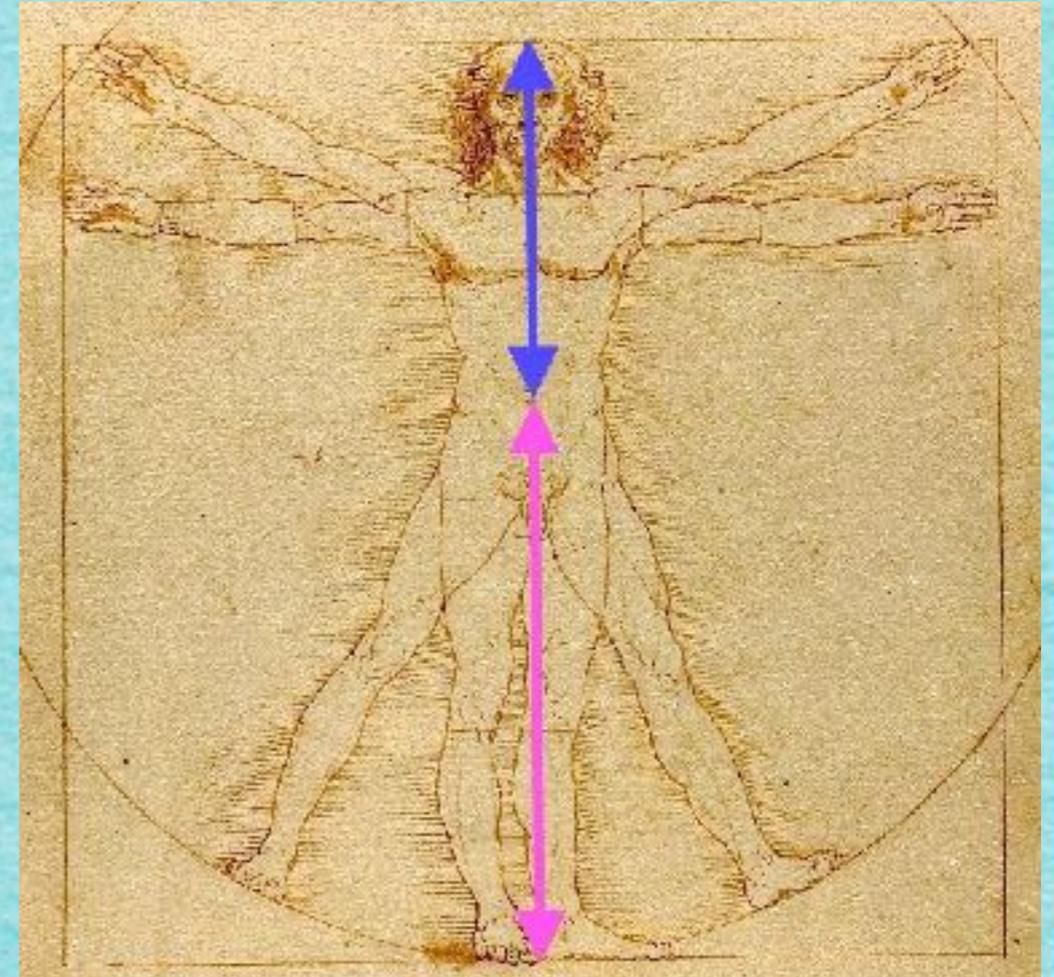


Fibonacci-Zahlen



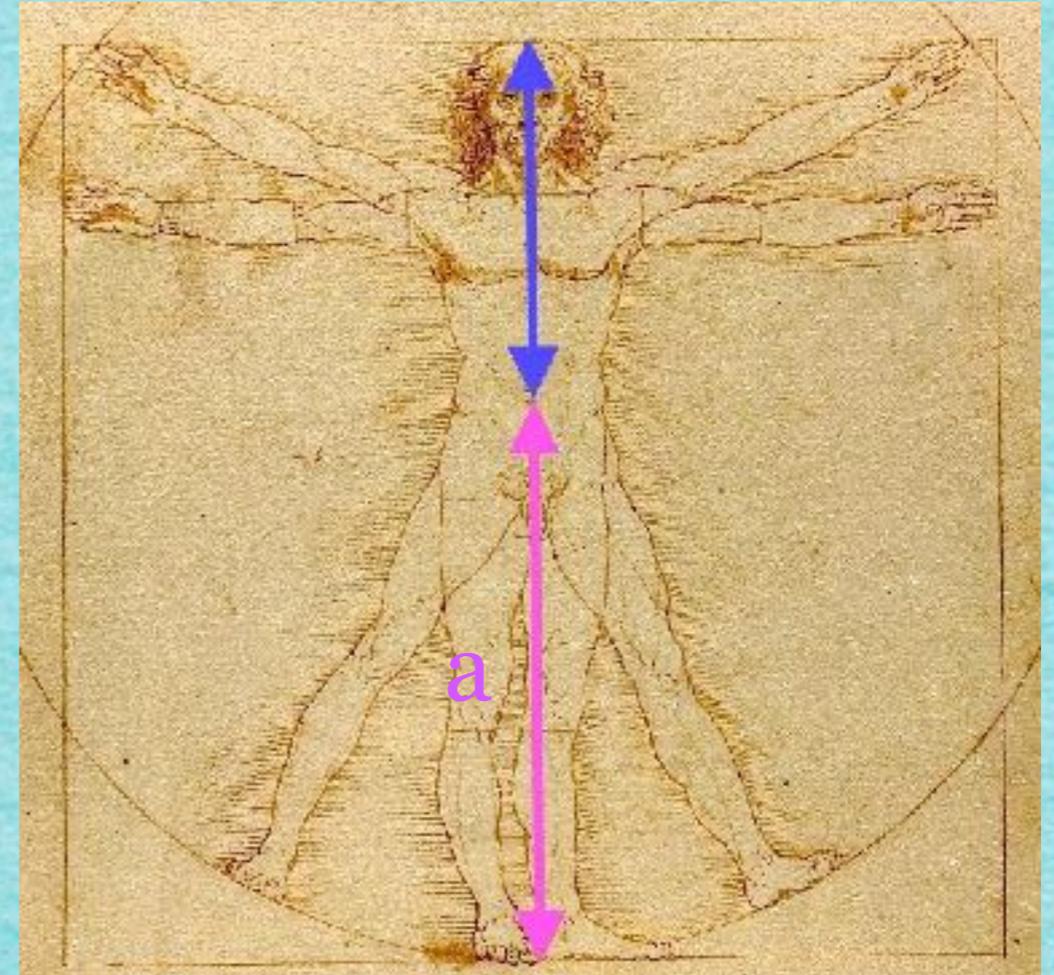
Goldener Schnitt:

Fibonacci-Zahlen



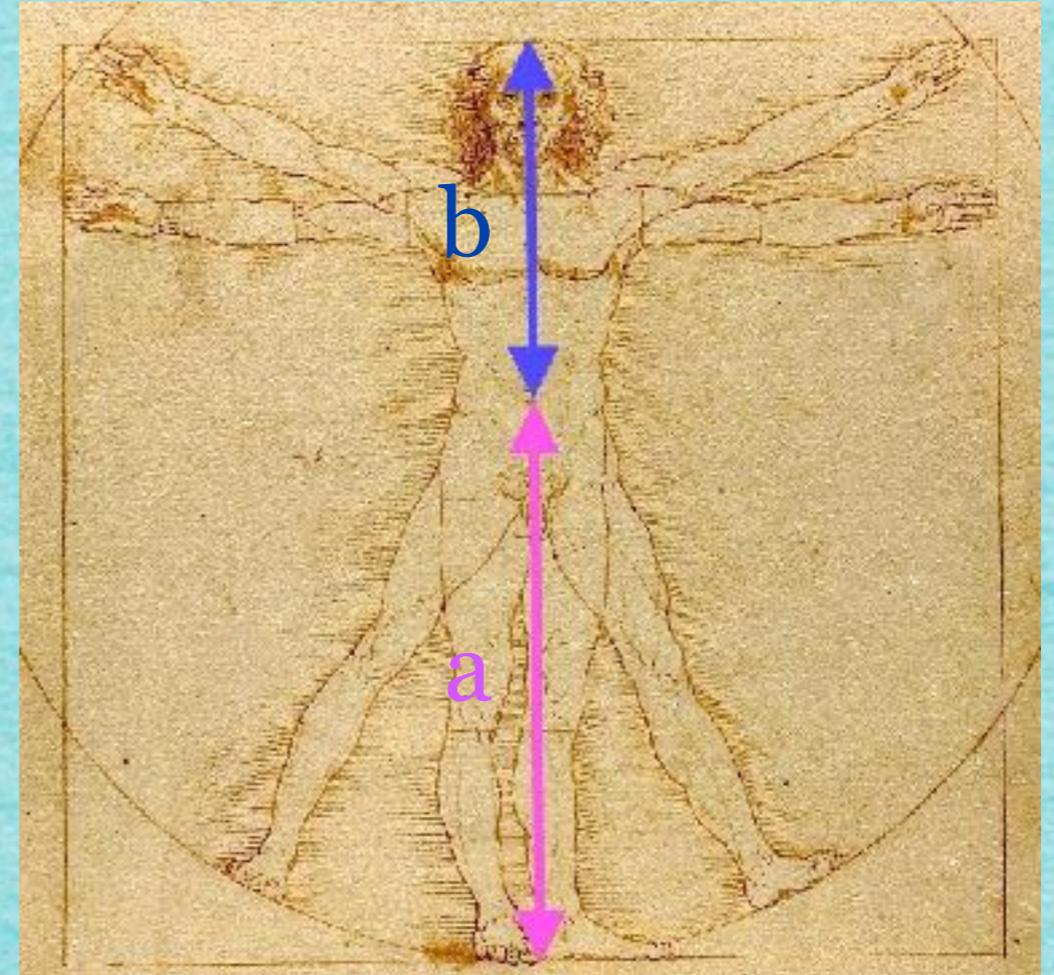
Goldener Schnitt:

Fibonacci-Zahlen



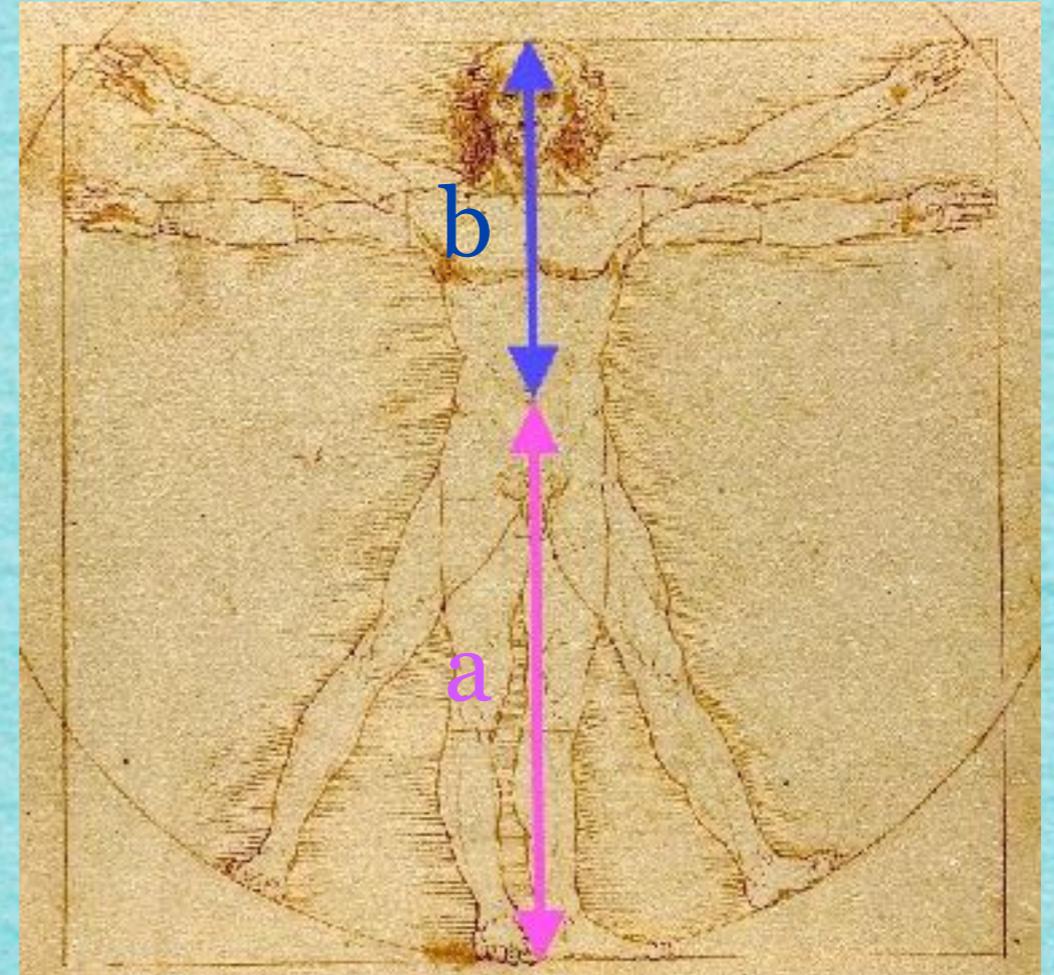
Goldener Schnitt:

Fibonacci-Zahlen



Goldener Schnitt:

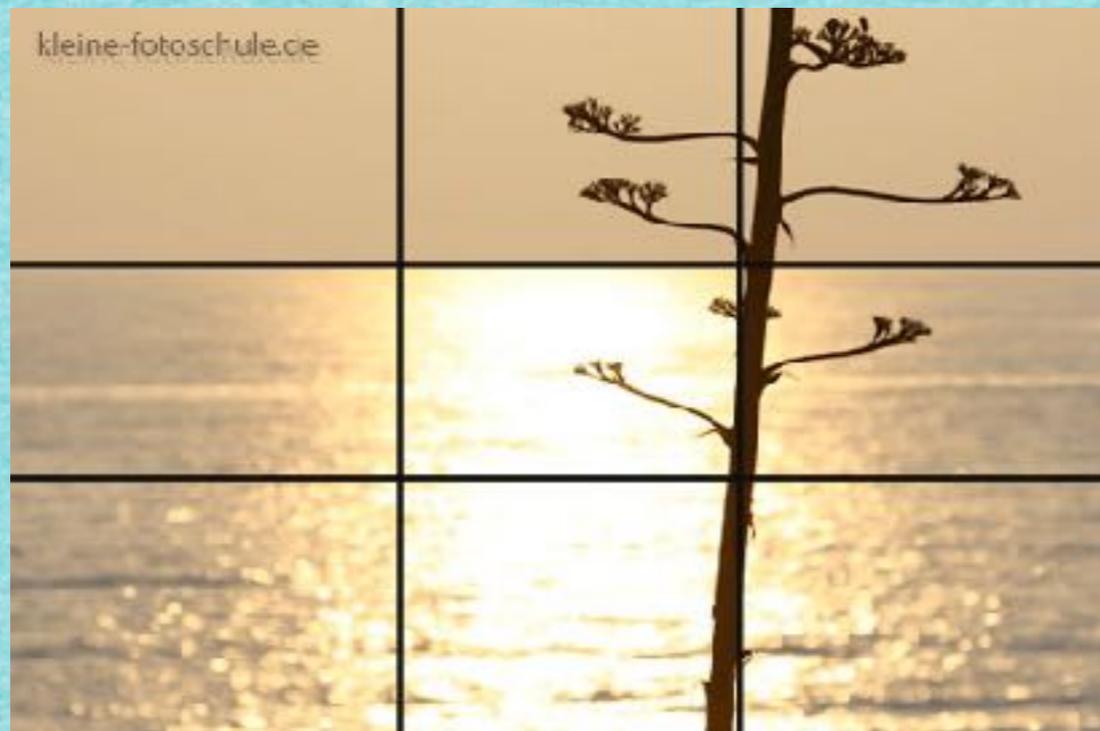
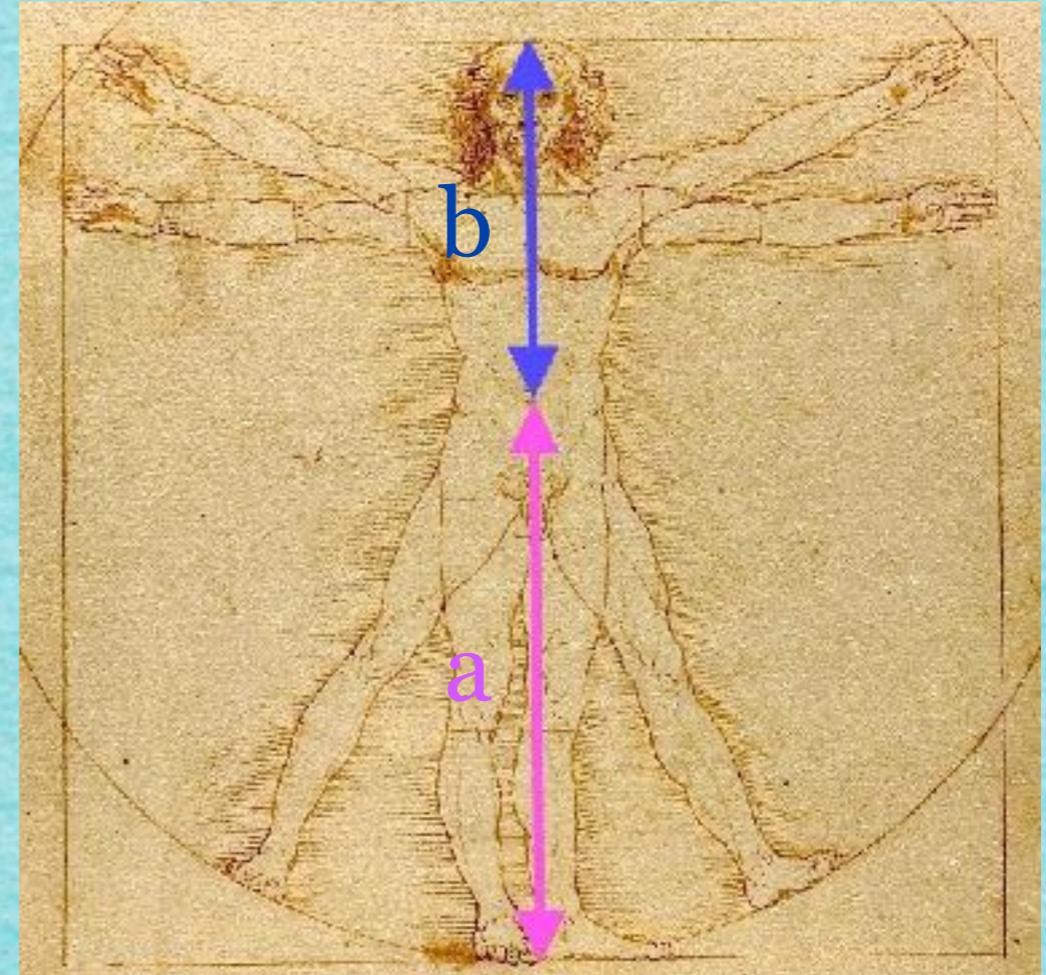
Fibonacci-Zahlen



Goldener Schnitt:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

Fibonacci-Zahlen



Goldener Schnitt:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

Fibonacci-Zahlen

Fibonacci-Zahlen

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

Fibonacci-Zahlen

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

Herleitung des Zahlenwertes [Bearbeiten]

Aus der oben angegebenen Definition

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

bzw.

$$\frac{a}{b} - 1 - \frac{b}{a} = 0$$

folgt mit $\Phi = \frac{a}{b}$ und $\frac{1}{\Phi} = \frac{b}{a}$

$$\Phi - 1 - \frac{1}{\Phi} = 0.$$

Multiplikation mit Φ ergibt die quadratische Gleichung

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat genau die beiden Lösungen

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033$$

und

$$\bar{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi = -\frac{1}{\Phi} \approx -0,618033.$$

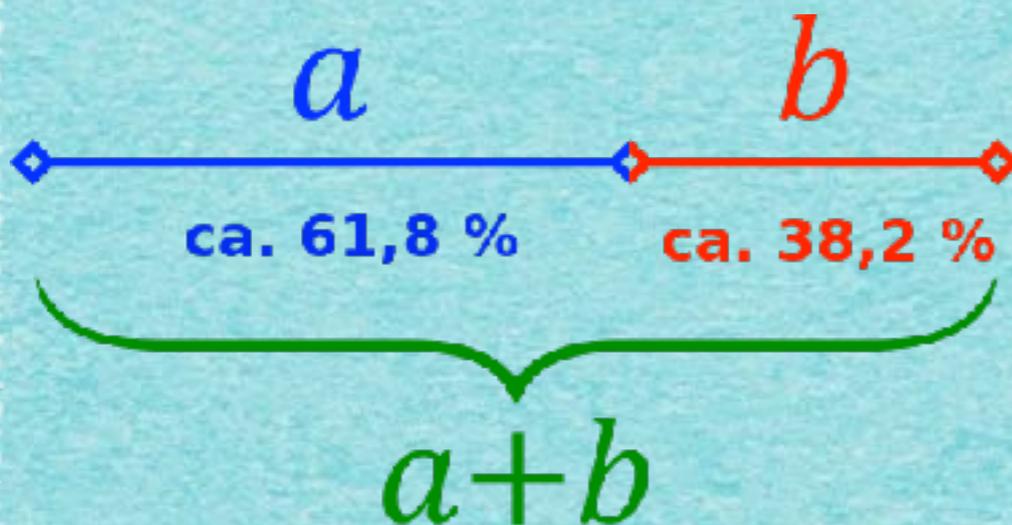
Da $\bar{\Phi}$ negativ ist, ist Φ die gesuchte Goldene Zahl.

Aus diesen Betrachtungen folgt unmittelbar die interessante Beziehung:

$$\frac{1}{\Phi} + 1 = \Phi = \Phi^2 - 1$$

Fibonacci-Zahlen

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$



Herleitung des Zahlenwertes [Bearbeiten]

Aus der oben angegebenen Definition

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

bzw.

$$\frac{a}{b} - 1 - \frac{b}{a} = 0$$

folgt mit $\Phi = \frac{a}{b}$ und $\frac{1}{\Phi} = \frac{b}{a}$

$$\Phi - 1 - \frac{1}{\Phi} = 0.$$

Multiplikation mit Φ ergibt die quadratische Gleichung

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat genau die beiden Lösungen

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033$$

und

$$\bar{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi = -\frac{1}{\Phi} \approx -0,618033.$$

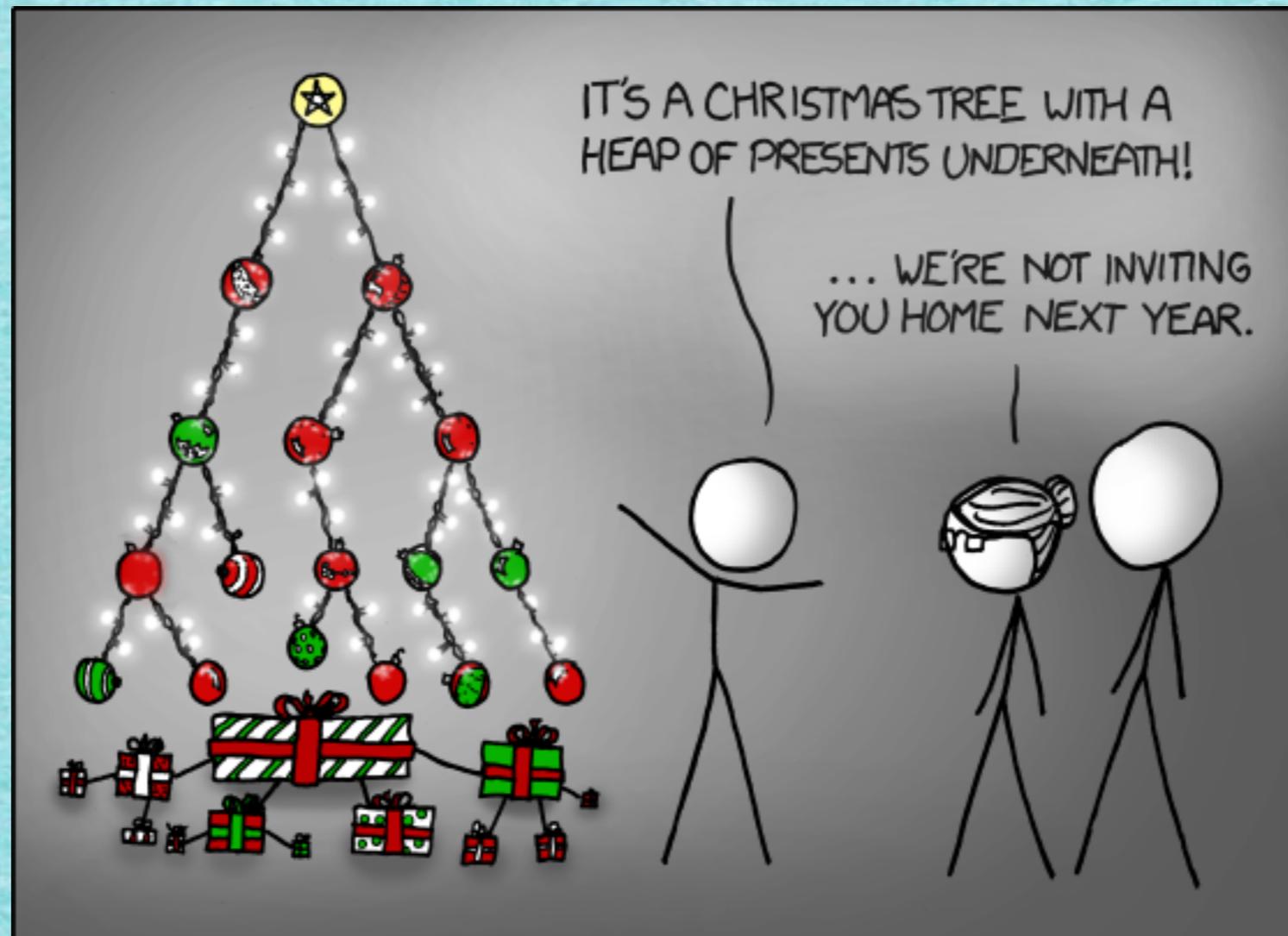
Da $\bar{\Phi}$ negativ ist, ist Φ die gesuchte Goldene Zahl.

Aus diesen Betrachtungen folgt unmittelbar die interessante Beziehung:

$$\frac{1}{\Phi} + 1 = \Phi = \Phi^2 - 1$$

Zusammenfassung Kapitel 4!

Zusammenfassung Kapitel 4!



Zusammenfassung Kapitel 4!



Zusammenfassung Kapitel 4!



NI KO **L** AUS

Zusammenfassung Kapitel 4!



Frohe Weihnachten!



Mehr demnächst!

s.fekete@tu-bs.de