5.3 Eine Laufzeitschranke

Definition 5.4 (Permutation)

Eine Permutation π ist eine Umsortierung von n Objekten, d.h. eine bijektive Abbildung

$$\pi: \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$$
$$i \mapsto \pi(i).$$

Man schreibt π auch in folgender Weise:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

– d.h. als Wertetabelle.

Beobachtung 5.5

Es gibt genau $n!$ Permutationen von n Objekten.

Wie lange benötigt man zum Sortieren mithilfe von nicht mehr als paarweisem Vergleichen?

Satz 5.6

Für n Objekte $x_1, \dots, x_n$ benötigt man zum Sortieren mindestens $\Omega(n \log n)$, wenn man die Objekte nur paarweise vergleichen kann.

Beweis:

(1) Zunächst hat man $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ viele mögliche Permutationen.

(2) Jeder Vergleich teilt die Menge der verbleibenden möglichen Permutationen in zwei Teilmengen.

(3) Im schlechtesten Falle bleibt jeweils die größere Teilmenge übrig.

(4) Man kann also bestenfalls eine Halbierung der verbleibenden Menge von Permutationen erzwingen.

(5) Bis man eine eindeutige Permutation sicher identifiziert hat, braucht mans also mindestens $\log_2(n!)$ Vergleiche.

(6)
$$\begin{aligned} \log_2(n!) &= \sum_{i=1}^{n} \log_2 i \\ &\geq \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} \log_2 i \\ &\geq \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} \\ &= \frac{n}{2}(\log_2 n - 1) \\ &\in \Omega(n \log n) \end{aligned}$$

$\square$

5.4 Behandeln von Rekursionen

Welche Möglichkeiten gibt es, Rekursionsgleichungen zu lösen?

5.4.1 Substitutionsmethode

Wie gesehen!
(1) Rate eine Lösung.
(2) Beweise die Richtigkeit per Vollständiger Induktion.

Das haben wir im Beweis von Satz 5.7 angewendet.

Schwierigkeit: Gute Lösung finden!
(In der Regel ist man an einer möglichst genauen Lösung interessiert – das kann schwer bis unmöglich sein!)
Oft kann man aber Abschätzungen gewinnen, z.B.

$$T(n) \in \Omega(n)$$
$$T(n) \in O(n^2)$$

5.4.2 Erzeugende Funktionen

Man kann Rekursionen auch oft lösen, indem man sie in einen abstrakt-formalen Kontext einbettet und die dafür bekannten Rechenregeln anwendet.

Dafür betrachten wir

DEFINITION 5.7 (Erzeugende Funktion)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge mit $a_n \in \mathbb{R}$.

Dann heißt $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

die (gewöhnliche) erzeugende Funktion von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel

(a) $a_n = 2a_{n-1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$a_0 = 1$

$a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$

$f(x) = 1\cdot x^0 + 2\cdot x^1 + 4x^2 + 8x^3 + \ldots$

Wir suchen eine „geschlossene Form" für a_n, also einen expliziten Ausdruck, um a_n direkt aus n (ohne Rekursion) ausrechnen zu können.

Wir können aufgrund der Rekursion $f(x)$ umformen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot a_{n-1}\cdot x^n$$

$$= a_0 + 2\cdot x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{f(x)} = a_0 + 2x\cdot f(x)$$

Auflösen nach $f(x)$:

$$f(x) = 1 + 2x f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x)(1-2x) = 1, \quad \text{d.h.} \quad f(x) = \frac{1}{1-2x}$$

Das kann man auch als Reihe schreiben, indem man

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{1}{1-p} \quad \text{nutzt:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$$

Damit Gleichheit gilt, müssen die Koeffizienten gleich sein

$$a_0 = 2^0$$
$$a_1 = 2^1$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2^n$$

$\rightarrow$ Geschlossene Form!

Das geht natürlich auch für kompliziertere Fälle, die schwerer zu lösen sind!
Oft setzt man dafür auch ein breiteres Arsenal an Umformungen ein, Tabellen von Funktionsentwicklungen, etc.

(Mehr dazu nicht hier ...)