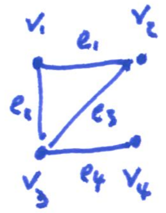
3.6 Datenstrukturen für Graphen

Wie beschreibt man einen Graphen?

(1) Inzidenzmatrix



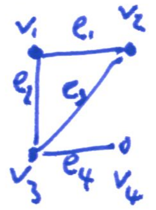
$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(„inzident": zusammentreffend)

Also: $A \in \{0,1\}^{n \times m}$ mit $a_{v,e} := \begin{cases} 1 & \text{für } v \in e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Größe: nm für einen Graphen mit n Knoten, m Kanten. (Viele Nullen!)

(2) Adjazenzmatrix



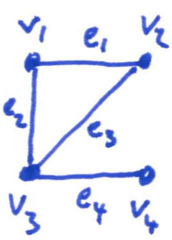
$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

(„adjazent": verbunden)

Also: $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ mit $a_{v,w} := \begin{cases} 1 & \text{für } \{v,w\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Größe: n^2 für einen Graphen mit n Knoten.

(3) Kantenliste



$\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}$

Benötigt wird eine Kantennummerierung!

→ Jeder Index ist eine Binärzahl mit $(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1)$ Bits, bzw. eine Dezimalzahl mit $(\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1)$ Stellen.

Unterschied in Codierungslänge: Ein Faktor $\log_2 10 = 3{,}3219\ldots$,
denn $\log_2 n = \log_2 10 \cdot \log_{10} n$

Einschub: Wie viele Ziffern benötigt man für eine Zahl in Binär- oder Dezimaldarstellung?

Beispiele:

Binär	Dezimal	Stellen (binär)	(dezimal)
1	1	1	1
10	2	2	1
101	5	3	1
1111111111	1.023	10	2
1 0.000.000.000.000.000	65.536	17	5

Eine Zahl n mit b Binärstellen liegt zwischen 2^{b-1} und 2^b,
mit d Dezimalstellen liegt zwischen 10^{d-1} und 10^d:

$$2^{b-1} \le n < 2^b$$

bzw. $$10^{d-1} \le n < 10^d$$

Also gilt $$b-1 \le \log_2 n < b$$

bzw. $$d-1 \le \log_{10} n < d,$$

d.h. $$b = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

bzw. $$d = \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$$

Außerdem gilt mit $$2^b = \left(2^{\log_2 10}\right)^{\frac{b}{\log_2 10}} = 10^{\frac{b}{\log_2 10}},$$

also $d \approx \frac{1}{\log_2 10} b$, d.h. zwischen der binären und dezimalen Stellenzahl gibt es eine Umrechnungskonstante von $\log_2 10 \approx 3{,}3219\ldots$

(Das gilt nur ungefähr, weil wir ja ganze Zahlen haben und runden!)