Technische Universität Braunschweig

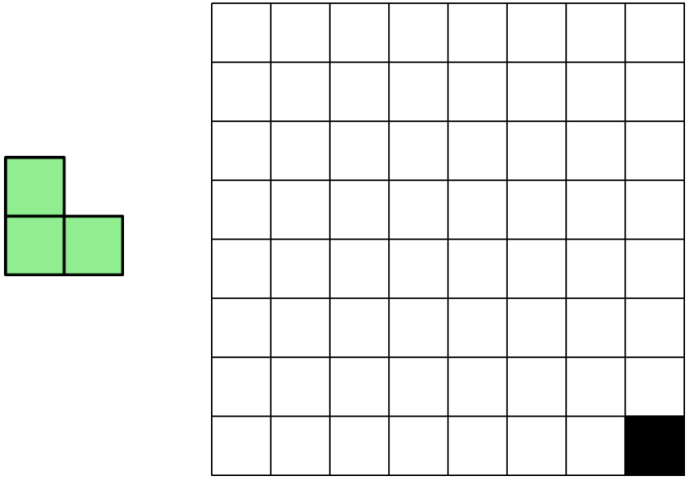
Algorithmen und Datenstrukturen
Übung 3

Matthias Konitzny, Arne Schmidt

12.11.2020

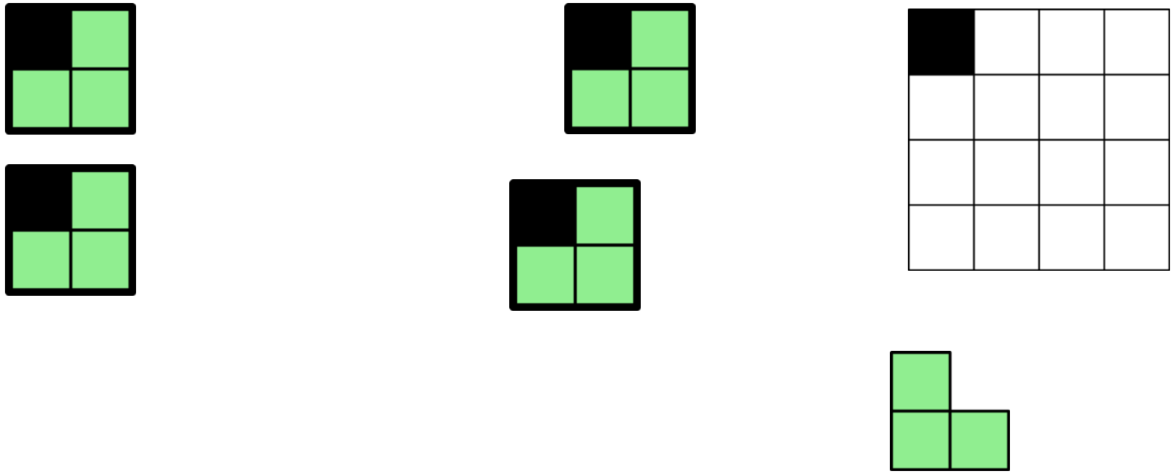
Einführendes Beispiel

Kann man ein 8x8 Schachbrett mit L-Trominos füllen, wenn man eine beliebige Ecke des Feldes löscht?

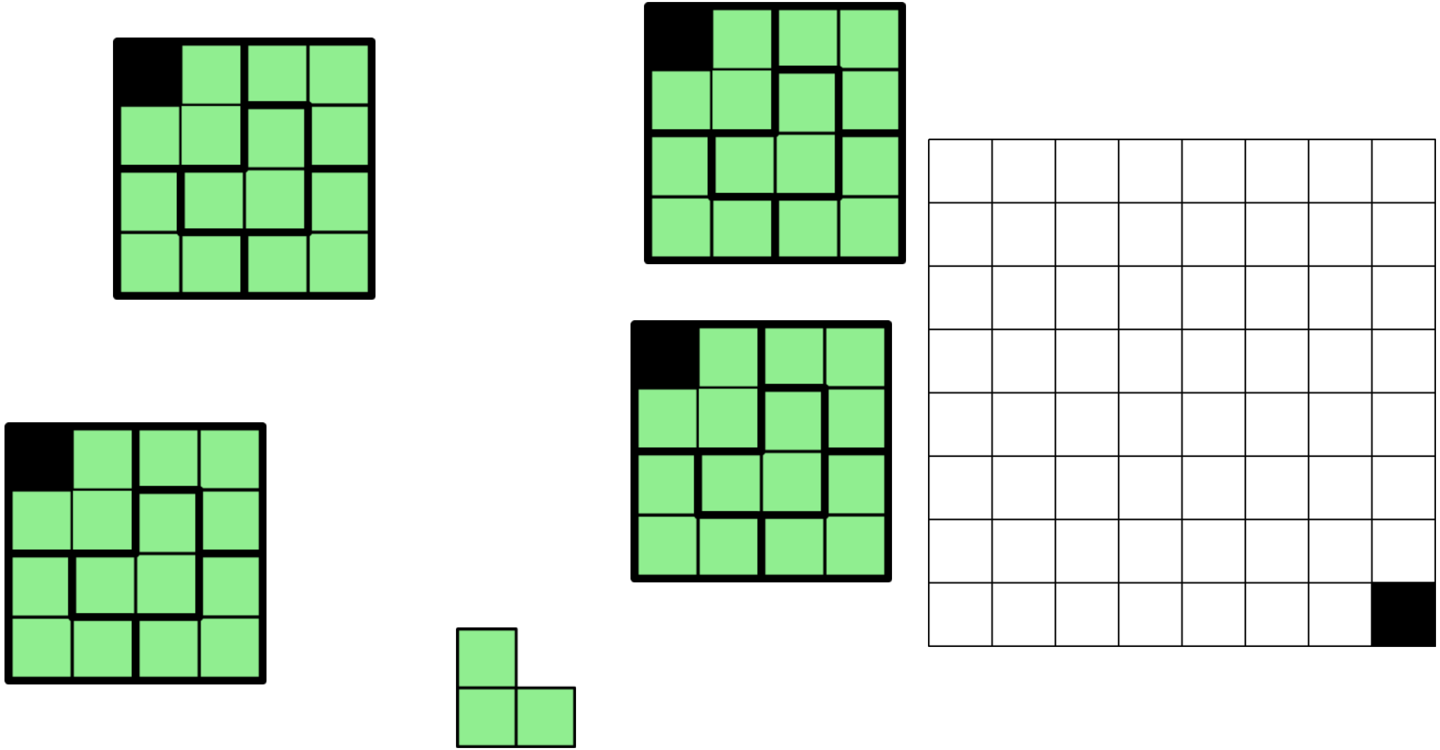


Einführendes Beispiel

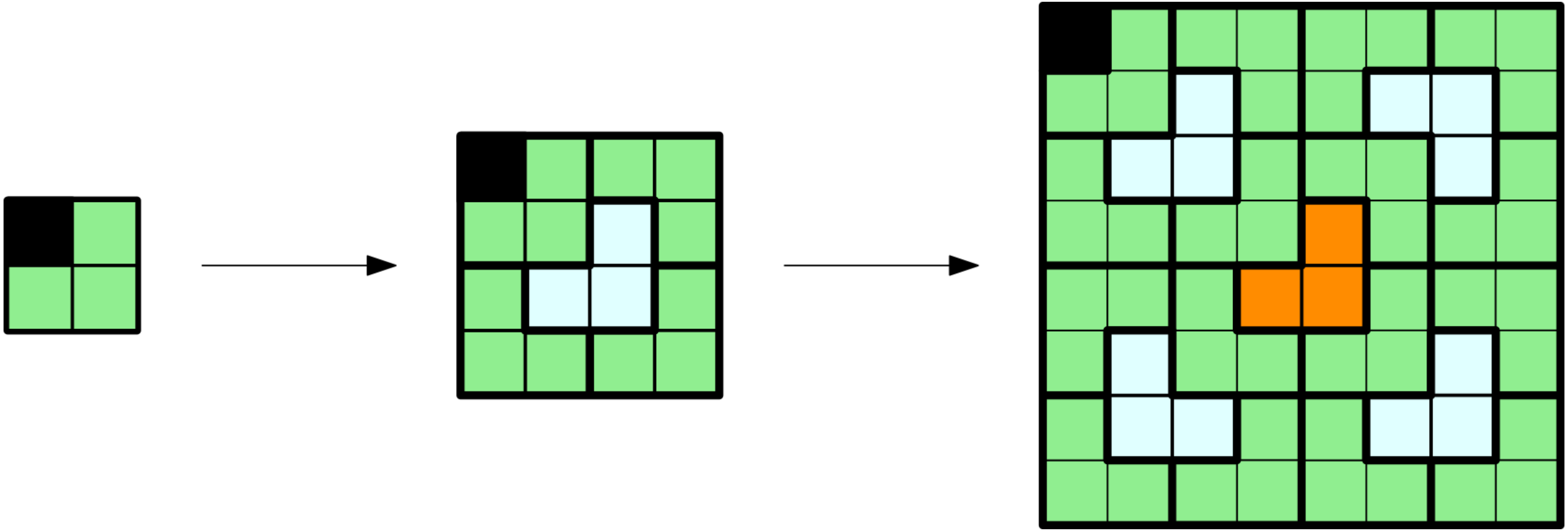
Einführendes Beispiel



Einführendes Beispiel



Einführendes Beispiel



L-Trominos und das Schachbrett

Satz: Jedes $2^n \times 2^n$ Schachbrett (minus eine Ecke) kann mit L-Trominos gepflastert werden.

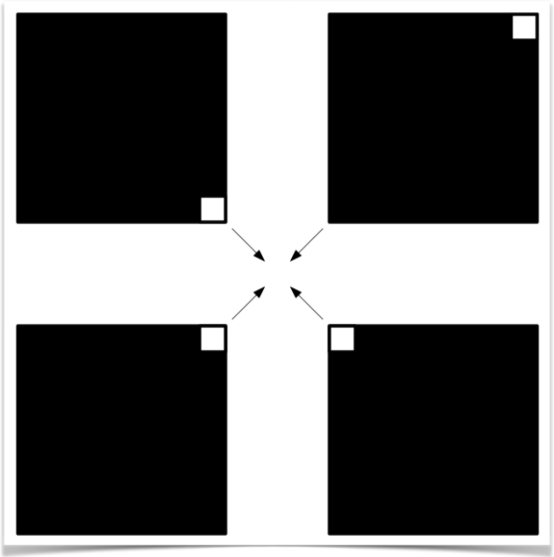
Beweis:
Für $n = 1$: $2^1 \times 2^1$ Schachbrett mit einer Ecke weniger. Es bleibt ein L-Tromino übrig. Dort können wir also ein L-Tromino pflastern.

Annahme: Wir haben den obigen Satz für ein bel., aber festes n beweisen.

Wir zeigen nun: Wir können die Aussage auch für $n + 1$ beweisen.

L-Trominos und das Schachbrett

Zunächst: Wir können ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ Schachbrett in vier $2^n \times 2^n$ Schachbretter disjunkt unterteilen (teile horizontal und vertikal in der Mitte)



Wir wissen:

1. Wir können die vier Schachbretter mit L-Trominos pflastern.
2. Die vier Schachbretter sind unabhängig. Wir können sie also so anordnen, dass drei Schachbretter ihre fehlende Ecke in die Mitte drehen.
   Dadurch entsteht ein L-Tromino, welches wir füllen können.

Also können wir auch ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ mit L-Trominos pflastern.

Frage: Warum ist damit der Beweis fertig?

Beweistechniken – Teil 2
Vollständige Induktion

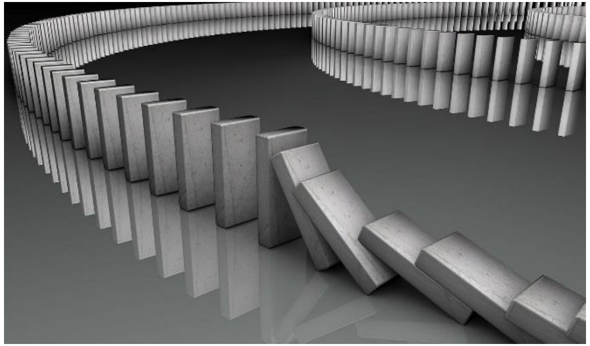
Beweise – Vollständige Induktion

Beweise – Vollständige Induktion

Bei der **vollständigen Induktion** beweist man Aussagen der Form „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $P(n)$“ indem man

1. $P(n_0)$ und
2. „Für alle $x \in \mathbb{N}, x \geq n_0$ gilt $P(x) \Rightarrow P(x+1)$“

zeigt.



Vollständige Induktion lässt sich auch oft auf Graphenstrukturen anwenden!

Beweise – Vollständige Induktion

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionanfang:

Für $n = 1$ ist $\sum_{i=1}^{n} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$. Diese Aussage stimmt also.

Induktionsvoraussetzung:

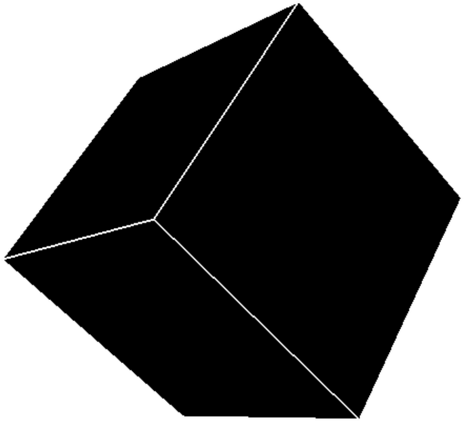
Es gelte $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ mit n beliebig, aber fest.

Induktionsschritt: ($\boldsymbol{n \to n+1}$)

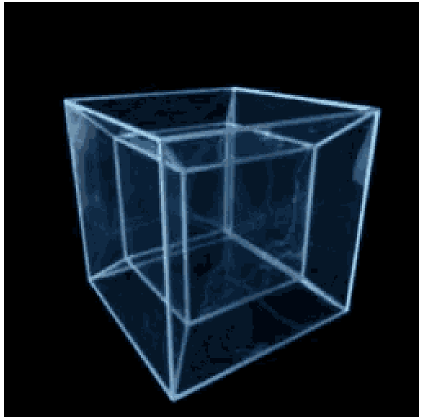
$$\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$\overset{IV}{\triangleq} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$



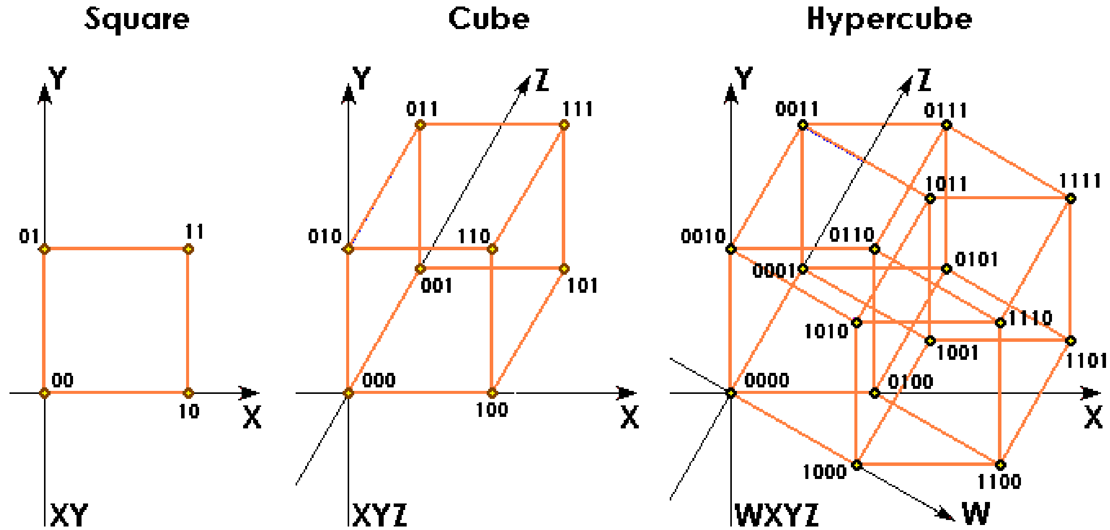
Hypercubes

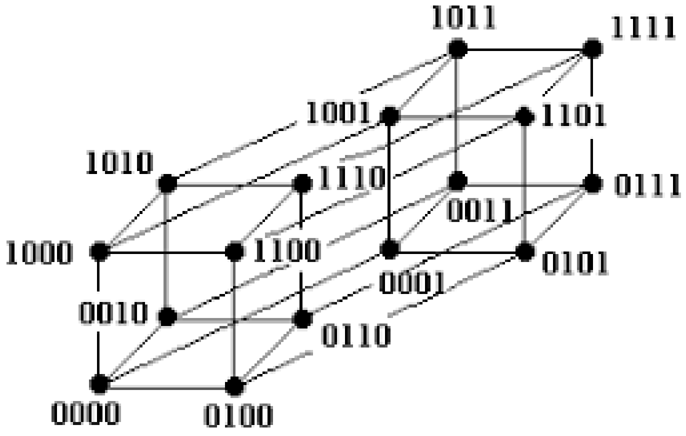


Beweise – Vollständige Induktion

n-Dimensionale Würfel

Zeige: n-Dimensionale Würfel sind hamiltonsch.



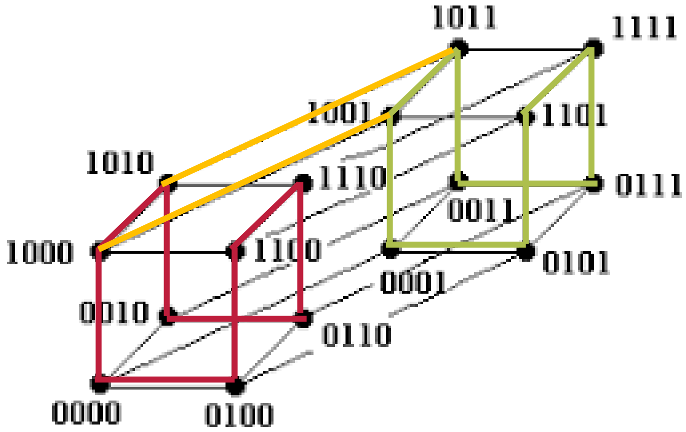


Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch (der Kreis selbst ist die Tour).

I.V.: Der n-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n.

I.S.:
- Betrachte $(n+1)$-Dimensionalen Würfel.
- Nach IV: Zwei Subgraphen hamiltonsch.
- Verschmelze die Kreise.



Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch (der Kreis selbst ist die Tour).

I.V.: Der n-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n.

I.S.: Betrachte einen $(n+1)$-dimenisonalen Würfel W und die Aufteilung in zwei n-dimensionale Würfel $W_1 := \{v_1, \dots, v_{2^n}\}, W_2 := \{v'_1, \dots, v'_{2^n}\}$, wobei v_i und v'_i in W verbunden sind.

W_1 und W_2 sind beide hamiltonsch. Betrachte einen Hamiltonkreis, der in beiden Würfeln die gleiche Reihenfolge benutzt. O.B.d.A. sei $\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2$ die letzte Kante des Kreises K_1 in W_1 und $\mathrm{v}'_1\mathrm{v}'_2$ die letzte Kante des Kreises K_2 in W_2.

Ein Hamiltonkreis in W ist: $\mathrm{v}_1 \overbrace{\mathrm{v}'_1 \dots \mathrm{v}'_2}^{K_2} \overbrace{\mathrm{v}_2 \dots \mathrm{v}_1}^{K_1}$

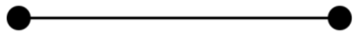
Zusammenhang in Graphen

Zusammenhang in Graphen

<u>Behauptung:</u> Alle Graphen (mit mind. zwei Knoten), bei denen alle Knoten mindestens den Grad 1 haben, sind zusammenhängend.

Beweis:

I.A.: Der kleinste Graph, bei dem jeder Knoten (mind.) Grad 1 besitzt zwei Knoten und eine Kante.



I.V.: Für ein bel., aber festes n, sind alle Graphen mit n Knoten und Minimalgrad 1 zusammenhängend.

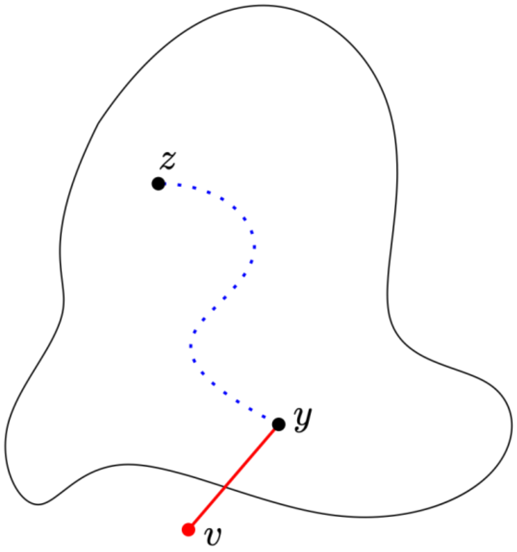
Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \to n + 1$

Betrachte einen Graphen G mit n Knoten in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.

Nach Annahme ist dieser Graph zusammenhängend; es existiert also ein Pfad zwischen je zwei Knoten.

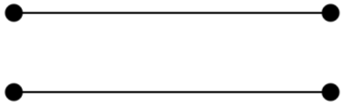
Nun fügen wir einen neuen Knoten plus eine Kante hinzu um einen Graphen mit $n + 1$ Knoten zu erhalten.

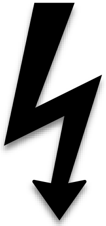


Damit ist der neue Knoten zu einem Knoten G verbunden, wodurch es zwischen allen $n + 1$ Knoten einen Pfad gibt.
$\Rightarrow$ Der neue Graph ist zusammenhängend!

Zusammenhang in Graphen

Was ist hiermit?





Was lief im Beweis schief?

Konnten wir über unsere Methode alle möglichen Graphen mit $n + 1$ Knoten erzeugen?

Build-up Error

Dies ist ein typischer “***build-up error***”.

Fehlerhafte Annahme: Jeder Graph mit $n + 1$ Knoten mit einer Eigenschaft A kann aus einen Graphen mit n Knoten und derselben Eigenschaft konstruiert werden.

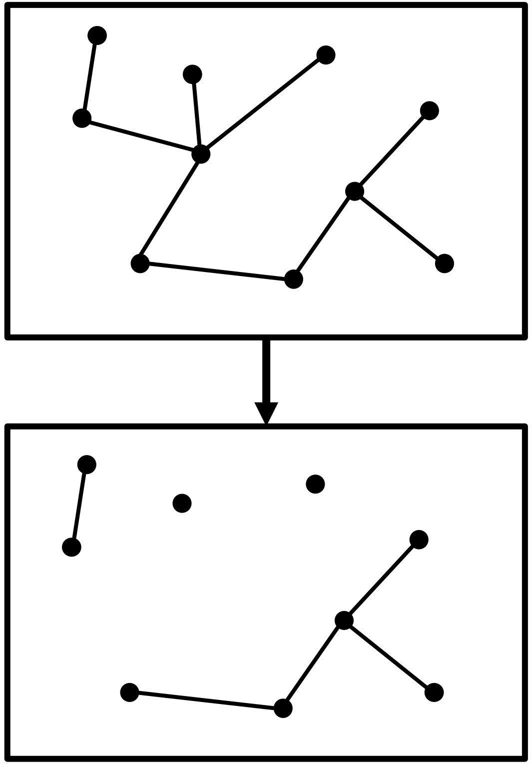
Ausweg: “***Shrink down and grow back***”

Nimm einen bel. Graphen mit $n + 1$ Knoten, entferne einen Knoten, wende I.V. an, füge Knoten wieder an und argumentiere, warum die Eigenschaft immer noch gilt.

Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \to n+1$

Betrachte einen Graphen G mit $n+1$ Knoten in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.



Nimm einen beliebigen Knoten (samt Kanten) aus G heraus.

Der Restgraph enthält n Knoten, welche alle den Grad…mind. 0 besitzen…

Darauf können wir I.V. nicht anwenden!

Beliebte Fehler

Beweise – Vollständige Induktion

Beliebte Fehler:

- Build-Up-Error:

  Füge etwas hinzu, um den Induktionsschritt zu zeigen.
  So werden ggf. nicht alle Strukturen berücksichtigt!
- Kein Induktionsanfang oder -schluss.

  IA und IS müssen beide vorhanden sein!
- Zu wenig Induktionsanfänge (z.B. bei Rekursionen mit mehreren Anfängen)
- Induktionsvoraussetzung falsch angewendet.

  Behauptung: $a^n = b^n$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \geq 0$
  IA: $n = 0$: $a^0 = 1 = b^0$
  IV: $a^x = b^x$ gilt für alle $x \leq n$ mit n bel., aber fest.
  IS: $a^{n+1} = a^n a = b^n b = b^{n+1}$

Beispiele für Beweise

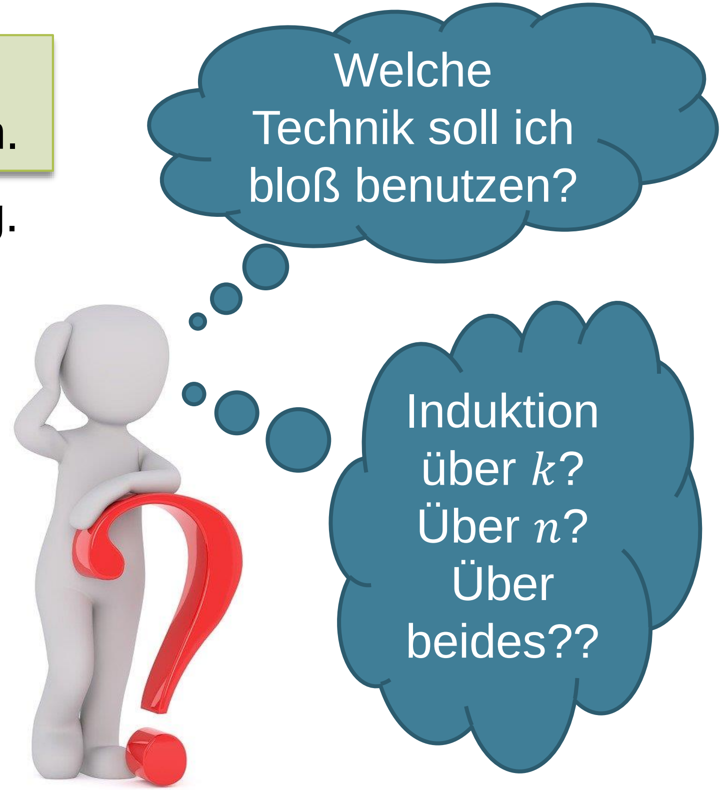
Kreisfreie Graphen

Satz: Jeder kreisfreie Graph mit n Knoten und k Zusammenhangskomponenten besitzt $n - k$ Kanten.

Beweis per Induktion über k mit n fest, aber beliebig.
IA: Für n Komponenten besitzt der Graph keine Kanten, also: $0 = n - n = n - k$ Kanten.

IV: Jeder kreisfreie Graph mit k ZHKs besitzt $n - k$ Kanten.

IS: $k \to k - 1$
Sei G ein Graph mit $k - 1$ ZHKs und sei $e \in E$.
G ohne e besitzt k ZHKs, also $n - k$ Kanten.
$\Rightarrow G$ besitzt $n - (k - 1)$ Kanten.



Kreisfreie Graphen

Satz: Jeder zusammenhänge kreisfreie Graph besitzt mindestens zwei Knoten mit Grad 1.

Beweis per Widerspruch.
Annahme: Es gibt maximal einen Knoten von Grad 1.
Dann ist:

$$2m = \sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) \geq 1 + 2(n-1) > 2(n-1)$$

Graph hat also mindestens n Kanten.
$\Rightarrow$ Graph ist nicht kreisfrei.