Technische Universität Braunschweig

Algorithmen und Datenstrukturen – Übung #4

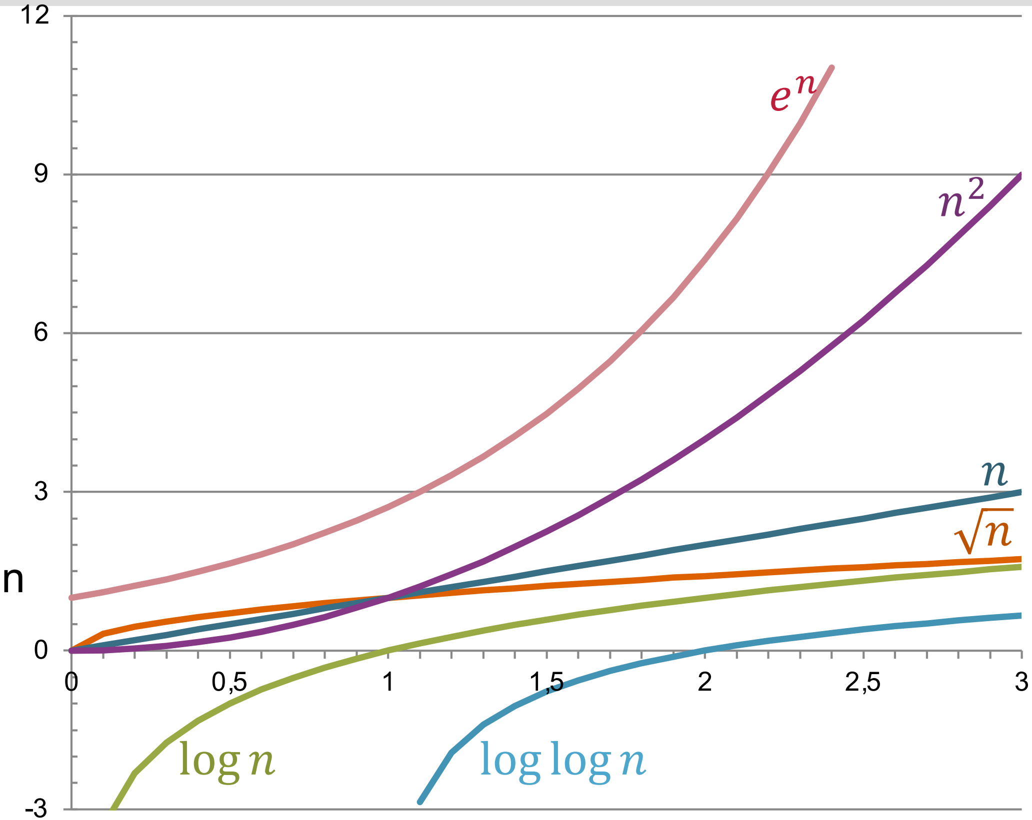
BFS/DFS, Wachstum von Funktionen

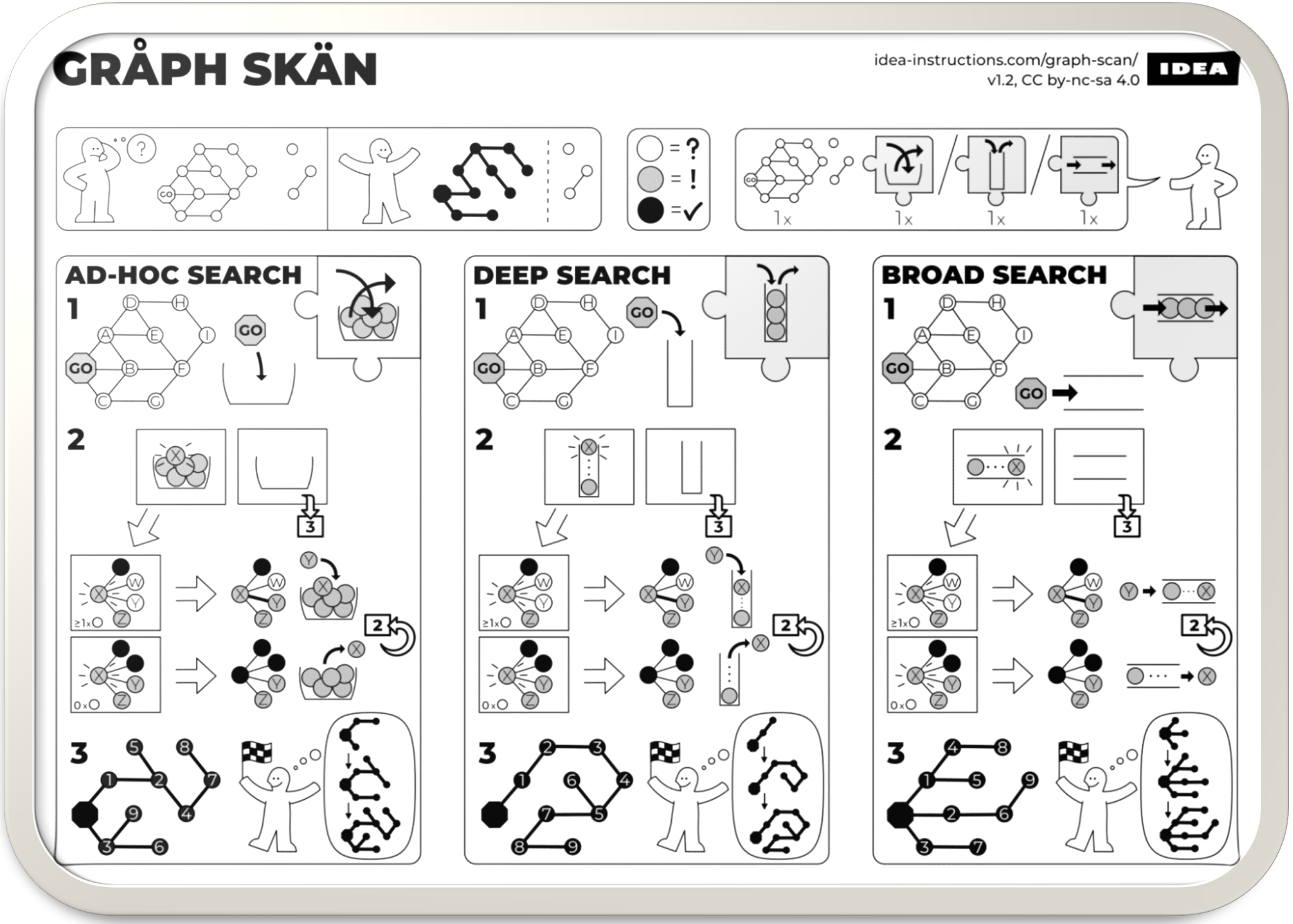
Matthias Konitzny, Arne Schmidt

26.11.2020

Heute

- Breiten- und Tiefensuche
- Wachstum von Funktionen
  - Größe des Inputs
  - Definitionen (O-Notation)
  - Relationen zwischen Laufzeitklassen
  - Beispiele für Laufzeitklassen

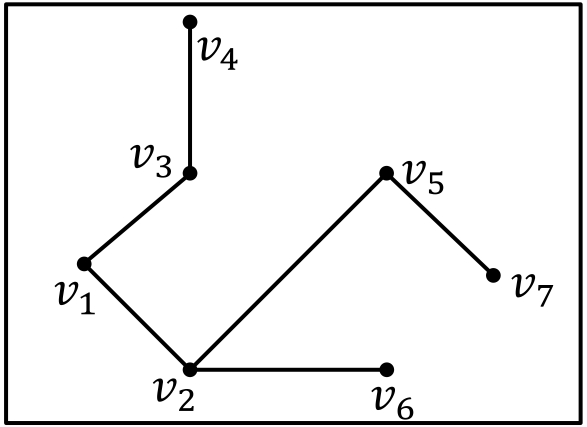




1: https://idea-instructions.com/graph-scan/

Breitensuche

Benutze Warteschlange
Prinzip: First-in-first-out



v_1

v_1, v_2

v_1, v_2, v_3

v_2, v_3

v_2, v_3, v_5

v_2, v_3, v_5, v_6

v_3, v_5, v_6

v_3, v_5, v_6, v_4

v_5, v_6, v_4

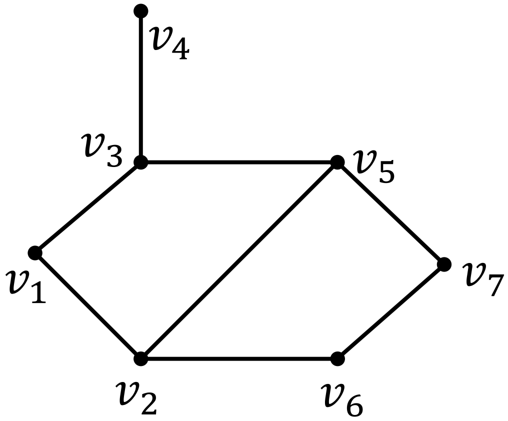
v_5, v_6, v_4, v_7

v_6, v_4, v_7

v_4, v_7

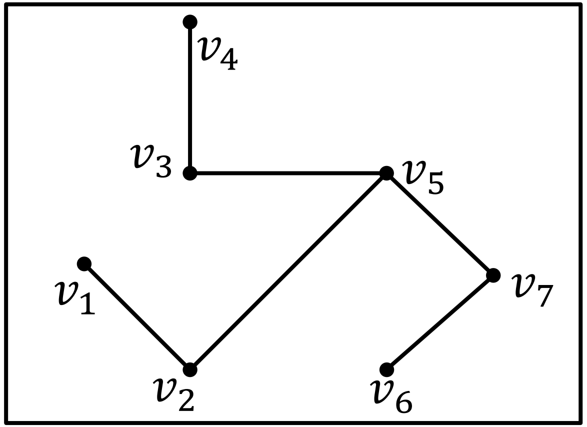
v_7

$\emptyset$



Tiefensuche

Benutze Stapel
Prinzip: Last-in-first-out



v_1

v_1, v_2

v_1, v_2, v_5

v_1, v_2, v_5, v_3

v_1, v_2, v_5, v_3, v_4

v_1, v_2, v_5, v_3

v_1, v_2, v_5

v_1, v_2, v_5, v_7

v_1, v_2, v_5, v_7, v_6

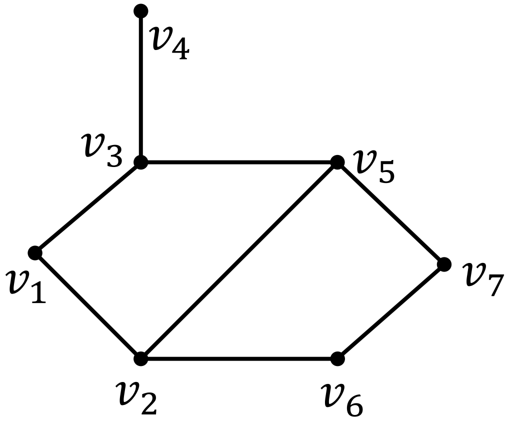
v_1, v_2, v_5, v_7

v_1, v_2, v_5

v_1, v_2

v_1

$\emptyset$



Tiefensuche

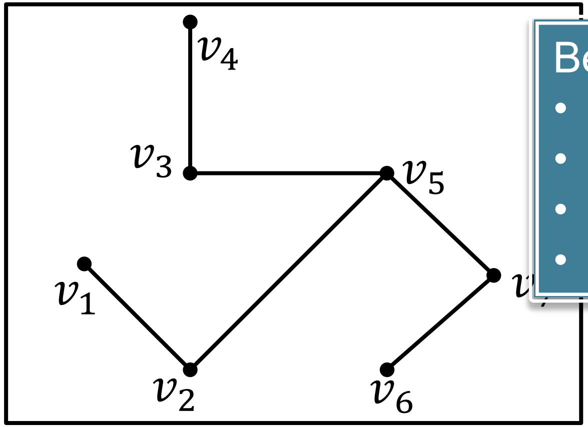
Benutze Stapel
Prinzip: Last-in-first-out

v_1

v_1, v_2

v_1, v_2, v_5

v_1, v_2, v_5, v_3



Beliebte Fehler:

- Leere Menge am Ende vergessen
- Nicht jede Änderung angegeben
- Suchbaum nicht angegeben
- Nicht den kleinsten Index beachtet

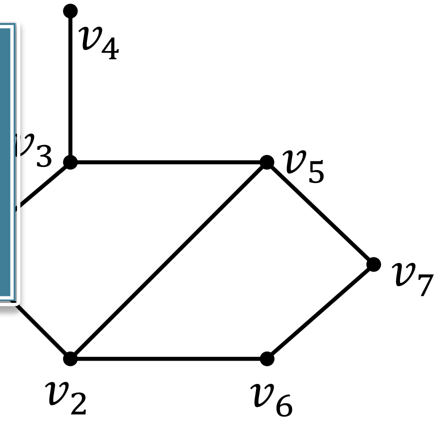
v_1, v_2, v_5, v_7

v_1, v_2, v_5

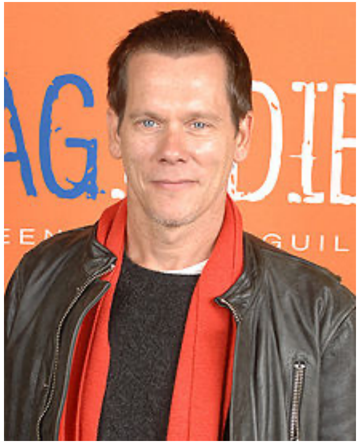
v_1, v_2

v_1

$\emptyset$



Six Degrees of Kevin Bacon vs. Six Degrees of Wikipedia



Finde kürzesten Weg von einem Schauspieler über Filme zu Kevin Bacon

Ungerichteter Graph

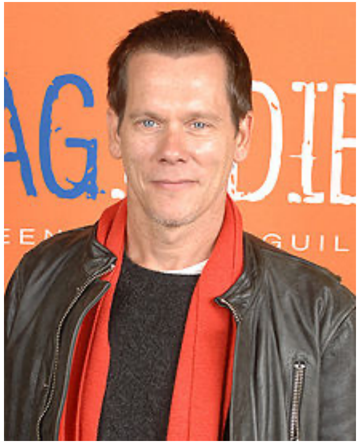
Hin- und Rückweg sind gleich lang

Finde kürzesten Weg von einer Seite über enthaltene Links zu einer anderen

Gerichteter Graph

Hin- und Rückweg sind verschieden lang

Six Degrees of Kevin Bacon vs. Six Degrees of Wikipedia



Finde kürzesten Weg von einem Schauspieler über Filme zu Kevin Bacon

Ungerichteter Graph

Hin- und Rückweg sind gleich lang

Finde kürzesten Weg von einer Seite über enthaltene Links zu einer anderen

Gerichteter Graph

Hin- und Rückweg sind verschieden lang

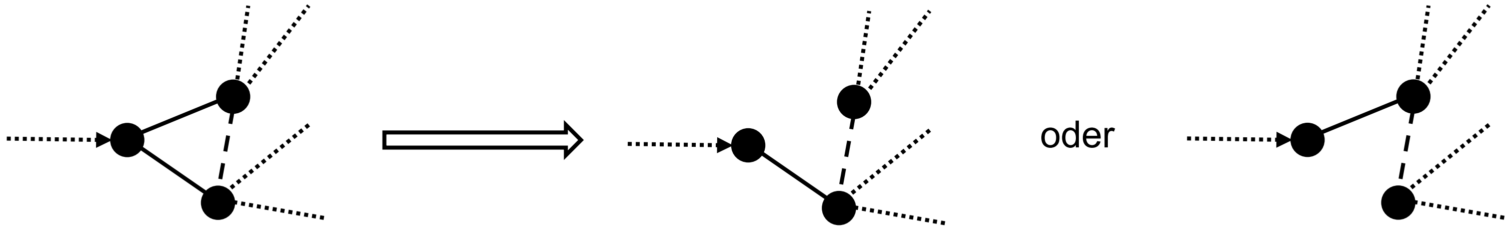
Weitere Problem mit BFS/DFS – Eindeutigkeitsproblem

Gegeben: Graph *G* und Knoten *v*
Frage: Ist der DFS(/BFS)-Baum von *G* eindeutig, wenn man bei *v* startet?

> <u>**Satz:**</u> Der DFS-Baum von G ist genau dann eindeutig, wenn G ein Baum ist.

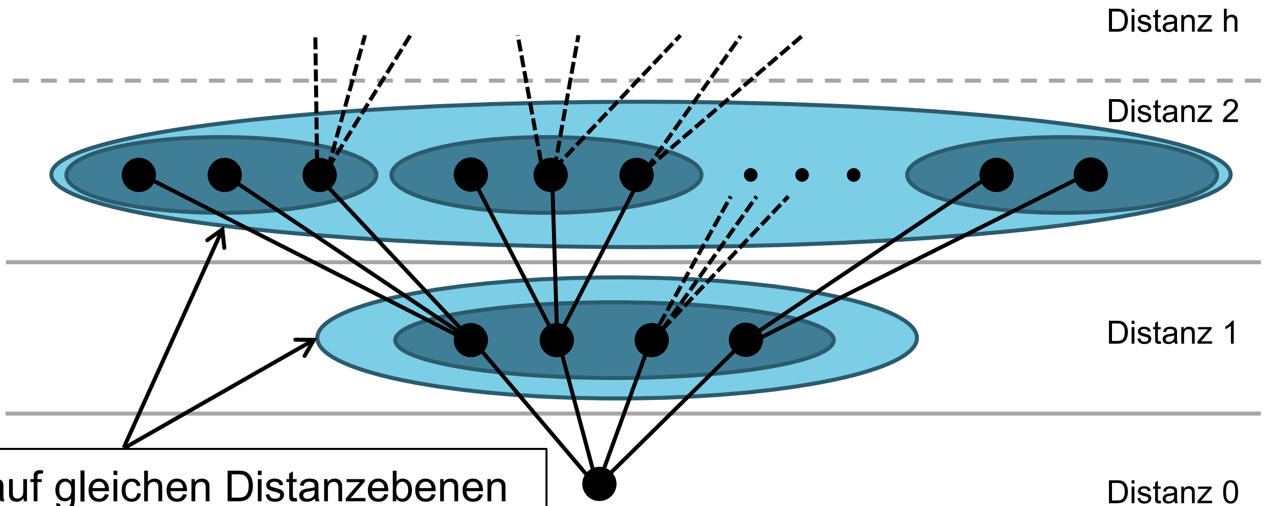
Beweis:
„⇒": Angenommen *G* besitzt einen Kreis. Dann können wir bei Erreichen des Kreises den Baum links oder recht herum aufbauen. Der DFS-Baum ist nicht eindeutig. Widerspruch!

„⇐": Wenn *G* ein Baum ist, ist auch der DFS-Baum ebendieser Graph. □



Eindeutiger BFS-Baum

<u>Satz:</u> Der BFS-Baum ist genau dann eindeutig, wenn der kürzeste Pfad von *v* zu allen anderen Knoten eindeutig ist.



Alle Knoten auf gleichen Distanzebenen dürfen miteinander verbunden sein!

Labyrinthe

https://fictionmachine.com/2015/07/03/everything-ive-done-ive-done-for-you-labyrinth-1985/

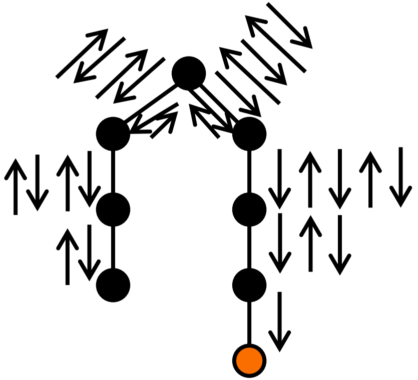
Zeit für ein Labyrinth

Wie oft muss man durch die Gänge des Labyrinths laufen, wenn man…

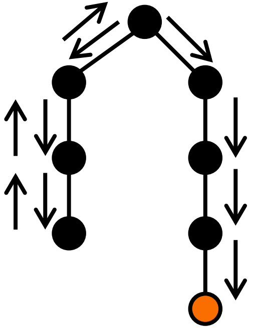
1. BFS, oder
2. DFS nutzt?

BFS:

Worst-Case: $\Omega(n^2)$ mal über Kanten laufen!



DFS schafft das schneller!



Man kann zeigen:

- Jede Kante wird maximal zwei Mal benutzt.
- Man benötigt maximal *2n-1* Schritte
- Es gibt Bäume, bei denen *2n-1* Schritte benötigt werden

Überblick

- Breiten- und Tiefensuche
- Wachstum von Funktionen
  - Größe des Inputs
  - Definitionen (O-Notation)
  - Relationen zwischen Laufzeitklassen
  - Beispiele für Laufzeitklassen

Wachstum von Funktionen / Laufzeiten

Wie lange benötigen Algorithmen?

- Absolute/Genaue Laufzeit ist nicht immer nötig
- Abschätzen: In welcher *Ordnung* wächst die Laufzeit?
- Wovon hängt die Laufzeit ab?
    - Was ist gegeben? (Zahlen, Strings, Graphen,…)
    - Wie viel ist gegeben? (Codierungsgröße)

Codierungsgröße - Zahlen

Wie können Zahlen codiert werden?

1. Unär („*Bierdeckelnotation*“)
2. b-adisch
   - Dezimal (10-adisch)
   - Binär (2-adisch)
   - Allgemein: $a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-\infty}$ wobei $n = \sum_{i=-\infty}^{m} a_i b^i$ und $0 \leq a < b$

Gewöhnlich für Zahlen: Binäre Darstellung, d.h. eine Zahl belegt $\log_2 n$ bits.

Beispiele:

Dezimal	Unär	Binär	Oktal	Hexadezimal
27	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 II	11011	33	1B

Codierungsgröße - Graphen

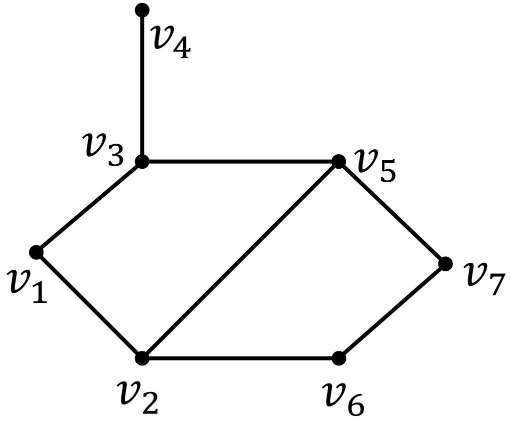
Wie kann man Graphen speichern?

Adjazenzmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Adjazenzliste:

$v_1 \colon v_2, v_3$
$v_2 \colon v_1, v_5, v_6$
$v_3 \colon v_1, v_4, v_5$
$v_4 \colon v_3$
$v_5 \colon v_2, v_3, v_7$
$v_6 \colon v_2, v_7$
$v_7 \colon v_5, v_6$



Größe: $|V|^2$ bits $\approx (|V| + 2|E|) \cdot \log|V|$ bits

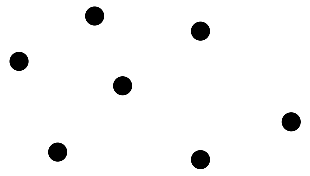
Codierungsgröße - Sonstige

Was gibt es noch?

- Zeichenketten/Strings S: $\approx |S| \cdot \log N$
  für N mögliche Zeichen.

(>o.o)>Das_ist_ein_String!!¥(°o°)¥

- Punktmenge P in d Dimensionen: $\approx d \cdot |P| \cdot \log N$,
  wobei N die größte Koordinate ist.



- $n \times m$-Matrizen: $\approx n \cdot m \cdot \log(N)$,
  wobei N der größtmögliche Wert ist.

$$\begin{pmatrix} 5 & 12 & 1 \\ 6 & 22 & 5 \\ 0 & 42 & 21 \end{pmatrix}$$

Überblick

- Breiten- und Tiefensuche
- Wachstum von Funktionen
  - Größe des Inputs
  - Definitionen (O-Notation)
  - Relationen zwischen Laufzeitklassen
  - Beispiele für Laufzeitklassen

Wachstum von Funktionen

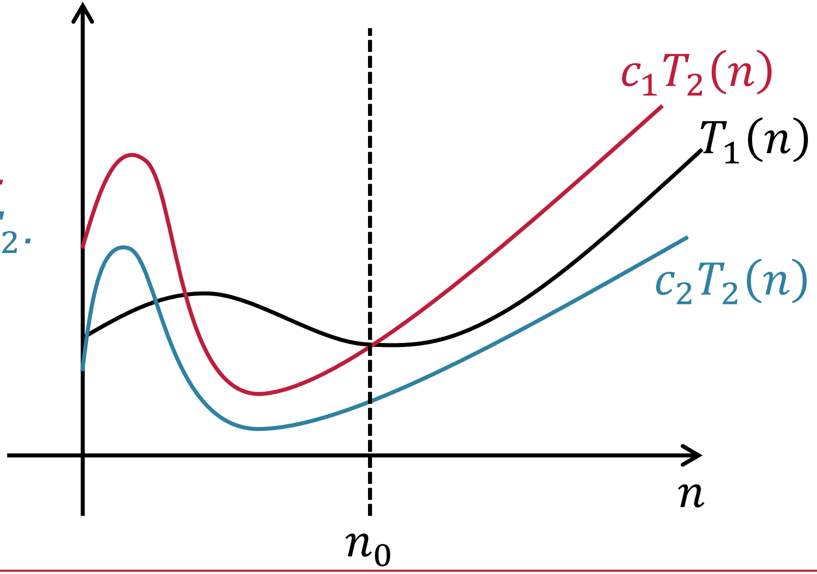
Betrachte Laufzeit als Funktion $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$

Verschiedene Systeme liefern verschiedene Laufzeiten, z.B. $T_1(n)$ und $T_2(n)$.

Aber:
$T_1(n)$ und $T_2(n)$ wachsen “ähnlich schnell”

$T_1(n)$ wächst höchstens c_1 mal so schnell wie T_2.
$T_1(n)$ wächst mindestens c_2 mal so schnell wie T_2.

Das gilt ggf. erst ab einem bestimmten Punkt, nämlich n_0



Landau-Symbole

Achtung:
O, Ω und Θ sind Mengen!

Das motiviert folgende Definitionen:

O-Notation:

Es gibt Konstanten $n_0 \in \mathbb{N}$ und $c_1 \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$0 \leq T_1(n) \leq c_1 T_2(n) \Leftrightarrow T_1(n) \in O\big(T_2(n)\big)$$

Ω-Notation:

Es gibt Konstanten $n_0 \in \mathbb{N}$ und $c_2 \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$T_1(n) \geq c_2 T_2(n) \geq 0 \Leftrightarrow T_1(n) \in \Omega\big(T_2(n)\big)$$

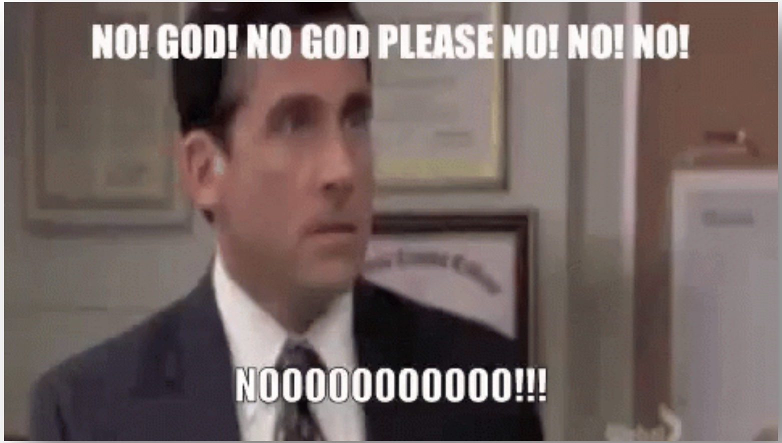
Θ-Notation:

Es gibt Konstanten $n_0 \in \mathbb{N}$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

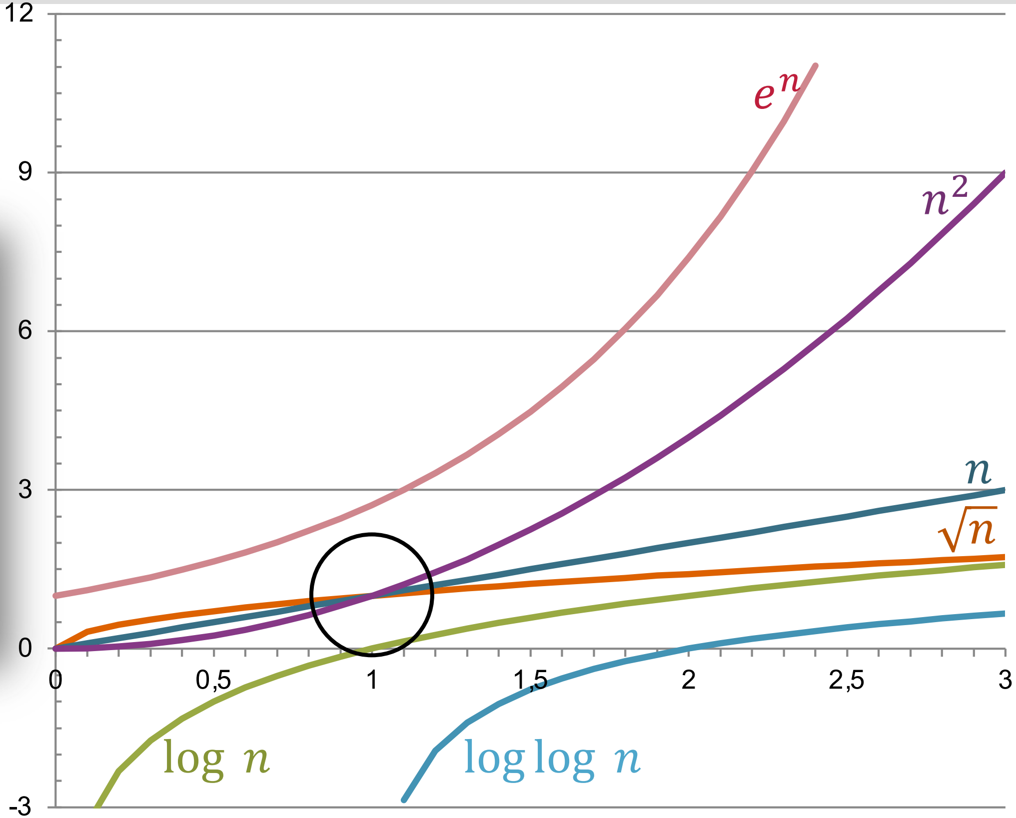
$$0 \leq c_2 T_2(n) \leq T_1(n) \leq c_1 T_2(n) \Leftrightarrow T_1(n) \in \Theta\big(T_2(n)\big)$$

Beispiel Funktionen

~~Zeige: $n \in O(n^2)$~~
~~Mit $c = 1$ und $n_0 = 1$ gilt die Aussage wie rechts zu sehen.~~



Vorsicht: Es muss eine Allaussage bewiesen/widerlegt werden

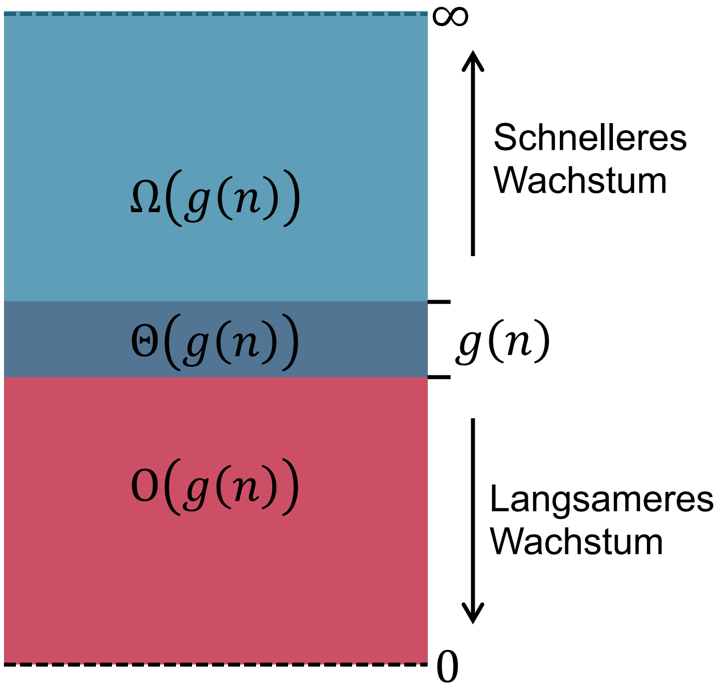


1: https://media1.tenor.com/images/2b6d254d7bbdfd42583e6080ac327d0f/tenor.gif?itemid=5268083

Überblick

- Breiten- und Tiefensuche
- Wachstum von Funktionen
  - Größe des Inputs
  - Definitionen (O-Notation)
  - Relationen zwischen Laufzeitklassen
  - Beispiele für Laufzeitklassen

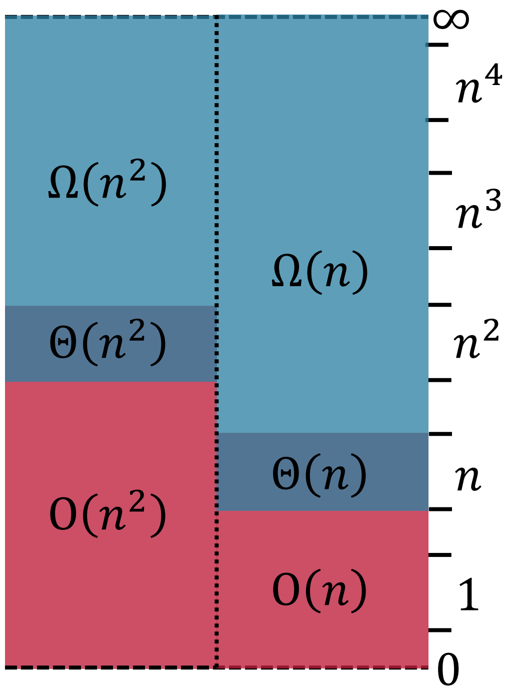
Relationen zwischen Klassen - Eine graphische Darstellung



Wir können sogar Klassen miteinander vergleichen.
Beispiel:

$$\Theta(n^2) \subsetneq \Omega(n)$$

Zum Merken:
Wächst die Funktion schneller, wächst der O-Bereich und der Ω-Bereich schrumpft.



Relationen zwischen Klassen – Eine Tabelle

Bedingung	Klasse \ Klasse	$O(g(n))$	$\Theta(g(n))$	$\Omega(g(n))$
$f(n) \in o(g(n))$ $\left(o(g(n)) \coloneqq O(g(n)) \setminus \Theta(g(n))\right)$ “Klein-o-Notation”	$O(f(n))$	$\subsetneq$	X	X
	$\Theta(f(n))$	$\subsetneq$	X	X
	$\Omega(f(n))$	X	$\supsetneq$	$\supsetneq$
$f(n) \in \Theta(g(n))$	$O(f(n))$	=	$\supsetneq$	X
	$\Theta(f(n))$	$\subsetneq$	=	$\subsetneq$
	$\Omega(f(n))$	X	$\supsetneq$	=
$f(n) \in \omega(g(n))$ $\left(\omega(g(n)) \coloneqq \Omega(g(n)) \setminus \Theta(g(n))\right)$ “Klein-ω-Notation”	$O(f(n))$	$\supsetneq$	$\supsetneq$	X
	$\Theta(f(n))$	X	X	$\subsetneq$
	$\Omega(f(n))$	X	X	$\subsetneq$

Heute

- Breiten- und Tiefensuche
- Wachstum von Funktionen
  - Größe des Inputs
  - Definitionen (O-Notation)
  - Relationen zwischen Laufzeitklassen
  - Beispiele für Laufzeitklassen

Beispiel 1

Zeige $4n^2 + 12n - 15 \in \Theta(n^2)$.

D.h.: Bestimme n_0, c_1, c_2, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$0 \leq c_1 \cdot n^2 \leq 4n^2 + 12n - 15 \leq c_2 \cdot n^2$$

1. Suche nach c_2:

$4n^2 + 12n - 15$

2. Suche nach c_1:

$4n^2 + 12n - 15$

Beide Ungleichung gelten ab $n_0 = 4$. Also $c_1 = 3, c_2 = 16$ und $n_0 = 4$.

Beispiel 2

Zeige oder widerlege: $2^n \in \Theta(3^n)$

Zunächst: $2^n \in O(3^n)$, denn $2^n \leq (2+1)^n = 3^n$.

Aber: $2^n \notin \Omega(3^n)$!

Ansonsten gäbe es eine Konstante c_1 mit

$$2^n \geq c_1 \cdot 3^n, \text{ also } \frac{2^n}{3^n} \geq c_1$$

Aber: $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, d.h. dieses c_1 kann nicht existieren!

⇒Aussage widerlegt.

Beispiel 3

Satz 3.1: Für jedes $c > 0$ gibt es ein n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $\log_2 n \leq c \cdot n$

Beweisidee: Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0$, d.h. für wachsendes n kommen wir beliebig nah an 0 heran. D.h. wir können n_0 so wählen, dass $\frac{\log_2 n}{n} \leq c$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Beispiel 3

Satz 3.1: Für jedes $c > 0$ gibt es ein n_0, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $\log_2 n \leq c \cdot n$

Satz 3.2: Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt $\log_2^a n \in O(n^b)$.

Beweis: Wählen wir die Konstante $c = 1$. Dann soll gelten:

$$
\begin{aligned}
& & \log_2^a n &\leq n^b \\
&\Leftrightarrow & \log_2 \log_2^a n &\leq \log_2 n^b \\
&\Leftrightarrow & a \cdot \log_2 \log_2 n &\leq b \cdot \log_2 n \\
&\overbrace{\Leftrightarrow}^{m := \log_2 n} & \log_2 m &\leq \frac{b}{a} m
\end{aligned}
$$

Da $a, b \in \mathbb{R}^+$ ist auch $\frac{b}{a} \in \mathbb{R}^+$. Nach Satz 3.1 ist die letzte Ungleichung ab einem n_0 wahr. Da wir Äquivalenzumformungen benutzt haben, können wir die Lösungskette von unten nach oben gehen.