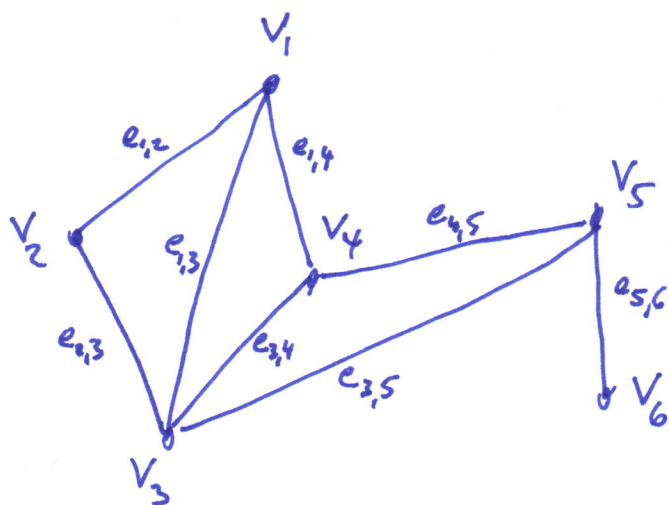


2.2 Formale Graphenbegriffe

①



Knoten: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

Kanten: $e_{1,2}, e_{1,3}, e_{1,4}$
 $e_{2,3}, e_{3,4}, e_{3,5}$
 $e_{4,5}, e_{5,6}$

Bezeichnungen: Knotenmenge V ("vertices")
Kantenmenge E ("edges")

Schreibweise: $G = (V, E)$

Für alle Kanten gilt: e hat zwei Elemente



Mathematisch: $\forall e \in E \subseteq 2^V: |e| = 2$

Unter Umständen auch möglich:



Parallele Kanten



Schleifen

Formal:
DEFINITION 2.1

(1) (i) Ein ungerichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, Ψ) , für das

- (a) V und E endliche Mengen sind
- (b) $\Psi: E \rightarrow \{X \subseteq V \mid 1 \leq |X| \leq 2\}$
↑ ↑
Kardinalität von X

Also: Jede Kante enthält eine oder zwei Knoten!
↖
Schleife

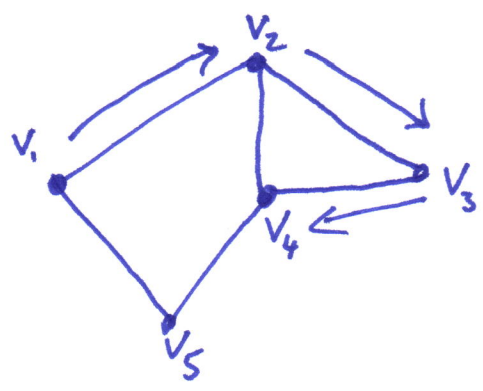
- (ii) V ist die Knotenmenge
- (iii) E ist die Kantenmenge

- (2)
- (i) Zwei ~~Kanten~~^{ere'} sind parallel, wenn $\Psi(e) = \Psi(e')$.
 - (ii) e ist eine Schleife, wenn $|\Psi(e)| = 1$ ist.
 - (iii) Ein Graph ohne parallele Kanten und ohne Schleifen heißt einfach, und man schreibt einfach (!)

$G = (V, E)$; $E(G)$ ist dann die Kantenmenge von G .

- (iv) In einem einfachen Graphen kann man $\{v_i, v_j\}$ für eine Kante $e_{i,j}$ zwischen v_i und v_j schreiben.
- (v) $|E|$ ist die Zahl der Kanten von G .
- (vi) Oft verwendet man die Buchstaben
 n für $|V|$, die Anzahl der Knoten
 m für $|E|$, die Anzahl der Kanten.

Jetzt machen wir uns Gedanken über die Art und Weise, wie man in einem Graphen umherwandern kann!



Laufe von v_1
nach v_2
nach v_3
nach v_4 !

DEFINITION 2.2 (Wege in Graphen)

- (1) (i) Eine Kante $e = \{v, w\}$ in einem einfachen Graphen verbindet v und w , und v und w sind adjazent („benachbart“), v ist Nachbar von w .
- (ii) Außerdem ist v inzident zu e . („zusammentreffend mit“)

- (2) (i) Ein Teilgraph $H = (V(H), E(H))$ eines Graphen $G = (V(G), E(G))$ ist ein Graph mit

$$V(H) \subseteq V(G)$$

$$E(H) \subseteq E(G)$$
 ↗ Teilmengen.

- (ii) H ist aufspannend, wenn $V(H) = V(G)$
(Alle Knoten sind mit dabei!)

(3) (i) Eine Kantenfolge W in G ist eine Folge

$$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, e_k, v_{k+1}$$

mit $k \geq 0$, $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$

(ii) Wiederholt sich keine Kante in einer Kantenfolge, dann spricht man von einem Weg.

(iii) Wiederholt sich kein Knoten, spricht man von einem Pfad.

(iv) Ein geschlossener Weg kehrt am Ende zum Startknoten zurück. (Auch gebräuchlich: Tour)

(v) Ein Kreis ist ein geschlossener Pfad (\rightarrow Rückkehr zum Startknoten)

(vi) Ein Eulerweg [↓] besucht alle Kanten eines Graphen. Eine Eulertour kehrt außerdem zum Start zurück.

(vii) Ein Hamiltonpfad besucht alle Knoten eines Graphen.

(viii) Ein Hamiltonkreis besucht alle Knoten eines Graphen und kehrt zum Startknoten zurück. (Manchmal auch: Tour)

↓
Sir William Hamilton
* 1805 + 1865

(4) Ein Graph ist zusammenhängend, wenn es zwischen je zwei Knoten einen Weg gibt.

(5) Der Grad eines Knotens ist die Anzahl der inzidenten Kanten. (Schreibweise: $\delta(v)$.)