

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. I. Serdyukov, The traveling salesman problem for a maximum in finite-dimensional real spaces, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, 1995, Volume 2, Number 1, 50–56

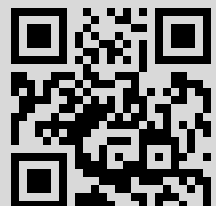
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 95.90.190.99

February 7, 2021, 11:55:00



УДК 519.854

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА НА МАКСИМУМ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ *)

А. И. Сердюков

Данная статья посвящена дальнейшей разработке приближенных алгоритмов и обоснованию оценок качества их работы для определенных классов задачи коммивояжера на максимум. Предлагается полиномиальный алгоритм с любой наперед заданной точностью при достаточно больших n в конечномерных вещественных пространствах с метрикой Минковского. Доказана полиномиальная разрешимость задачи в двумерных полиэдральных пространствах, в которых единичным шаром служит треугольник.

Введем следующие обозначения:

- ◇ Π — выпуклое ограниченное замкнутое множество в \mathbb{R}^k , содержащее 0 внутри;
- ◇ $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$ — функционал Минковского для множества Π , т. е. $f(x) = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid x/\lambda \in \Pi, \lambda > 0 \}$;
- ◇ $\mu(x, y) = f(y - x)$ — расстояние от x до y для упорядоченной пары $(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$;
- ◇ S_n — симметрическая группа подстановок степени n ;
- ◇ $S_n(l) = \{ s \in S_n \mid \text{число цикло в } s \text{ не превышает } l \}, 1 \leq l \leq n$;
- ◇ Y_n — множество всех последовательностей из n различных точек в \mathbb{R}^k ;
- ◇ $M_n = M_n(X_n) = (\mu_{ij})_{n \times n}$ — матрица попарных расстояний между элементами последовательности $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in Y_n$;
- ◇ $\mathcal{M}_n = \{ M_n = M_n(X_n) \mid X_n \in Y_n \}$;
- ◇ $h(\bar{S}_n, M_n) = \max_{s \in \bar{S}_n} \sum_{i=1}^n \mu_{is(i)}, \bar{S}_n \subseteq S_n, M_n \in \mathcal{M}_n$;
- ◇ $\arg h(\bar{S}_n, M_n) = \{ s \in \bar{S}_n \mid h(s, M_n) = h(\bar{S}_n, M_n) \}$, где $\bar{S}_n \subseteq S_n, M_n \in \mathcal{M}_n$.

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-00417).

Под *задачей коммивояжера на максимум* (ЗК) в \mathbb{R}^k понимается задача нахождения подстановки

$$s = s(M_n) \in \arg h(S_n(1), M_n),$$

где $M_n \in \mathcal{M}_n$.

К настоящему времени не известны полиномиальные алгоритмы решения ЗК в \mathbb{R}^k при $k = 2$ даже для простейших множеств Π (круг, квадрат и т. п.). В данной работе рассматривается приближенный подход к решению ЗК в \mathbb{R}^k с обоснованием оценок качества работы (трудоемкость, погрешность) предложенных алгоритмов.

Пусть \mathcal{A} — алгоритм нахождения подстановки $s_{\mathcal{A}}(M_n) \in S_n(1)$, $n \in N$, $M_n \in \mathcal{M}_n$. *Оценкой погрешности* алгоритма \mathcal{A} назовем для каждого n величину

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}(n) = 1 - \inf\{h(s_{\mathcal{A}}(M_n), M_n)/h(S_n(1), M_n) \mid M_n \in \mathcal{M}_n\}.$$

Заметим, что элементы матрицы $M_n \in \mathcal{M}_n$ удовлетворяют неравенству треугольника. Поэтому из [1] следует

Теорема 1. Для ЗК в \mathbb{R}^k существует алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ и оценкой погрешности $\varepsilon(n) \leq 1/4$.

Этот алгоритм предназначен для решения ЗК на более широком классе матриц по сравнению с \mathcal{M}_n и не учитывает специфику данной задачи (связь матрицы M_n с алгебраической структурой пространства \mathbb{R}^k , зависимость матрицы M_n от множества Π).

Рассмотрим некоторые типичные пространства.

Пара (\mathbb{R}^k, μ) называется

— *евклидовым пространством*, если

$$\Pi = \{x = (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k \mid (\sum_{i=1}^k (x^i)^2)^{1/2} \leq 1\};$$

— *пространством Минковского*, если Π — центрально-симметрическое множество относительно 0 (f — норма);

— *полиэдральным пространством*, если Π — многогранник.

1. Евклидовы пространства. Имеет место

Теорема 2 [2]. Для ЗК в \mathbb{R}^k существует алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ и оценкой погрешности

$$\varepsilon(n) \leq C_k/n^{\frac{2}{k+1}},$$

где C_k зависит только от размерности пространства.

2. Пространства Минковского. Справедливы

Теорема 3 [3]. Если $n \rightarrow \infty$, то $\inf\{h(S_n(1), M_n)/h(S_n, M_n) \mid M_n \in \mathcal{M}_n\} \rightarrow 1$.

Теорема 4 [4]. В \mathbb{R}^2 для любого четного n имеет место равенство

$$h(S_n, M_n) = h(T_n, M_n),$$

где $T_n = \{s \in S_n \mid \text{каждый цикл в } s \text{ содержит ровно два элемента}\}$.

Приближенный алгоритм решения ЗК будет предложен в п. 4.

3. Полиэдральные пространства. Здесь развивается подход, предложенный в [3] для приближенного решения ЗК в пространствах Минковского, одновременно являющихся полиэдральными.

Пусть Π содержит ровно m гиперграней $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$. Для любого i , $1 \leq i \leq m$, обозначим через K_i наименьший конус с вершиной в точке 0, содержащий все точки гиперграней Γ_i . Из выпуклости Π и определения f вытекает

Лемма 1. Пусть $\tilde{\pi}$ — гиперплоскость, параллельная некоторой гиперграней Γ_i , $1 \leq i \leq m$. Тогда для любых трех точек $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \tilde{\pi}$, $z \in \tilde{\pi}$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \mu(x, z) &\geq \mu(x, y), \text{ если } (y - x) \in K_i, \\ \mu(z, x) &\geq \mu(y, x), \text{ если } (x - y) \in K_i. \end{aligned}$$

Более того, имеет место

Лемма 2. Для любых четырех точек x, \bar{x}, y, \bar{y} из \mathbb{R}^k таких, что $(\bar{x} - x) \in K_i$, $(\bar{y} - y) \in K_i$ для некоторого i , $1 \leq i \leq m$, имеет место неравенство

$$\mu(x, \bar{x}) + \mu(y, \bar{y}) \leq \mu(x, \bar{y}) + \mu(y, \bar{x}).$$

Доказательство. Без ограничений общности считаем, что точки x, \bar{x}, y, \bar{y} принадлежат конусу K_i и $f(x) \leq f(y)$. Возможны три случая:

Случай 1: $f(x) \leq f(\bar{x}) \leq f(y) \leq f(\bar{y})$.

Случай 2: $f(x) \leq f(y) \leq f(\bar{x}) \leq f(\bar{y})$.

Случай 3: $f(x) \leq f(y) \leq f(\bar{y}) \leq f(\bar{x})$.

В случае 1 через точки \bar{x}, y проведем гиперплоскости, параллельные гиперграней Γ_i . Пусть x_1, y_1 — точки пересечения отрезка $[x, \bar{y}]$ с

построенными гиперплоскостями. Тогда по лемме 1 выполнены неравенства

$$\mu(x, \bar{x}) \leq \mu(x, x_1), \quad \mu(y, \bar{y}) \leq \mu(y_1, \bar{y})$$

или

$$\mu(x, \bar{x}) + \mu(y, \bar{y}) \leq \mu(x, \bar{y}) \leq \mu(x, \bar{y}) + \mu(y, \bar{x}).$$

В случае 1 лемма 2 доказана.

В случаях 2 и 3 проведем через y гиперплоскость, параллельную гиперграни Γ_i . Пусть x_1, y_1 — точки пересечения отрезков $[x, \bar{x}]$, $[x, \bar{y}]$ с этой гиперплоскостью. Тогда по лемме 1

$$\begin{aligned} \mu(x, \bar{x}) + \mu(y, \bar{y}) &= \mu(x, x_1) + \mu(x_1, \bar{x}) + \mu(y, \bar{y}) \\ &\leq \mu(x, y_1) + \mu(y, \bar{x}) + \mu(y_1, \bar{y}) = \mu(x, \bar{y}) + \mu(y, \bar{x}). \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. При любых $n \in N$, $M_n \in \mathcal{M}_n$

$$\arg h(S_n(\lfloor m/2 \rfloor), M_n) \subset \arg h(S_n, M_n).$$

Существует алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$, находящий подстановку из первого множества.

Доказательство. Обозначим через M_n матрицу попарных расстояний для множества точек $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ из \mathbb{R}^k . Известны алгоритмы (см., например, [5]), которые с трудоемкостью $O(n^3)$ находят подстановку $s \in \arg h(S_n, M_n)$. Очевидно, что s не содержит петель, поскольку все точки множества X_n различны.

Пусть $s = (c_1, c_2, \dots, c_t)$ — представление подстановки s в виде циклов c_i , $1 \leq i \leq t$. Попарно перебирая элементы из различных циклов подстановки s , находим элементы $\bar{n} \in c_v$, $\tilde{n} \in c_w$, $v \neq w$, $1 \leq v, w \leq t$, такие, что

$$\mu_{\bar{n}s}(\bar{n}) + \mu_{\tilde{n}s}(\tilde{n}) \leq \mu_{\bar{n}s}(\tilde{n}) + \mu_{\tilde{n}s}(\bar{n}).$$

Построим подстановку $\bar{s} \in \arg h(S_n, M_n) \cap \arg h(S_n(t-1), M_n)$:

$$\bar{s}(i) = \begin{cases} s(i) & \text{при } i \notin \{\bar{n}, \tilde{n}\}, \\ s(\tilde{n}) & \text{при } i = \bar{n}, \\ s(\bar{n}) & \text{при } i = \tilde{n}. \end{cases} \quad (1)$$

Вместо подстановки s возьмем подстановку \bar{s} и повторим вышеописанный процесс.

Пусть $\hat{s} = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_q) \in \arg h(S_n, M_n) \cap \arg h(S_n(q), M_n)$ — тупиковая подстановка, полученная в результате повторения этого процесса. Покажем, что $q \leq \lfloor m/2 \rfloor$. Предположим противное. Заметим, что

для любого цикла из \hat{s} множество точек $\{x_{\hat{s}(j)} - x_j\}$ лежит не менее чем в двух конусах из множества $\{K_1, \dots, K_m\}$. По предположению найдутся два элемента \bar{n} и \tilde{n} из разных циклов подстановки \hat{s} такие, что $x_{\bar{n}}, x_{s(\bar{n})}, x_{\tilde{n}}, x_{s(\tilde{n})}$ удовлетворяют условиям леммы 2. Это противоречит тупиковости подстановки \hat{s} . Заметим, что для построения подстановки \hat{s} затрачивается $O(n^3)$ операций. Подстановка \hat{s} удовлетворяет всем требованиям леммы. Лемма 3 доказана.

В силу леммы 3 справедлива

Теорема 5. В \mathbb{R}^2 при $m = 3$ ЗК разрешима с трудоемкостью $O(n^3)$.

Поскольку для элементов матрицы M_n выполнено неравенство треугольника, имеет место

Лемма 4 [6]. Пусть $s \in S_n(p)$, $p \leq n$. Тогда существует алгоритм с трудоемкостью $O(n \log n)$, находящий подстановку $s_0 \in S_n(1)$ такую, что справедливо неравенство

$$h(s_0, M_n) \geq (1 - 1/n)^{p-1} h(s, M_n).$$

В силу лемм 3, 4 справедлива

Теорема 6. Для ЗК существует алгоритм с использованием $O(n^3)$ операций и оценкой погрешности

$$\varepsilon(n) \leq (\lfloor m/2 \rfloor - 1)/n.$$

4. Приближенный алгоритм для ЗК в \mathbb{R}^k . Пусть $\delta > 0$. По аналогии с [3] (в пространствах Минковского) легко показать, что существует описанный вокруг Π выпуклый многогранник Π_1 с конечным числом гиперграней такой, что $(1 - \delta)f(x) \leq f_1(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^k$, где f_1 — функционал Минковского для множества Π_1 . Пусть Π_1 имеет наименьшее число $m = m(\delta)$ гиперграней среди таких многогранников.

Лемма 5. Существует алгоритм с трудоемкостью $O(n^3)$ для нахождения подстановки $s' \in S_n(m)$ такой, что

$$h(s', M_n) \geq (1 - \delta)h(S_n, M_n).$$

Доказательство. Пусть $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество точек из \mathbb{R}^k , а M_n — матрица его попарных расстояний. При помощи алгоритма решения задачи о назначениях [5] с трудоемкостью $O(n^3)$ находим подстановку $s = (c_1, c_2, \dots, c_t) \in \arg h(S_n, M_n)$.

В каждом цикле c_i выберем некоторый незапрещенный элемент n_i , $1 \leq i \leq t$ (вначале все элементы незапрещенные). Среди $\{n_i\}$ выберем пару $\{\bar{n}, \tilde{n}\}$ такую, что

$$\mu_{\bar{n}s}(\bar{n}) + \mu_{\tilde{n}s}(\tilde{n}) \geq (1 - \delta)(\mu_{\bar{n}s}(\tilde{n}) + \mu_{\tilde{n}s}(\bar{n})).$$

Построим подстановку $\bar{s} \in S_n(t - 1)$ вида (1). Для этой подстановки осуществляем процесс, аналогичный описанному выше, с тем лишь отличием, что элементы \bar{n} и \tilde{n} становятся запрещенными на всех последующих шагах. Этот процесс перестройки текущей подстановки продолжаем, пока возможно.

Пусть $\hat{s} = (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_q)$ — построенная таким образом тупиковая подстановка. Очевидно, $h(\hat{s}, M_n) \geq (1 - \delta)h(S_n, M_n)$, поскольку на каждом шаге проводилась замена пары элементов из $\{\mu_{i s(i)}\}$ новыми элементами матрицы M_n . Покажем, что $q \leq m$. Предположим противное. Тогда среди элементов n_1, \dots, n_q найдутся элементы \bar{n}, \tilde{n} такие, что $(x_{s(\bar{n})} - x_{\bar{n}})$ и $(x_{s(\tilde{n})} - x_{\tilde{n}})$ находятся в одном конусе многогранника Π_1 . По лемме 2

$$\mu_1(x_{\bar{n}}, x_{s(\bar{n})}) + \mu_1(x_{\tilde{n}}, x_{s(\tilde{n})}) \leq \mu_1(x_{\bar{n}}, x_{s(\tilde{n})}) + \mu_1(x_{\tilde{n}}, x_{s(\bar{n})}),$$

где $\mu_1(x, y) = f_1(y - x)$, $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^k$. Следовательно,

$$(1 - \delta)(\mu_{\bar{n}s}(\bar{n}) + \mu_{\tilde{n}s}(\tilde{n})) \leq \mu_{\bar{n}s}(\tilde{n}) + \mu_{\tilde{n}s}(\bar{n}).$$

Это означает, что подстановка \hat{s} не является тупиковой. Трудоемкость описанного алгоритма равна $O(n^3)$. Теперь можно положить $s' = \hat{s}$. Лемма 5 доказана.

Теорема 7. При любом заданном $\delta > 0$ для ЗК существует алгоритм, использующий $O(n^3)$ операций, с оценкой погрешности

$$\varepsilon(n) = \delta + O(1/n).$$

Доказательство. Пользуясь леммами 4 и 5, находим подстановку $s_0 \in S_n(1)$ такую, что

$$\begin{aligned} \inf\{h(s_0, M_n)/h(S_n(1), M_n) | M_n \in \mathcal{M}_n\} \\ \geq \inf\{h(s_0, M_n)/h(S_n, M_n) | M_n \in \mathcal{M}_n\} \\ \geq (1 - 1/n)^{q-1}(1 - \delta) \geq (1 - q/n)(1 - \delta). \end{aligned}$$

Следовательно, $\varepsilon(n) \leq 1 - (1 - q/n)(1 - \delta) = \delta + O(1/n)$. Теорема 7 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Косточка А. В., Сердюков А. И. Полиномиальные алгоритмы с оценками $3/4$ и $5/6$ для задачи коммивояжера на максимум // Управление и оптимизация. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. С. 55–59. (Управляемые системы; Вып. 26).
2. Сердюков А. И. Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Методы целочисленной оптимизации. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1987. С. 79–87. (Управляемые системы; Вып. 27).
3. Сердюков А. И. Асимптотические свойства оптимальных решений экстремальных задач на подстановках в конечномерных нормированных пространствах // Методы дискретного анализа в синтезе реализаций булевых функций. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1991. С. 105–111. (Дискретный анализ; Вып. 51).
4. Сердюков А. И. Экстремальные задачи на подстановках для специальных классов матриц // Целочисленная оптимизация и ее приложения. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. С. 57–60. (Управляемые системы; Вып. 30).
5. Диниц Е. А., Кронрод М. А. Один алгоритм решения задачи о назначении // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189, № 1. С. 23–25.
6. Сердюков А. И. Полиномиальные алгоритмы с оценками точностей решений для одного класса задач коммивояжера на максимум // Комбинаторно-алгебраические методы в дискретной оптимизации. Нижний Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 1991. С. 107–114.

Адрес автора:

РОССИЯ,
630090, Новосибирск,
Университетский пр., 4,
Институт математики СО РАН

Статья поступила

23 декабря 1994 г.