

Übungsblatt 2

Abgabe der Lösungen bis zum 27.11.2024 um 15:00 Uhr in der großen Übung oder in den Hausaufgabenkasten der Algorithmik.

Pflichtaufgabe 1 (Modellieren, Dualisieren, Analysieren): (5 Punkte)

Wir betrachten eine Aufteilung von n Personen auf k Jobs, welche möglichst früh abgeschlossen werden sollen. Dabei kann jede Person einen Anteil an einem Job übernehmen. Zusätzlich gelten folgende Punkte:

- I) Die Summe aller Anteile einer Person über alle Jobs darf maximal den Wert 1 annehmen (Auslastung der Person).
- II) Die Anteile an einem Job über alle Personen muss mindestens den Wert 1 annehmen (Job wird fertiggestellt).
- III) Person i benötigt für Job j insgesamt c_{ij} Minuten pro Anteil.
 - a) Modelliere das Szenario als LP in Standardform.
 - b) Dualisiere dein LP.
 - c) Zeige: In jeder optimalen Lösung des primalen LPs ist die Nebenbedingung bzgl. II) mit Gleichheit erfüllt.

Pflichtaufgabe 2 (Komplementärer Schlupf): (4 Punkte)

Betrachte folgendes LP.

$$\begin{array}{llll} \max & +2x_1 & +3x_2 & \\ \text{s.t.} & +2x_1 & +3x_2 & \leq 30 \\ & -x_1 & -2x_2 & \leq -10 \\ & +x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ & -x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ & x_1 & & \geq 0 \end{array}$$

- a) Dualisiere das LP.

(Hinweis: Eine freie Variable wird zu einer Gleichung im Dualen. Siehe auch VL am 19.11.)

- b) Das primale LP hat die optimale Basislösung $x_1 = 27/5, x_2 = 32/5$. Leite mit Hilfe des komplementären Schlupfs eine optimale Lösung des dualen LPs her (also ohne den Simplex-Algorithmus zu nutzen).

Pflichtaufgabe 3 (Zirkulation):**(1 Punkte)**

Betrachte folgendes LP.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \\ & x_j \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Zeige: Entweder ist $x_j = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ eine optimale Lösung, oder das LP ist unbeschränkt.