Übungsblatt 3

Abgabe der Lösungen bis zum 11.12.2024 um 15:00 Uhr in der großen Übung oder in den Hausaufgabenkasten der Algorithmik.

Pflichtaufgabe 1 (Dualer Simplex-Algorithmus): **(1+1 Punkte)**
Betrachte folgendes Dictionary.

$$\begin{array}{|rrrrr|}\hline \zeta = & 0 & -1x_1 & -2x_2 & -1x_3 \\ w_1 = & -1 & +1x_1 & -2x_2 & +2x_3 \\ w_2 = & -2 & +2x_1 & +1x_2 & +3x_3 \\ \hline \end{array}$$

a) Führe eine Iteration des dualen Simplex-Algorithmus durch, ohne das duale Dictionary zu benutzen.

   Kommen mehrere Basisvariablen als Pivot in Frage, wähle diejenige mit der kleinsten Konstante.

b) Schreibe das duale Dictionary zu dem in a) erhaltenen primalen Dictionary auf.

Pflichtaufgabe 2 (Fractional Knapsack): **(2+1+1+3+1 Punkte)**
Gegeben seien eine Kapazität W, sowie n Ressourcen mit jeweils Gewicht $w_i \geq 0$ und Wert $v_i \geq 0$. Gesucht sind Werte $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$, sodass

- $\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W$, und
- $\sum_{i=1}^n v_i x_i$ maximal.

a) Schreibe das primale und duale LP zu obigen Problem auf.

b) Gib eine optimale Lösung für das duale LP an, wenn $\sum_{i=1}^n w_i \leq W$ gilt. Begründe die Optimalität!

c) Zeige: Ist $\sum_{i=1}^n w_i \geq W$, gilt in einer optimalen Lösung x^* immer $\sum_{i=1}^n w_i x_i^* = W$.

d) Angenommen, die n Objekte sind absteigend nach $\frac{v_i}{w_i}$ sortiert, d.h. $\frac{v_1}{w_1} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{w_n}$.

   Zeige mit Hilfe von Dualität und des komplementären Schlupfes: Eine optimale Lösung des Problems ist in der Form $(1, \ldots, 1, x_j, 0, \ldots, 0)$, d.h. es existiert ein $1 \leq j \leq n$ sodass

   - $x_i = 1$ für alle $i < j$,
   - $0 \leq x_j < 1$ und
   - $x_i = 0$ für alle $i > j$.

e) Gib mit Hilfe von d) einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der das fractional Knapsack Problem optimal löst.