

Übungsblatt 4

Abgabe der Lösungen bis zum 08.01.2025 um 15:00 Uhr in der großen Übung oder in den Hausaufgabenkasten der Algorithmik.

Pflichtaufgabe 1 (Allgemeine LPs):

(1+2+1 Punkte)

Betrachte folgendes LP.

$$\begin{array}{rllll}
 \max & & 1x_1 & -2x_2 & +3x_3 \\
 \text{s.t.} & -3 \leq & +1x_1 & -2x_2 & +2x_3 \leq 6 \\
 & & +2x_1 & +1x_2 & +3x_3 \leq 5 \\
 & -1 \leq & x_1 & & \\
 & -1 \leq & & x_2 & \leq 5 \\
 & 0 \leq & & & x_3 \leq 2
 \end{array}$$

- Bestimme das initiale Dictionary in allgemeiner Form und begründe, ob das Dictionary primal feasible ist.
- Führe den Simplex-Algorithmus mit der Pivotregel „größter Koeffizient“ auf diesem allgemeinen Dictionary aus, um eine optimale Lösung zu bestimmen.

Kommen in einem Schritt des Simplexalgorithmus mehrere (Nicht-)Basisvariablen in Frage, wähle die Variable mit dem kleinsten Index.

- Ist das zuletzt erhaltene Dictionary degeneriert? Begründe deine Antwort.

Pflichtaufgabe 2 (Gomory Cut):

(1+3 Punkte)

Betrachte folgendes IP.

$$\begin{array}{rll}
 \max & 3x_1 & +2x_2 \\
 \text{s.t.} & 3x_1 & -1x_2 \leq 6 \\
 & -2x_1 & +3x_2 \leq 2 \\
 & x_1 & +x_2 \leq 3 \\
 & x_1, & x_2 \in \mathbb{N}_{\geq 0}
 \end{array}$$

- Skizziere den Lösungsraum des relaxierten LPs in einem Koordinatensystem und gib alle zulässigen Lösungen des IPs an.
- Gib ein optimales Dictionary der Relaxierung an und füge sowohl bzgl. x_1 als auch bzgl. x_2 einen Gomory-Cut in das Dictionary ein. Wie lauten dazugehörige Constraints, die der Relaxierung hinzugefügt wurden? Was fällt dabei auf?

Pflichtaufgabe 3 (Independent Set):

(1+1 Punkte)

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Gesucht ist eine größtmögliche Menge $I \subseteq V$, sodass keine zwei Knoten in I existieren, die in G benachbart sind, d.h. für alle $v_i, v_j \in I$ gilt $v_i, v_j \notin E$.

- a) Modelliere das Problem als IP.
- b) Modelliere das zum IP gehörige duale Problem und beschreibe, welches Graphenproblem hinter dem dualen Problem steckt.