Crash Course LinAlg

Vektorraum

- Skalar:
  - aus $\mathbb{R}$
  - $+, -, \cdot, \%$
- Vektoren
  - aus $\mathbb{R}^n$, n-dimensional
  - $+, -$
  - Können mit Skalar/Koeffizienten mult. werden
  - Distributiv, d.h. $c(u+v) = cu + cv$
    $(c+d)v = cv + dv$
- Unterraum
  - unter Addition und Skalierung abgeschlossene Teilmengen eines Vektorraumes

Spann

- Eine Menge M von Vektoren spannt einen Vektorraum $\langle M \rangle$ auf
- $\langle M \rangle$: Alle Vektoren, die durch Skalieren/Multiplizieren aus M erzeugen lassen

$\rightarrow$ Linearkombination!

$c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3 + \ldots \qquad m_i \in M, \; c_i \in \mathbb{R}$

Gilt $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$ und $c_i \geq 0$

$\Rightarrow$ konvex Kombination!

Lineare Unabh.

Menge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ von Vektoren heißt linear unabhängig, genau dann wenn sie keine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors zulässt also

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$

Bsp:

$$\underset{a}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \underset{b}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{c}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

linear unabhängig?

Nein! $+5c + 2b + a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Basis

Eine Menge B von Vektoren heißt Basis eines Vektorraumes V, wenn $\langle B \rangle = V$ und B lin. unabh. ist.
Alle Basen enthalten dieselbe Zahl $\dim(V)$ von Vektoren.

Basisergänzung

Jede linear unabh. Menge B von Vektoren aus V kann zu einer Basis von V erweitert werden, indem solange lin. unabh. Vektoren hinzugefügt werden bis $\langle B \rangle = V$ gilt.

Matrix

Seien $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von einer Matrix A,
Dann ist

$$Ax = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$

$\Rightarrow Ax \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, der Spaltenraum von A.

Der Rang von A $rg(A) = \dim(\langle a_1, \dots, a_n \rangle)$, die Anzahl ~~lin~~ lin. unabh. Spalten von A.

BT 1

~~Literatur~~

- Online Solver

- Max Flow Problem

$$\max \sum_{e \in \delta^+(s)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(s)} f_e$$
$$\text{s.t.} \quad f_e \leq u_e$$
$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\}$$

- Ressource Allocation Problem

Gegeben:
- Werte $b_1, \dots, b_m$ (Ressourcen)
- Werte $a_{i,j}$ (Produkt j benötigt $a_{i,j}$ Einheiten von Ressource i), $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$
- Wert $c_1, \dots, c_n$ (Verkaufspreis von Produkten)

Gesucht: Werte $x_1, \dots, x_n \geq 0$, sodass $c^T x$ maximal.

Als LP:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$
$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Was passiert, wenn Ressourcen etwas kosten?

$d_i \hat{=}$ Kosten pro Einheit der Res. b_i

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} d_i b_i$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j - b_i \leq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

$$b_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m$$

In Dictionary Form:

$$\zeta = 0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n - d_1 b_1 - \dots - d_m b_m$$

$$w_1 = 0 - a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n} x_n - b_1$$

$$w_2 = 0 - a_{2,1} x_1 + \dots + a_{2,n} x_n - \qquad b_2$$

$$\vdots$$

$$w_m = 0 - a_{m,1} x_1 + \dots + a_{m,n} x_n - \qquad b_m$$

Egal welche Variable x_j wir in die Basis aufnehmen, die Zielfunktion verändert sich nicht.

Klar: zunächst sind alle $b_i = 0$, aber wir dürfen sie nicht einfach erhöhen, denn das kostet!