Übung 2

- Dualität
- kompl. Schlupf

Betrachte folgendes LP:

$$\max\ 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 4x_4$$

s.t.

$$\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 &\leq 10 \qquad f_1(x) \leq 10\\
3x_1 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 15 \qquad f_2(x) \leq 15\\
2x_3 + 3x_4 &\leq 12 \qquad f_3(x) \leq 12\\
1x_1 + 1x_2 &\leq 18 \qquad f_4(x) \leq 18\\
2x_1 + 1x_3 &\leq 8 \qquad f_5(x) \leq 8\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Dualisiere das Problem:

$$\min\ 10y_1 + 15y_2 + 12y_3 + 18y_4 + 8y_5$$

s.t.

$$\begin{aligned}
g_1(y) \geq 3 \qquad 1y_1 + 3y_2 + 1y_4 + 2y_5 &\geq 3\\
g_2(y) \geq 2 \qquad 2y_1 + 1y_4 &\geq 2\\
g_3(y) \geq 1 \qquad 1y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 1y_5 &\geq 1\\
g_4(y) \geq 4 \qquad 1y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\geq 4
\end{aligned}$$

A) Zeige oder widerlege: $(1, \frac{3}{2}, 6, 0) = x^*$ ist eine optimale Lsg.
(Mit Hilfe des kompl. Schl.)

B) — " —: $(\frac{7}{3}, \frac{11}{6}, 0, 4) = x^*$ — " —

A) Suche x^*.

~~Da f~~

Es gilt:

$$\left.\begin{aligned}
f_1(x^*) &= 10 && \Rightarrow y_1^* \geq 0 \\
f_2(x^*) &= 15 && \Rightarrow y_2^* \geq 0 \\
f_3(x^*) &= 12 && \Rightarrow y_3^* \geq 0 \\
f_4(x^*) &= \tfrac{5}{2} < 18 && \Rightarrow y_4^* = 0 \quad ! \\
f_5(x^*) &= 8 && \Rightarrow y_5^* \geq 0
\end{aligned}\right\} \; x^* \text{ ist zulässig!}$$

Außerdem:

$x_1^* > 0 \Rightarrow g_1(y^*) = 3$

$x_2^* > 0 \Rightarrow g_2(y^*) = 2$

$x_3^* > 0 \Rightarrow g_3(y^*) = 1$

Also

$$\begin{aligned}
y_1^* + 3y_2^* + 2y_5^* &= 3 \\
2y_1^* &= 2 \quad \Rightarrow y_1^* = 1 \; \begin{cases} 3y_2^* + 2y_5^* = 2 \\ 2y_2^* + 2y_3^* + y_5^* = 0 \\ \Rightarrow y_2^* + y_3^* + y_5^* = 0 \end{cases} \\
1y_1^* + 2y_2^* + 2y_3^* + 1y_5^* &= 1
\end{aligned}$$

Dann ist

$g_4(y^*) = g_4((1,0,0,0,0)) = 1 \not\geq 4$

Damit ist $x^* = (1,0,0,0,0)$ keine gültige Lösung.

$\Rightarrow x^*$ war nicht optimal.

B) Suche y^*

Es gilt

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x^*) = 10 \\ f_2(x^*) = 15 \\ f_3(x^*) = 12 \\ f_4(x^*) = \frac{25}{6} < 18 \Rightarrow y_4^* = 0 \\ f_5(x^*) = \frac{14}{3} < 8 \Rightarrow y_5^* = 0 \end{array}\right\} x^* \text{ ist zulässig!}$$

Da $x_1^*, x_2^*, x_4^* > 0 \Rightarrow g_1(y^*) = 3,\ g_2(y^*) = 2,\ g_4(y^*) = 4$

Also:

$$\begin{array}{ll} y_1^* + 3y_2^* & = 3 \\ 2y_1^* & = 2 \Rightarrow y_1^* = 1 \\ y_1^* + 2y_2^* + 3y_3^* & = 4 \end{array} \quad y_2^* = \frac{2}{3} \quad y_3^* = \frac{4 - 1 - \frac{4}{3}}{3} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow g_3(y^*) = 1 + \frac{4}{3} + \frac{10}{9} = \frac{12}{3} = 4 \geq 1$$

$\Rightarrow y^*$ ist zulässig, hat Wert $\frac{80}{3}$

x^* ist zulässig, hat Wert $\frac{80}{3}$

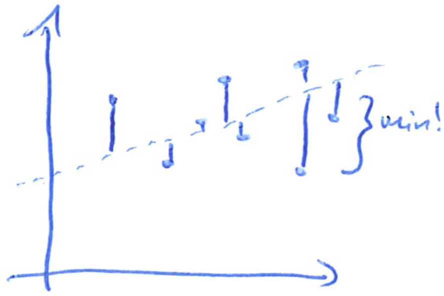
x^* ist optimal.

Betrachte folgendes Problem

Gegeben: n Punkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$

Gesucht: Gerade $y = mx + b$, sodass

$$\max_{i=1,\dots,n} \left(|(mx_i + b) - y_i| \right) \text{ minimal}$$



Wie kann man dieses Problem lösen über LPs?

und wie sieht das duale LP dazu aus.

Was bedeutet das, und kann man Eigenschaften optimaler Lsg. erkennen?

~~Primal~~

Zunächst: Wie stelle ich $\min\limits_{m,b} \max\limits_{i} (f_i(m,b))$ dar?

$\hookrightarrow$ $\min D$

s.t. $D \geq f_i(m,b) \quad \forall i = 1, \dots, n$

Nun ist $f_i(m,b) = |mx_i + b - y_i|$. wie muss das modelliert werden?

Wenn $mx_i + b - y_i$ positiv ist, dann passt das bereits.

wenn $mx_i + b - y_i$ negativ ist, dann ist $y_i - mx_i - b$ positiv!

$\Rightarrow$ $D \geq m \cdot x_i + b - y_i$ bzw $D - m \cdot x_i - b \geq -y_i$

$D \geq y_i - m \cdot x_i - b$ $\qquad D + m \cdot x_i + b \geq y_i$

Damit ist das gesamt LP:

$\min D$

s.t. $D - mx_i - b \geq -y_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

$D + mx_i + b \geq y_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

$D \geq 0$

m, b free $\Longrightarrow$ m und b dürfen auch negativ sein!

Was müssen wir tun, um dieses LP zu dualisieren?

1) Wir haben ein Minimierungsproblem
2) Wir haben freie Variablen (m und b)
3) Zuerst in Standartform bringen erzeugt ggf viel Arbeit...

Begründe:
Ist im primalen ein Variable frei, wird im dualen LP eine Gleichung erzeugt.

Ansonsten geht alles mit gleichem Prinzip

$$\begin{array}{ll} \min c^T x & \\ \text{s.t. } Ax \geq b & \\ \quad x \geq 0 & \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max b^T y & \\ \text{s.t. } A^T y \leq c & \\ \quad y \geq 0 & \end{array}$$

Also ist das duale LP:

$$\max \sum_{i=1}^{n} y_i u_i - \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i) = 0 \qquad // b$$

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i) x_i = 0 \qquad // m$$

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) \leq 1 \qquad // D$$

$$u_i, v_i \geq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

Wie sehen Lösungen zum primalen & dualen LP aus?

1. Wenn $D = 0$ optimal, dann ist

$u_i = v_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$

2. Wenn $D > 0$:

a) dann ist $\forall i = 1, \dots, n$ entweder

$D > m \cdot x_i + b - y_i$ oder $D > \cancel{} \; y_i - m \cdot x_i - b$

$\Rightarrow u_i$ oder $v_i = 0$

b) dann existieren u_j oder $v_j > 0$

$\Rightarrow D = m \cdot x_i + b - y_i$ oder $D = y_i - m \cdot x_i - b$

Das zeigt also an, welche Punkte der limitierende Faktor sind!

c) dann ist $\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i) y_i > 0$

$\Rightarrow \exists j$ mit $u_j > 0$ ~~oder v_j~~ wegen a)

mit $\sum_{i=1}^{n} u_i - v_i = 0$ folgt $\exists k^{\neq j}$ mit $v_k > 0$

$\Rightarrow$ Zusammen mit b): Es gibt mind. zwei Punkte die Abstand D zur Linie haben!