Übung 4

1

- Simplex auf allg. LPs
- Recap

Betrachte folgendes LP.

$$\max\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{array}{rl} x_2 + x_4 & \le 6 \\ -2 \le 2x_1 - x_2 - x_3 & \le 4 \\ 2x_1 - x_4 & \le 2 \\ 0 \le x_1 & \le 3 \\ -1 \le x_2 & \le 4 \\ 0 \le x_3 & \le 2 \\ 0 \le x_4 & \le 4 \end{array}$$

Schreibe das initiale, allgemeine Dictionary dazu auf.

ℓ / u		$\boxed{0}$ 3	$\boxed{-1}$ 4	$\boxed{0}$ 2	$\boxed{0}$ 4	
	$\zeta =$	$3x_1$	$-2x_2$	$+x_3$	$-2x_4$	$= 2$
$-\infty$ 6	$w_1 =$		x_2		$+x_4$	$= -1$
-2 4	$w_2 =$	$2x_1$	$-x_2$	$-x_3$		$= 1$
$-\infty$ 2	$w_3 =$	$2x_1$			$-x_4$	$= 0$

Über welche Variable pivotisieren? Welche Variablen kommen überhaupt in Frage?

Eine Variable verbessert ZFW, wenn

(a) Variable an unterer Schranke + positiv in ZF

(b) Variable an oberer Schranke + negativ in ZF

Hier also nur x_1 und x_3. Wir wählen x_1 und tauschen mit w_3, denn

(1) $x_1 \leq 3$

(2) $w_2 \to 4 \Rightarrow x_1 \leq \frac{3}{2}$

(3) $w_3 \to 2 \Rightarrow x_1 \leq 1$

Dictionary nach Tausch:

l	u						
			$-\infty$	$\boxed{-1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	
			$\boxed{2}$	4	2	4	
		$z =$	$\frac{3}{2}w_3$	$-2x_2$	$+3x_3$	$-\frac{1}{2}x_4$	$= 3$
$-\infty$	6	$w_1 =$		x_2		$+x_4$	$= -1$
-2	4	$w_2 =$	w_3	$-x_2$	$-x_3$	$+x_4$	$= 3$
0	3	$x_1 =$	$\frac{1}{2}w_3$			$+\frac{1}{2}x_4$	$= 1$

Nun kann nur über x_3 pivotisiert werden.

(1) $x_3 \leq 2$

(2) $w_2 \to -2 \Rightarrow x_3 \leq 5$

Es findet also kein Tausch statt! x_3 erreicht einfach seine obere Schranke.

l			$-\infty$	$\boxed{-1}$	0	$\boxed{0}$	
	u		$\boxed{2}$	4	$\boxed{2}$	4	
		$\xi =$	$\frac{3}{2} w_3$	$- 2x_2$	$+ 3x_3$	$- \frac{1}{2} x_4$	$= 9$
$-\infty$	6	$w_1 =$		x_2		$+ x_4$	$= -1$
-2	4	$w_2 =$	w_3	$- x_2$	$- x_3$	$+ x_4$	$= 1$
0	3	$x_1 =$	$\frac{1}{2} w_3$			$+ \frac{1}{2} x_4$	$= 1$

Lösung des LPs ist also

$$(1, -1, 2, 0) =: (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$$

Recap

LP in Standardform

$$\max c^T x$$
$$\text{s.t. } Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

Jedes LP kann in Standardform transformiert werden.

In Dictionaryform

$$\zeta = \bar{\zeta} + \bar{c}^T x$$
$$w = \bar{b} - \bar{A} x$$

Zu Beginn

$\bar{b} := b, \quad \bar{c} = c$

$\bar{\zeta} = 0, \quad \bar{A} = A$

Simplex:

Tausche iterativ eine Variable in die Basis, welche den ZFW verbessert.

Überblick behalten!

- Wann ist primales Dictionary
  - infeasible?
  - degeneriert?
- Woran erkennt man, dass das LP
  - unbeschränkt ist?
  - infeasible ist? $\longrightarrow$ Phase I!

Dualität:

Idee: Bestimme über Ungleichungen eine obere Schranke für das LP.

$\Rightarrow$ Ein neues LP mit einer min-ZF.

Generell

$$\begin{array}{lll} \max & c^T x & \\ \text{s.t.} & Ax \leq b & \Longleftrightarrow \\ & x \geq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Wie sieht das duale LP aus, wenn das primale LP nicht in Standardform ist?

Wichtige Sätze

1. Starke Dualität $c^T x^* = b^T y^*$
   für opt. Lösungen x^* für das primale und
   y^* für das duale LP.

2. kompl. Schlupf: Bei opt. Lsg:
   Produkt aus primaler Variable und dualem Schlupf ist 0.
   Produkt aus dualer Variable und primalem Schlupf ist 0.

$\Rightarrow$ Nutze kompl. Schlupf, um Optimalität zu zeigen.

$\Rightarrow$ Nutze kompl. Schlupf, um Eigenschaften opt. Lösungen herzuleiten.

(initiales)
Duales Dictionary

$$-\xi = -\bar{\xi} - \bar{b}^T y$$
$$z = -\bar{c} - \bar{A}^T y$$

Eigenschaft:
Dictionary ist negativ transponiert zum primalen Dict!

$\Rightarrow$ Führe Simplex auf dualem LP aus.
Dafür reicht uns die Kenntnis des primalen Dictionaries!

Phase I - Möglichkeiten
- Hilfsproblem mit x_0
- Ändere Zielfunktion des primalen (wähle $c' \leq 0$) oder des dualen (wähle $b' \geq 0$)

↳ Ändern der ZF ändert die Menge der gültigen Lösungen nicht!

Allgemeine LPs
↳ benutzt untere und obere Schranken für Constraints und Variablen gleichzeitig
↳ wie sehen hier degenerierte Basislösungen aus?

Pivotisierregeln!
↳ Zykeln verhindern (notfalls auch per Perturbation)
↳ Steepest Edge
↳ Größter Koeffizient
↳ ...
↳ Partial Pricing: Betrachte nur eine Auswahl von Variablen für ein paar Iterationen.