~~Aufgabe~~

Bin Packing

Gegeben: $B \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{N}$ mit $v_i \leq B$

Gesucht: $k \in \mathbb{N}$, sodass eine Zuweisung der n Objekte auf k Container mit Kapazität B existiert, und k minimal.

Also:

$$\forall \text{Container } b : \sum_{i \in b} v_i \leq B$$

Modelliere dieses Problem als IP.

Zunächst: Man benötigt maximal n Container.

Welche Zustände existieren?

1. Objekt i wird in Container b gepackt (oder nicht)
2. Container b wird benutzt (oder nicht)

Als Variablen: $x_{i,b}$ bzw x_b

$\Rightarrow$ Zielfunktion: $\sum_{b=1}^{n} x_b$

Nebenbedingungen?

1. Jedes Item muss gepackt werden. Aber nur 1x in einen einzigen Container! $\rightarrow \sum_{b=1}^{n} x_{i,b} = 1 \quad \forall i \in [n]$ $\{1,\dots,n\}$!!
2. Container Kapazität muss eingehalten werden! $\rightarrow \sum_{i=1}^{n} v_i x_{i,b} \leq B \cdot x_b, \ \forall b \in [n]$
3. Wie oft darf ein Objekt oder Container benutzt werden? $\rightarrow x_{i,b}, x_b \in \{0, 1\}$

Für Dualisieren benötigen wir die Relaxierung!

$$\min \sum_{b=1}^{n} x_b$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{b=1}^{n} x_{i,b} = 1 \qquad \forall i \in [n]$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_{i,b} \leq B \cdot x_b \qquad \forall b \in [n] \qquad \rightarrow B x_b - \sum_{i=1}^{n} v_i x_{i,b} \geq 0$$

$$x_b \leq 1 \qquad \forall b \in [n] \qquad \text{wichtig!} \quad \rightarrow -x_b \geq -1$$

$$\cancel{x_{i,b} \leq 1 \qquad \forall i \in [n], b \in [n]} \qquad \text{implizit!}$$

$$x_b, x_{i,b} \geq 0 \qquad \forall i \in [n], b \in [n]$$

Dualisieren:
- Jeder Constraint wird eine Variable
- Jede Variable wird ein Constraint.

$$\max \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot y_i + \sum_{b=1}^{n} 0 \cdot y_{b,1} + \sum -1 \cdot y_{b,2}$$

s.t.

$$1 \cdot y_i - v_i \cdot y_{b,1} \leq 0 \qquad \forall (i,b) \in [n]^2$$

$$B \cdot y_{b,1} - y_{b,2} \leq 1 \qquad \forall b \in [n]$$

$$y_i \text{ frei}, \; y_{b,1} \geq 0, \; y_{b,2} \geq 0 \qquad \forall i \in [n], b \in [n]$$

Cutting Planes aus Constraints

$$\max \quad 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$\begin{array}{llllr}
\text{s.t.} & x_1 + 2x_2 - x_3 & & \leq 10 & (1) \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_3 & & \leq 8 & (2) \\
& x_1 \quad\quad + x_3 & & \leq 1 & (3) \\
& \quad 2x_2 + 3x_3 & & \leq 7 & (4) \\
& x_1 + \quad\quad x_3 - 2x_4 & & \leq -3 & (5)
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}_0$$

$$(4) \Rightarrow x_2 \leq 3 \qquad (6)$$

$$\frac{(4)+(5)}{3}: \quad x_2 + x_3 \leq \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow x_2 + x_3 \leq 3 \qquad (7)$$

$$\frac{(2)+(3)}{2}: \quad 2x_1 + x_2 + x_3 \leq \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \qquad (8)$$

$$\frac{(7)+(8)}{2}: \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \qquad (9)$$

Liefert Lsg $(1,2,0,2)$ mit Wert 8

Gomory-Cuts

$$\max \; 3x_1 + 2x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$$

$\Big\downarrow$ Simplex

$$\zeta = \frac{45}{2} - \frac{1}{2}w_2 - \frac{3}{2}w_1$$

$$x_2 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}w_2 - \frac{3}{2}w_1$$

$$x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_1$$

Gomory-Cut bzgl. x_1:

$$x_1 + \frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}w_1 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 - w_1 \leq 4$$

Als Constraint für das LP:

$$x_1 - (9 - x_1 - x_2) \leq 4 \iff 2x_1 + x_2 \leq 13$$

Als Zeile für das Dictionary:

$$w_3 = 4 - \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_1\right) + w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}w_1$$

Neues Dictionary

$$\zeta = \frac{45}{2} - \frac{1}{2} w_2 - \frac{3}{2} w_1$$

$$x_2 = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} w_2 - \frac{3}{2} w_1$$

$$x_1 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} w_2 + \frac{1}{2} w_1$$

$$w_3 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} + \underline{\underline{\frac{1}{2} w_2}} + \frac{1}{2} w_1$$

$\Big\downarrow$ Dual simplex

$$\zeta = 22 - 1 w_3 - 1 w_1$$

$$x_2 = 5 + 1 w_3 - 1 w_1$$

$$x_1 = 4 - 1 w_3 + w_1$$

$$w_2 = 1 + 2 w_3 - w_1$$

Diese Lösung ist ganzzahlig!

Frage: Gibt es andere Basislösungen mit gleichem Wert, die nicht ganzzahlig sind?