Technische Universität Braunschweig

Mathematische Methoden der Algorithmik – Vorlesung #00

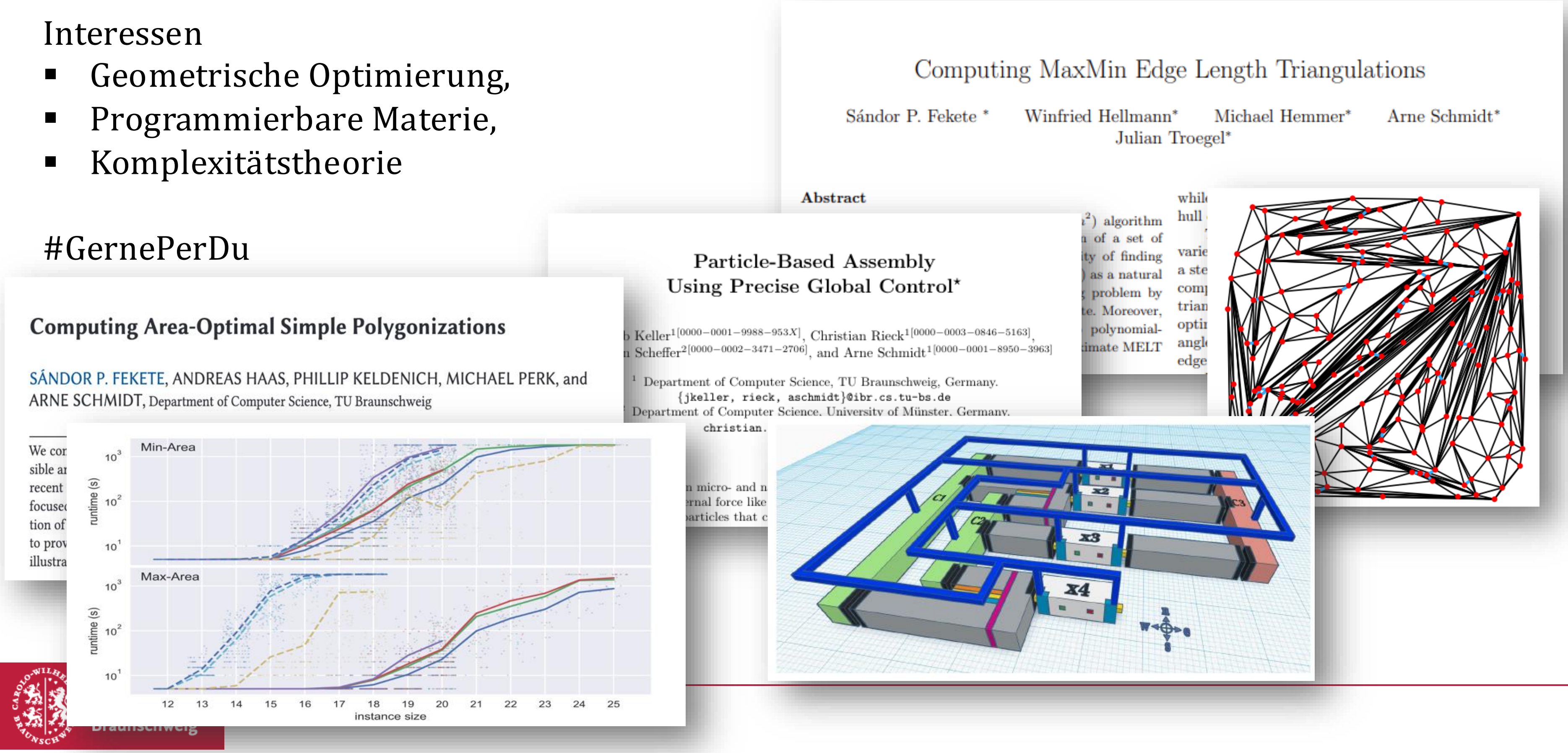
Arne Schmidt

Vorstellung

Interessen

- Geometrische Optimierung,
- Programmierbare Materie,
- Komplexitätstheorie

#GernePerDu



Organisation

Vorlesung

+

Gr. Übung

- Grundlagen

- Vertiefungen
- Exkurse
- Beispiele

Arne Schmidt

Kl. Übung

- Hausaufgaben

Kevin Meier

Fragen

Inhaltlich oder allgemeiner Ablauf	Vorlesung / große Übung
Zu Übungsblättern oder Korrektur	Kleine Übungen / Tutoren
Individuelle Fragen	**Immer per Mail** an aschmidt@ibr.cs.tu-bs.de (Nicht über StudIP)
Sprechstunde	Montags, 09:45 Uhr im Raum IZ 333 (Am besten vorher per Mail ankündigen)

Semesterplan (vorläufig)

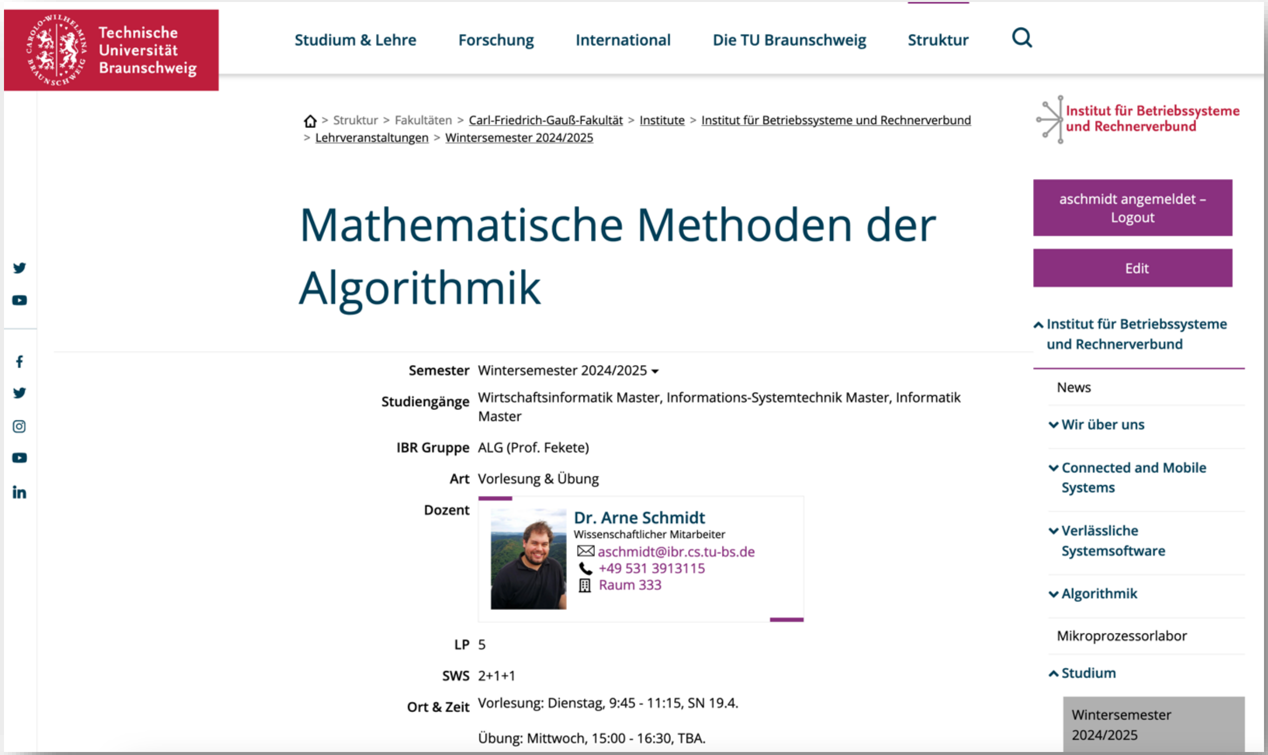
Datum (VL / Ü)	VL	VL / Ü Inhalt	Hausaufgabe (Ausgabe, Mi.)	Hausaufgabe (Abgabe, Mi. 15 Uhr)	Gr. Ü / Kl. Ü.
15.10.	-				
22.10	0	Orga + Einleitung			
29.10.	1	Simplex	HA1		G
05.11.	2	Fundamentalsatz			
12.11.	3	Dualität I	HA2	HA1	G
19.11	4	Dualität II			K
26.11.	5	Matrix Notation	HA3	HA2	G
03.12.	6	Implementationen			K
10.12.	7	Allgemeine LPs	HA4	HA3	G
17.12.	8	Integer Programming			K
24.12.	-				
31.12.	-				
07.01.	9	Graphenprobleme	HA5	HA4	G
14.01.	10	Matching Polytop			K
21.01.	11	Geometrische Probleme		HA5	G
28.01.	12	Zusammenfassung			K

Unterlagen

- Öffentlich zugänglich

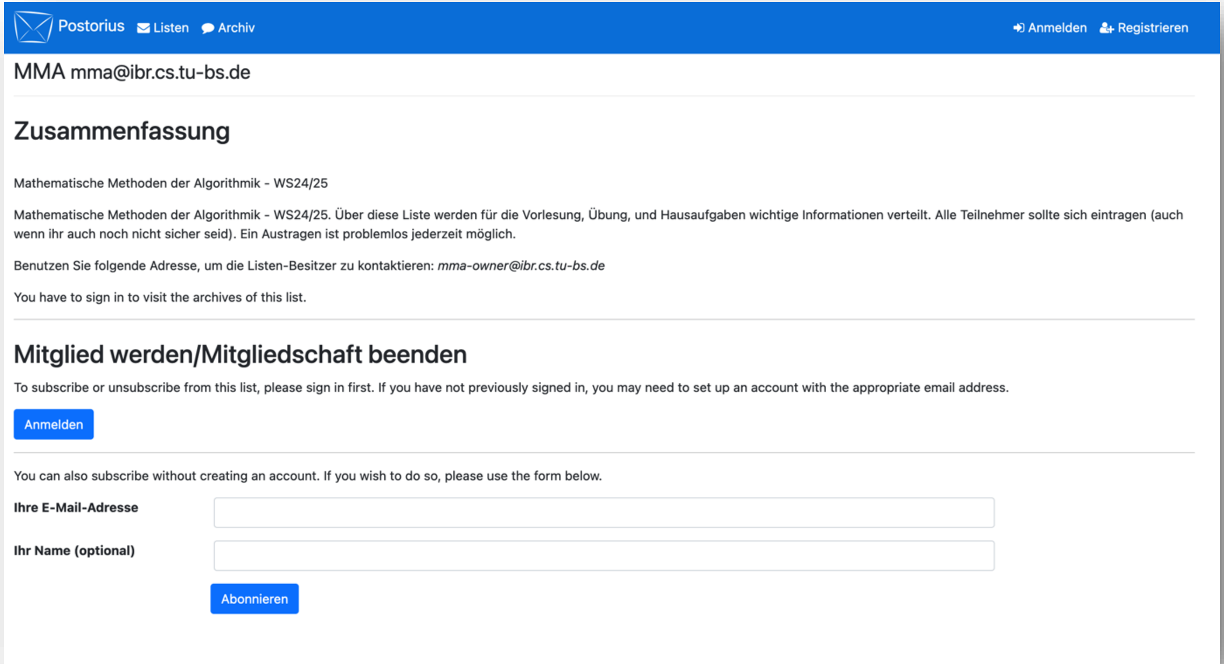
- Wird enthalten:
  - Slides (VL / UE)
  - Hausaufgaben

https://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ws2425/mma/index.html



Mailingliste

https://lists.ibr.cs.tu-bs.de/postorius/lists/mma.ibr.cs.tu-bs.de/



Hausaufgaben

Hausaufgaben

Insgesamt 5 Hausaufgabenblätter. Insgesamt 50 Punkte erreichbar. Blätter 1 bis 5 geben je 10 Punkte.

Studienleistung ist bestanden, wenn 50% aller Punkte erreicht wurden (also **25 Punkte**).

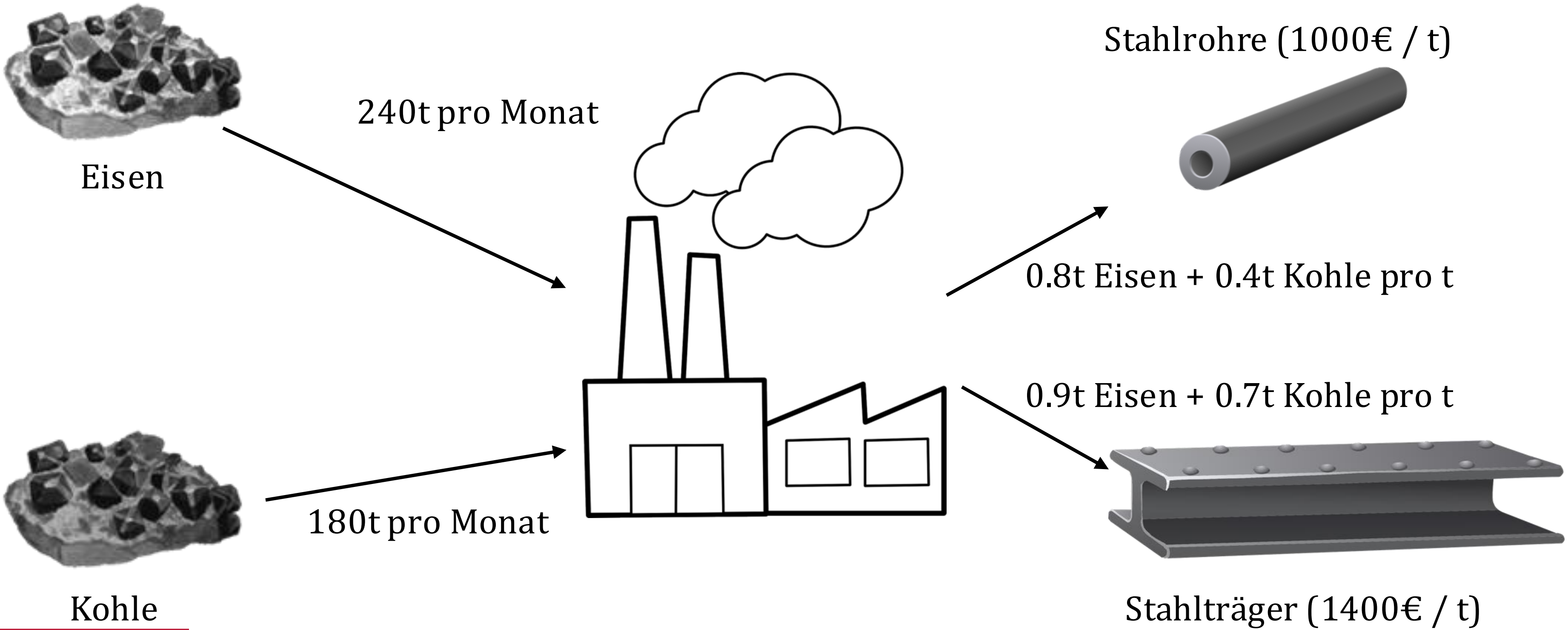
Hausaufgaben bestehen hauptsächlich aus Theorieaufgaben und müssen in Papierform abgegeben werden.

Prüfungsform?

Fragen?

Kapitel 1 – Lineare Programme

Fabrik – Bestmöglicher Profit?



Etwas mathematischer

Maximiere: 1000 * Rohre + 1400 * Träger **Profit**

0.8 * Rohre + 0.9 * Träger ≤ 240 **Eisenlimit**

0.4 * Rohre + 0.7 * Träger ≤ 180 **Kohlelimit**

Reicht das zur Beschreibung?

Rohre ≥ 0
Träger ≥ 0

Eine Lösung:
Rohre = 0
Träger = 257,14285…
Umsatz = 360000

Andere Lösung:
Rohre = 30
Tröger = 240
Umsatz = 366000

Geht das besser?

Etwas anders

Maximiere $\boxed{(1000, 1400)} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} Rohre \\ Träger \end{pmatrix}}$ **Profit**

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}} \boxed{\begin{pmatrix} Rohre \\ Träger \end{pmatrix}} \le \boxed{\begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}}$$

Eisenlimit
Kohlelimit

$$\begin{pmatrix} Rohre \\ Träger \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allgemein

Maximiere $c^T x$

Unter Bedingungen

$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

Definition

Maximiere $c^T x$

Unter Bedingungen

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Ein lineares Programm (LP) besteht aus einer linearen Zielfunktion (**objective function**) $\zeta = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = c^Tx$, welche maximiert oder minimiert werden soll.

Dabei ist:

- c der **Kostenvektor**
- x ein **Variablenvektor** (Entscheidungsvariablen)

Zusätzlich besitzt ein LP m Nebenbedingungen (Constraints) in der Form

$$Ax \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b$$

Dabei ist

- A eine $m \times n$-**Koeffizientenmatrix**
- b ein n-dimensionaler **Vektor von Konstanten**

Standardform

Maximiere $c^T x$

Unter Bedingungen

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Ein lineares Programm (LP) in **Standardform** besteht aus einer linearen Zielfunktion (objective funktion) $\zeta = c^T x$, welche **maximiert** werden soll. Dabei ist:

- c ein n-dimensionaler **Kostenvektor**
- x ein n-dimensionaler **Variablenvektor** (Entscheidungsvariablen)

Zusätzlich besitzt ein LP m Nebenbedingungen (Constraints) in der Form

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Dabei ist

- A eine $m \times n$-**Koeffizientenmatrix**
- b ein n-dimensionaler **Vektor von Konstanten**

Lemma: Jedes LP lässt sich in Standardform bringen.

Feasibility und Optimalität

Eine Belegung von Variablen für ein LP heißt Lösung (**solution**). Weiter

- Eine Lösung ist gültig (**feasible**), wenn alle Constraints erfüllt werden.
- Eine Lösung heißt **optimal**, wenn der Lösungswert dem Maximum entspricht.

Besitzt ein LP keine Lösung, so ist das LP ungültig (**infeasible**).
Besitzt ein LP Lösungen mit beliebig hohen Werten, dann ist das LP unbeschränkt (**unbounded**).

Lemma:
Ist ein LP feasible und bounded, dann hat das LP ein Optimum.

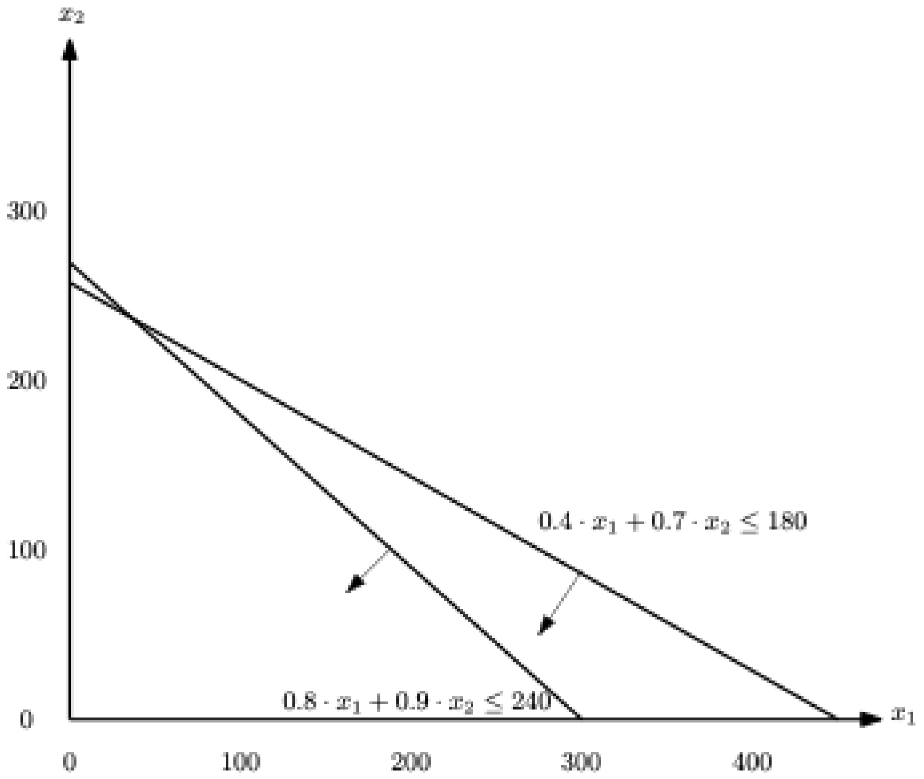
Beweis:
Sei X die Lösungsmenge. Da das LP beschränkt ist, existiert ein Supremum s.
Da c linear ist, wird die abgeschlossene Menge X auf eine abgeschlossene Menge c[X] abgebildet.
Da s entweder in c[X] oder ein Häufungspunkt. Da c[x] abgeschlossen ist, muss s in c[X] sein.

Graphische Darstellung

Maximiere: $(1000, 1400) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

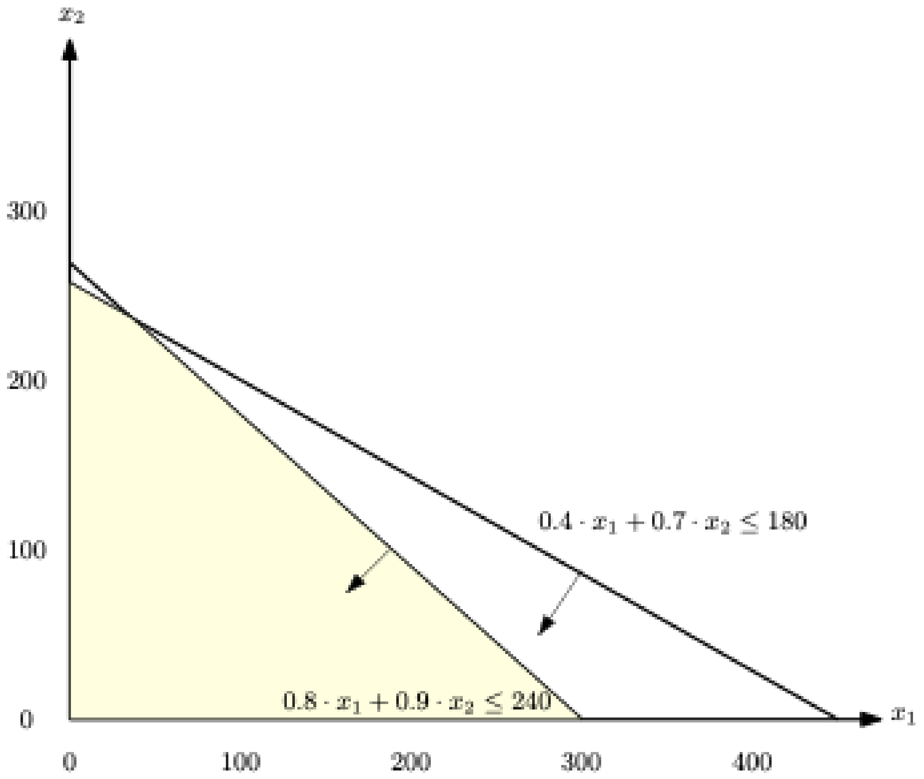


Graphische Darstellung

Maximiere: $(1000, 1400) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

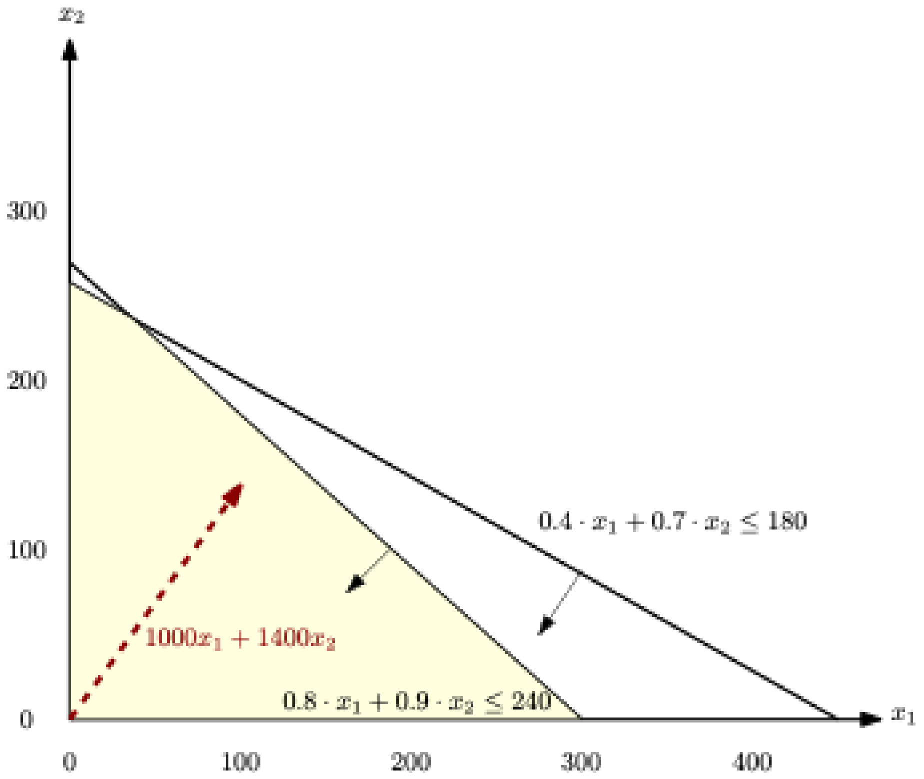


Graphische Darstellung

Maximiere: $(1000, 1400) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

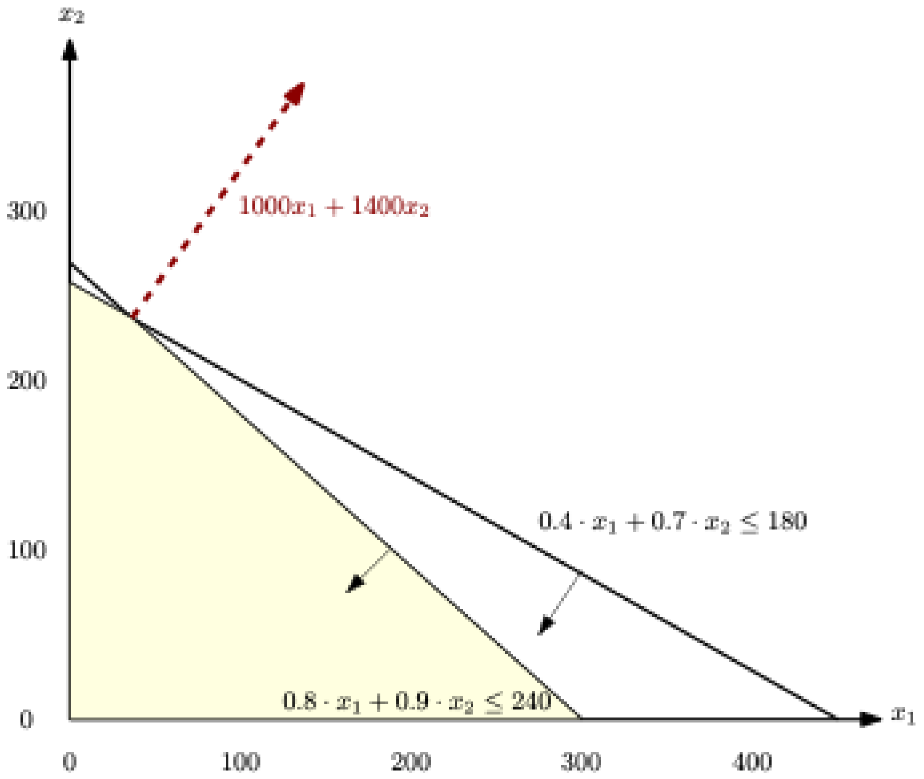


Graphische Darstellung

Maximiere: $(1000, 1400) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

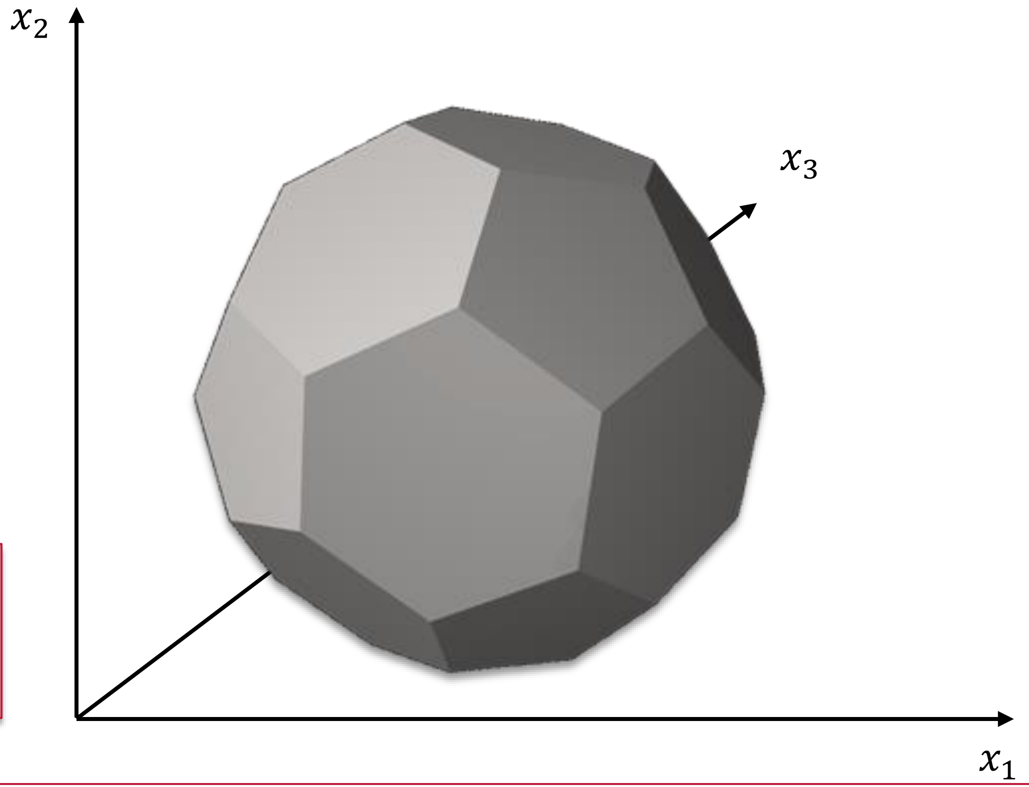
$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



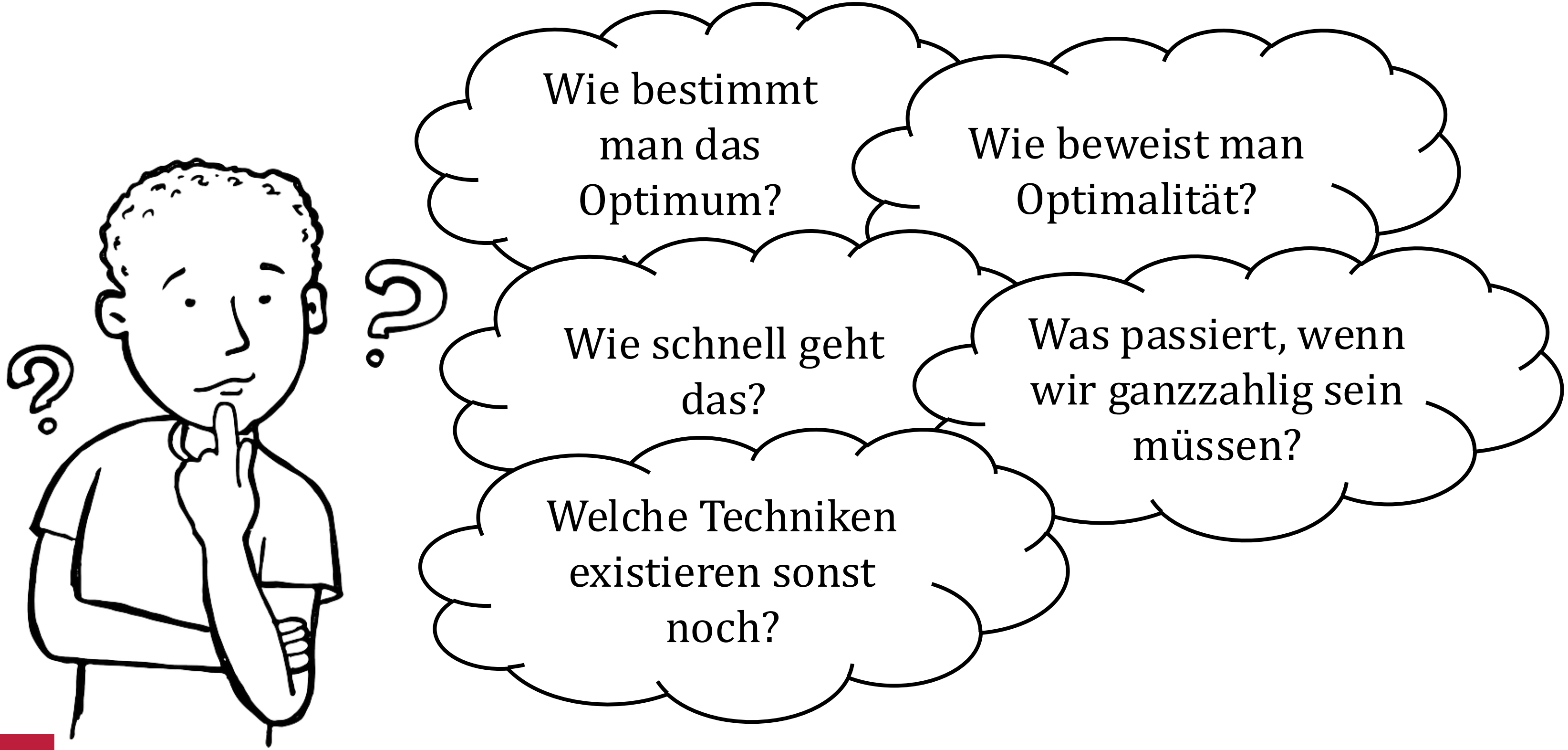
Mehr Variablen = mehr Dimensionen

- Jede Variable erhöht die Dimension des Lösungsraumes um eins.
- Constraints entsprechen Hyperebenen, die den Lösungsraum beschneiden.



Lemma:
Der Lösungsraum eines LPs ist immer konvex.

Fragen


Wie bestimmt man das Optimum?
Wie beweist man Optimalität?
Wie schnell geht das?
Was passiert, wenn wir ganzzahlig sein müssen?
Welche Techniken existieren sonst noch?