Technische Universität Braunschweig

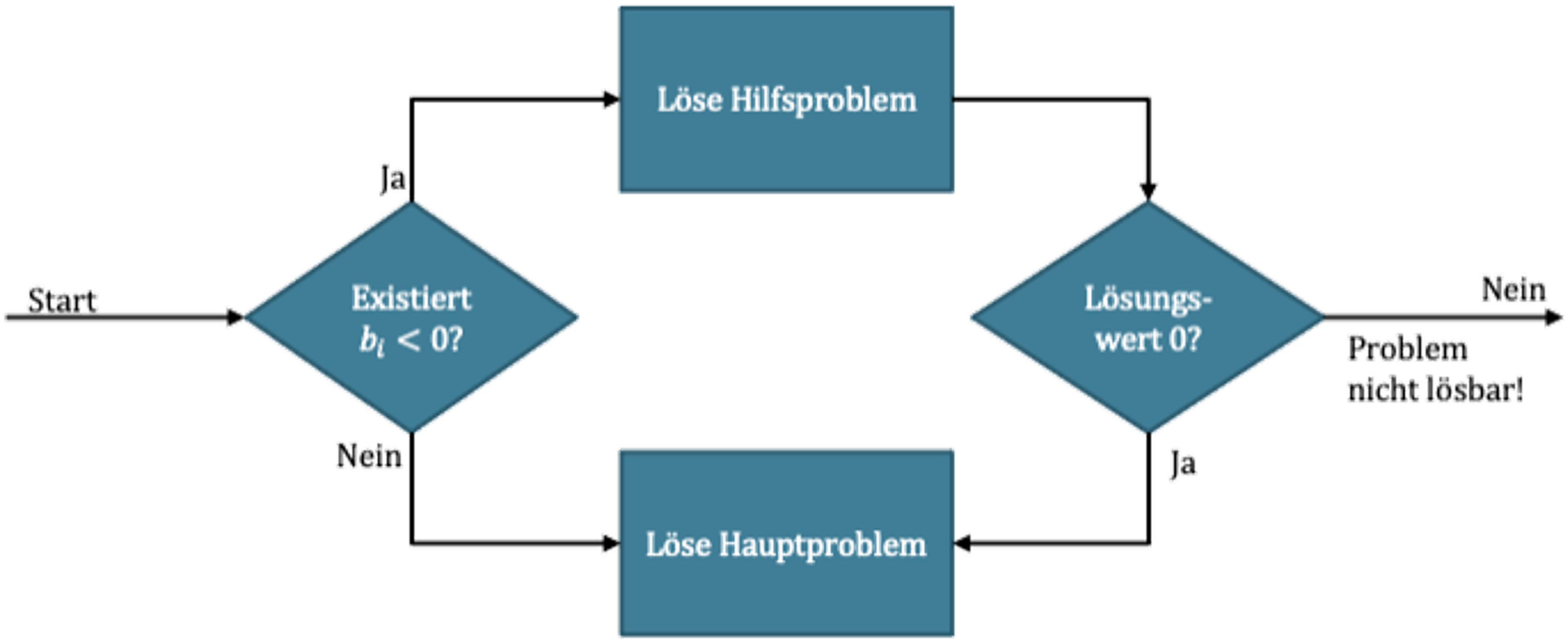
# Mathematische Methoden der Algorithmik – Vorlesung #02

Arne Schmidt

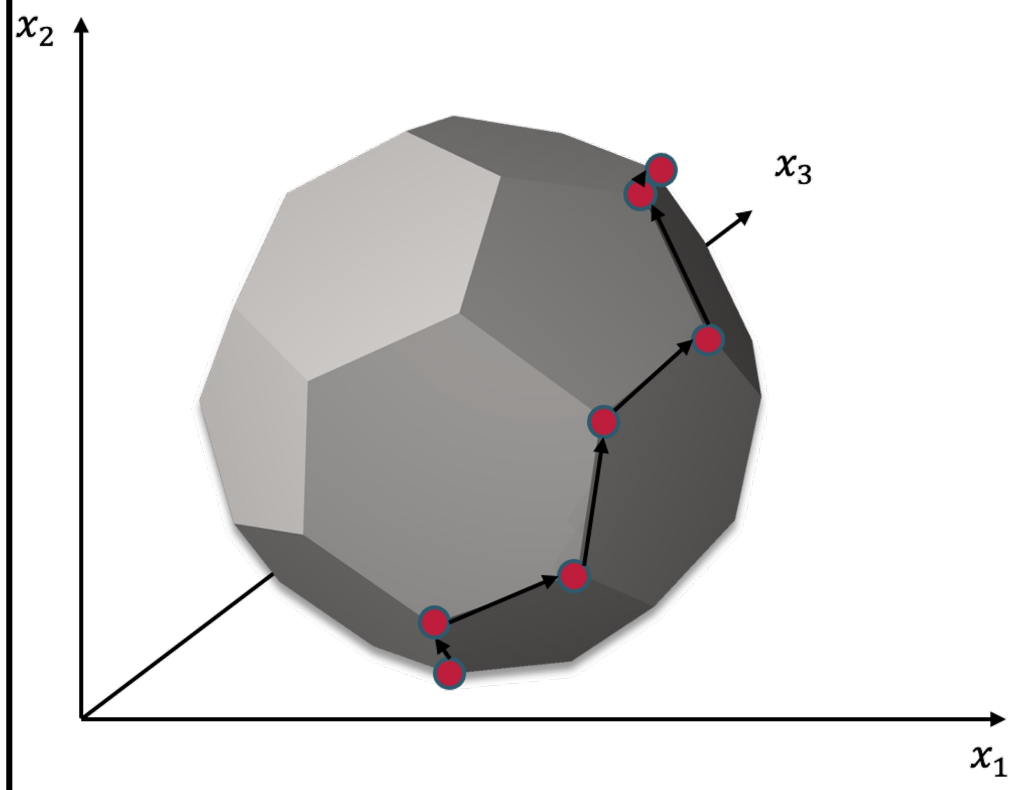
# Letzte Woche

# Simplex Algorithmus

## 2-Phasen-Simplex

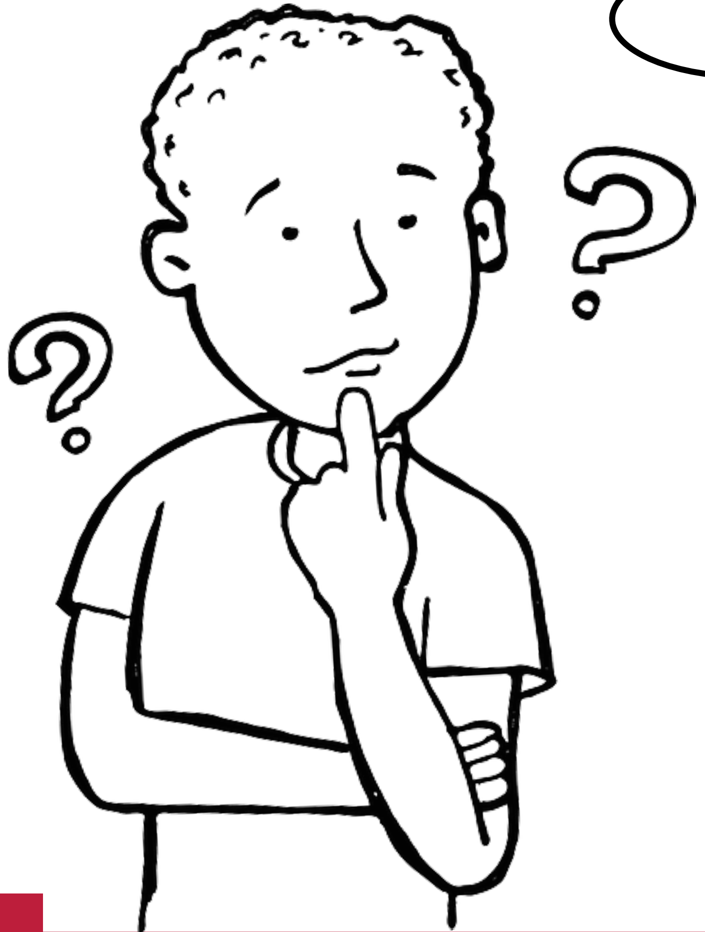



## Basistausch



# Fundamentalsatz und Pivotregeln

# Überlegungen



Wir haben einen Algorithmus, der korrekt läuft… wenn er terminiert.

Terminiert der Simplex-Algorithmus immer?!

Falls nicht, was können wir tun?

# Degenerierte Dictionaries und Pivots

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + x_1 + x_2 \\
w_1 &= 5 - 2x_1 + 3x_2 \\
w_2 &= 7 - 3x_1 - 7x_2 \\
w_3 &= 0 \qquad\quad - x_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + x_1 - w_3 \\
w_1 &= 5 - 2x_1 + 3w_3 \\
w_2 &= 7 - 3x_1 - 7w_3 \\
x_2 &= 0 \qquad\quad - w_3
\end{aligned}
$$

Ein solches Dictionary heißt **degeneriert**. Es enthält ein $\bar{b}_i = 0$.

Dadurch entstehen **degenerierte Pivots**: Für ein $k \in \mathcal{B}$ existiert ein $i \in \mathcal{N}$ mit

$$\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} = 0$$

Frage: Welche Pivots sind hier degeneriert und welche nicht?

$x_1$ nicht degeneriert, $x_2$ ist degeneriert.

# Degenerierte Dictionaries und Pivots II

$$\begin{array}{rrrr} \zeta = & 0 + & x_1 + & x_2 \\ w_1 = & 5 - & 2x_1 + & 3x_2 \\ w_2 = & 7 - & 3x_1 - & 7x_2 \\ w_3 = & 0 & - & x_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} \zeta = & 0 + & x_1 - & w_3 \\ w_1 = & 5 - & 2x_1 + & 3w_3 \\ w_2 = & 7 - & 3x_1 - & 7w_3 \\ x_2 = & 0 & - & w_3 \end{array}$$

Durch den Pivotschritt hat sich der Zielfunktionswert nicht verändert!

Die Repräsentation des Wertes ist anders.
Die Lösung bleibt aber identisch:
$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 5, 7, 0)$

- Macht das irgendwelche Probleme?
- Wie lange kann man im schlimmsten Fall den gleichen Wert behalten?

# Degenerierte Dictionaries und Pivots II

$$\begin{array}{rcrrr} \zeta &=& 0 + & x_1 - & w_3 \\ w_1 &=& 5 - & 2x_1 + & 3w_3 \\ w_2 &=& 7 - & 3x_1 - & 7w_3 \\ x_2 &=& 0 & - & w_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrrr} \zeta &=& \frac{7}{3} - & \frac{1}{3}w_2 - & \frac{7}{3}w_3 \\ w_1 &=& \frac{1}{3} - & \frac{2}{3}w_2 - & \frac{10}{3}w_3 \\ x_1 &=& \frac{7}{3} - & \frac{2}{3}w_2 - & \frac{7}{3}w_3 \\ x_2 &=& 0 & - & w_3 \end{array}$$

Ein weiterer Pivotschritt hat zwar die Degeneration nicht aufgelöst, ist aber bei einer optimalen Lösung angekommen!

Das passiert im Normalfall, dass wir trotz Degeneration in einem Optimum landen. Aber!

*Es kann vorkommen, dass über degenerierte Pivots wieder Dictionaries erreicht werden, die bereits vorkamen und nie eine optimale Lösung gefunden wird.*

Dieses Verhalten wird **zykeln** (cycling) genannt.

# Zykeln

Um zykeln zu vermeiden, werden spezielle Regeln eingeführt. Aber sogar die folgende Regel kann zum Zykeln führen:

- Wähle als Nichtbasisvariable die mit dem größten positiven Koeffizienten $\bar{c}_k$.
- Wähle die Basisvariable nach lexikographischer Ordnung, wenn mehrere zur Auswahl stehen. (Dabei in der Regel Schlupfvariablen als letztes, also $x_1, \dots, x_n, w_1, \dots, w_m$)

$$
\begin{array}{rcrrrrr}
\zeta & = & + & x_1 - & 2x_2 & - & 2x_4 \\
\hline
w_1 & = & - & 0.5x_1 + & 3.5x_2 + & 2x_3 - & 4x_4 \\
w_2 & = & - & 0.5x_1 + & x_2 + & 0.5x_3 - & 0.5x_4 \\
w_3 & = & 1 - & x_1 & & &
\end{array}
$$

Probiert es selbst aus; nach 6 Iterationen sollte man wieder bei diesem Dictionary ankommen (ggf. sind die Spalten / Zeilen permutiert).

# Und nun?

# Pertubation

Wenn ein $\bar{b}_i = 0$ ist, dann pertubiere es und setze $\bar{b}_i \coloneqq \bar{b}_i + \epsilon_i$.

Wenn viele davon existieren, pertubiere alle, sodass gilt:
$0 < \epsilon_k \ll \epsilon_{k-1} \ll \cdots \ll \epsilon_1 \ll$ andere Nicht-Null-Werte

Dabei im Hinterkopf zu behalten:

- Keine Linearkombination der $\epsilon_i$ kann während des Simplex-Algorithmus Größenordnungen wie die Daten im Problem annehmen.
- Niedrigere $\epsilon_j$ können nicht zu höheren $\epsilon_i$, d.h. $i < j$, eskalieren.

Schauen wir uns ein Beispiel an!

# Pertubationsbeispiel

$$\begin{array}{rrrr} \zeta = & 0 + & 6x_1 + & 4x_2 \\ w_1 = & 0 + & 9x_1 + & 4x_2 \\ w_2 = & 0 - & 4x_1 - & 2x_2 \\ w_3 = & 1 & - & x_2 \end{array}$$

**Notiz:** Man kann auch einfach jede Zeile pertubieren.

$$\begin{array}{rrrrrr} \zeta = & 0 + & & & 6x_1 + & 4x_2 \\ w_1 = & 0 + & \epsilon_1 + & & 9x_1 + & 4x_2 \\ w_2 = & 0 + & & \epsilon_2 - & 4x_1 - & 2x_2 \\ w_3 = & 1 & & & - & x_2 \end{array}$$

# Iteration 1

$$
\boxed{\begin{array}{rcllllr}
\zeta & = & 0\ + & & & 6x_1\ + & 4x_2 \\
w_1 & = & 0\ + & \epsilon_1\ + & & 9x_1\ + & 4x_2 \\
w_2 & = & 0\ + & & \epsilon_2\ - & 4x_1\ - & 2x_2 \\
w_3 & = & 1 & & & - & x_2
\end{array}}
$$

Tausche $x_1$ mit $w_2$ aus. Andere Möglichkeit existiert nicht.

$$
\boxed{\begin{array}{rcllrrr}
\zeta & = & 0\ + & & 1.5\epsilon_2\ - & 1.5w_2\ + & 1x_2 \\
w_1 & = & 0\ + & \epsilon_1\ + & 2.25\epsilon_2\ - & 2.25w_2\ - & .5x_2 \\
x_1 & = & 0\ + & & .25\epsilon_2\ - & .25w_2\ - & .5x_2 \\
w_3 & = & 1 & & & - & x_2
\end{array}}
$$

Welches Pivot als nächstes?

# Iteration 2

$$
\boxed{
\begin{array}{rrrrrr}
\zeta = & 0\, + & & 1.5\epsilon_2\, - & 1.5w_2\, + & 1x_2 \\
w_1 = & 0\, + & \epsilon_1\, + & 2.25\epsilon_2\, - & 2.25w_2\, - & .5x_2 \\
x_1 = & 0\, + & & .25\epsilon_2\, - & .25w_2\, - & .5x_2 \\
w_3 = & 1 & & & - & x_2
\end{array}
}
$$

Tausche $x_2$ mit $x_1$ aus, da $\epsilon_2 \ll \epsilon_1$.

$$
\boxed{
\begin{array}{rrrrrr}
\zeta = & 0\, + & & 2\epsilon_2\, - & 2w_2\, - & 2x_1 \\
w_1 = & 0\, + & \epsilon_1\, + & 2\epsilon_2\, - & 2w_2\, + & x_1 \\
x_2 = & 0\, + & & .5\epsilon_2\, - & .5w_2\, - & 2x_1 \\
w_3 = & 1\, - & & .5\epsilon_2\, + & .5w_2\, + & 2x_1
\end{array}
}
$$

# Optimale Lösung

$$\begin{array}{rcrrr} \zeta & = & 0 - & 2w_2 - & 2x_1 \\ w_1 & = & 0 - & 2w_2 + & x_1 \\ x_2 & = & 0 - & .5w_2 - & 2x_1 \\ w_3 & = & 1 - & .5w_2 + & 2x_1 \end{array}$$

Lösche die $\epsilon_i$ wieder, um das nicht-pertubierte Dictionary zu erhalten.

Wir haben die $\epsilon_i$ wie Symbole benutzt, wodurch wir eine präzise Beschreibung der Rangfolge der Variablen erhalten.

Die Methode wird auch **lexicographic method** genannt.

**Theorem:** Der Simplex-Algorithmus terminiert immer mit der lexicographic Method.

# Beweisskizze

Zu zeigen: Es wird kein degeneriertes Dictionary erzeugt.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \epsilon_m \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Simplex-Iterationen}]{\text{Bel. viele}} \begin{bmatrix} r_{11}\epsilon_1 & r_{12}\epsilon_2 & \cdots & r_{1m}\epsilon_m \\ r_{21}\epsilon_1 & r_{22}\epsilon_2 & \cdots & r_{2m}\epsilon_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1}\epsilon_1 & r_{m2}\epsilon_2 & \cdots & r_{mm}\epsilon_m \end{bmatrix}$$

Nur Hauptdiagonale hat Einträge
➔ Rang m

Diese Matrix muss immer noch Rang m besitzen, da wir nur reversible Pivotoperationen durchgeführt haben.

Daraus folgt: Jede Zeile muss ein $r_{ij} \neq 0$ besitzen.

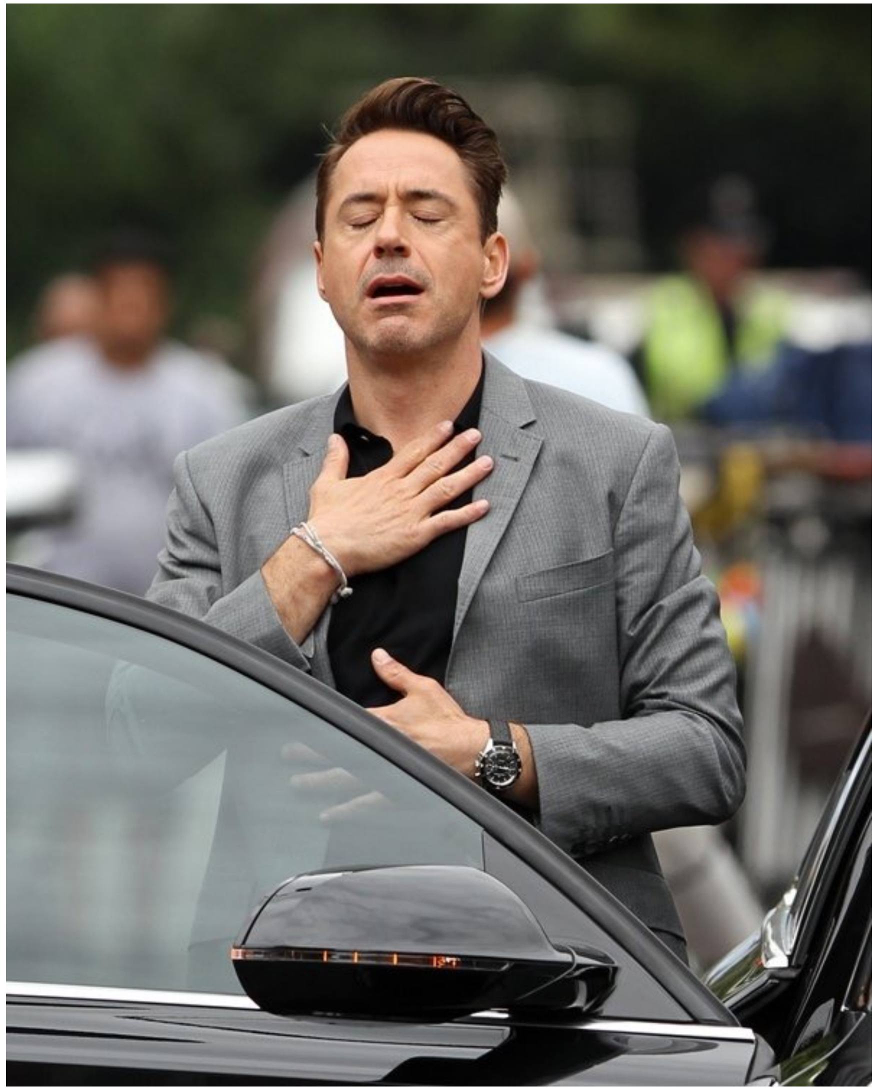
Daraus wiederum: Keine Zeile ist degeneriert (per Annahme, dass sich die $\epsilon_i$ nicht gegenseitig aufheben können).

Daher: Kein Dictionary wird degeneriert sein!

# Phew!

Wir können also dafür sorgen, dass der Simplex-Algorithmus immer terminiert!

Damit können wir uns mögliche Ausgaben nach Terminierung anschauen!



Technische Universität Braunschweig

# Fundamentalsatz

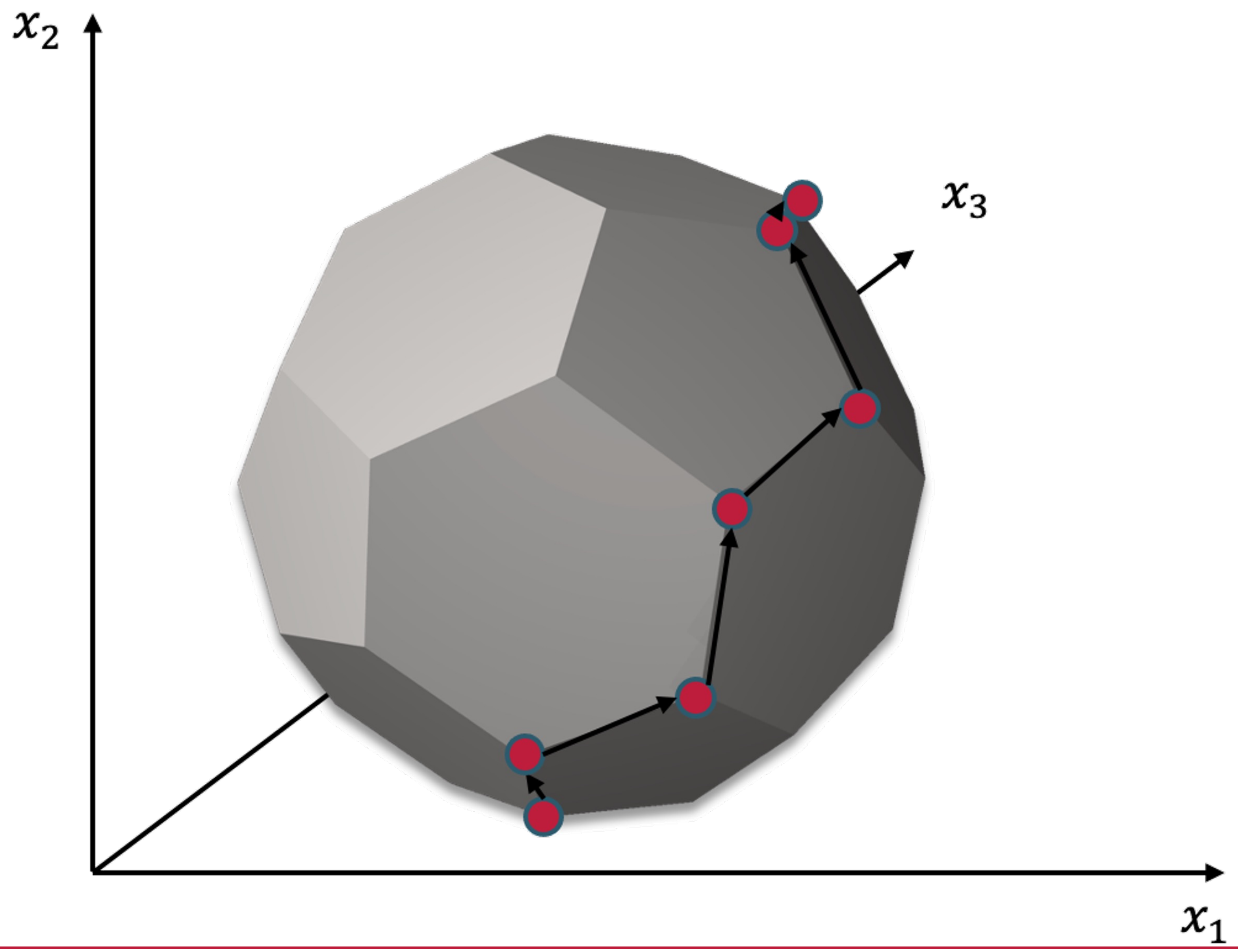
**Theorem (Fundamentalsatz):**
Für jedes LP in Standardform, gelten die folgenden Aussagen:

- Wenn es keine optimale Lösung gibt, ist das LP infeasible oder unbeschränkt.
- Wenn es eine Lösung gibt, dann existiert es eine Basislösung.
- Wenn es eine optimale Lösung gibt, dann existiert eine optimale Basislösung.

# Basislösungen in der Geometrie

Die Extrempunkte des Polytops entsprechen Basislösungen!

Zum Nachdenken:
Wie sieht das mit degenerierten Basislösungen aus?



# Andere Pivotregeln

Bland‘s Rule:
Wähle aus allen möglichen Pivots immer den mit dem kleinsten Index.

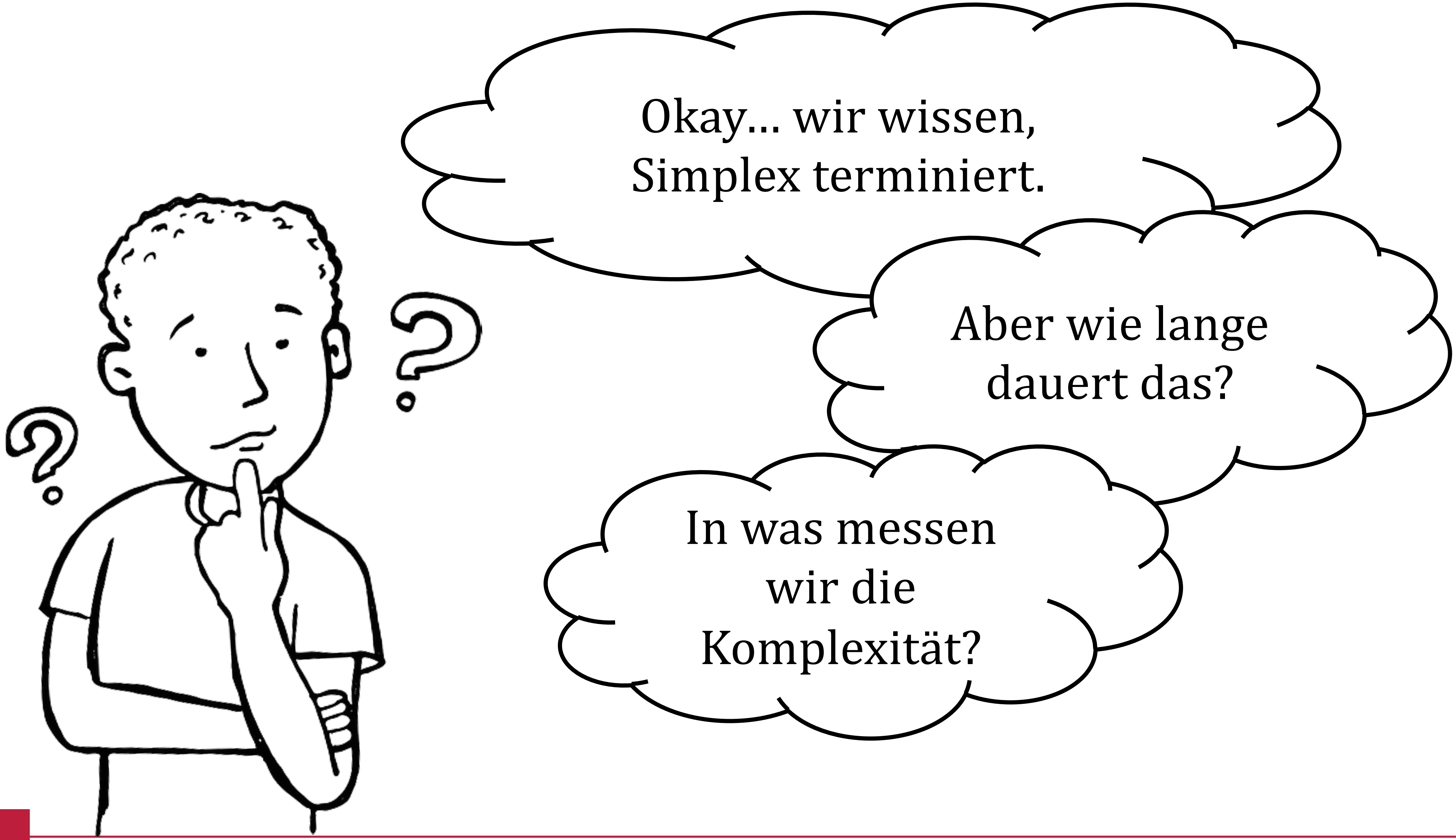
Simplex zykelt mit dieser Regel nicht! Benötigt aber ggf. länger zum Konvergieren.

Random Rule:
Wähle aus allen möglichen Pivots immer zufällig einen aus.

Greatest Increase Rule:
Pivotisiere so, dass die Zielfunktion am stärksten wächst.

Sehr rechenintensiv!

# Fragen


Okay... wir wissen, Simplex terminiert.
Aber wie lange dauert das?
In was messen wir die Komplexität?

# Laufzeit Simplex-Algorithmus

Metriken:

- n, die Anzahl an Variablen
- m, die Anzahl an Constraints
- Anzahl an non-zero Koeffizienten

Rule-of-thumb: Je mehr 0en die Matrix enthält, desto einfacher wird es.

Worst-Case-Laufzeit hängt also eher von n und m ab.

# Laufzeit Simplex-Algorithmus II

Die Laufzeit berechnet sich folgendermaßen:

$$T_{gesamt} = N_{iterationen} \cdot T_{iteration}$$

Also:

1. Wie viele Iterationen gibt es, und
2. Wie lange dauert eine Iteration?

Zu Frage 1: Wir gehen von Dictionary zu Dictionary ohne Wiederholung. Mit n+m (Schlupf-) Variablen von denen m in die Basis gehen, kann es maximal $\binom{n+m}{m}$ viele Dictionaries geben.

Im schlimmsten Fall, wenn n=m, sind das in etwa $2^{2n}$ Iterationen!


ABER WIR MÜSSEN NICHT
ALLE BASISLÖSUNGEN DURCH.


ABER WIR MÜSSEN NICHT
ALLE BASISLÖSUNGEN DURCH.
ODER?

# Klee-Minty-Cube

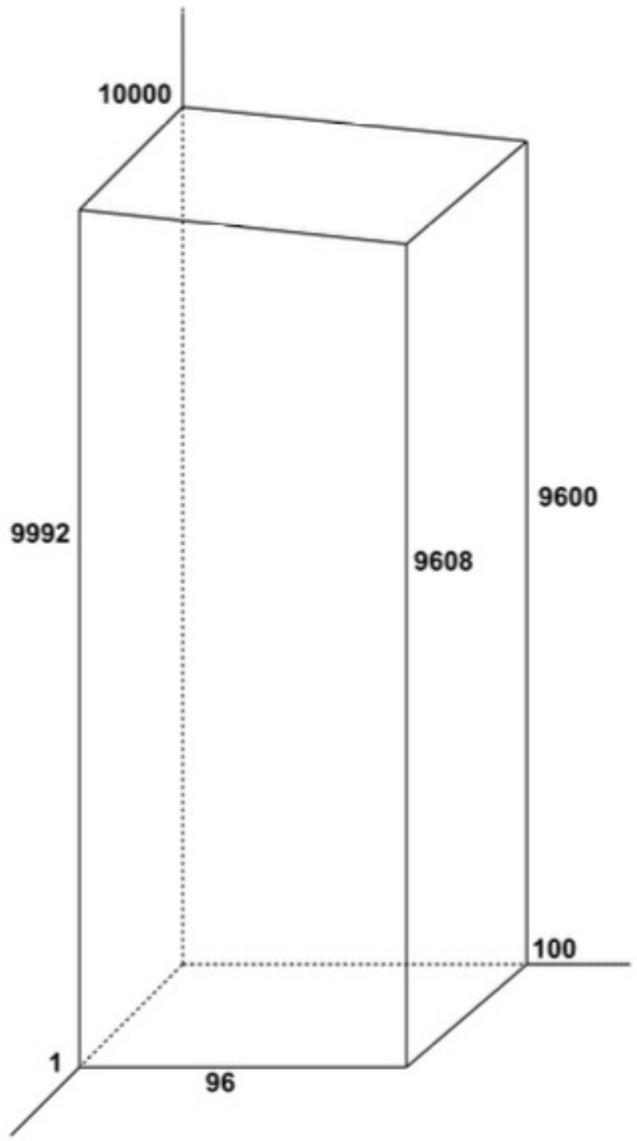
Sei $1 = \beta_1 \ll \beta_2 \ll \cdots \ll \beta_n$. Betrachte folgendes LP

$$\begin{aligned}
\max_x \quad & \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} x_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} \beta_j \\
\text{s.t.} \quad & 2 \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j} x_j + x_i \leq \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j} \beta_j + \beta_i \quad i = 1, 2, \ldots, n \\
& x_j \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}$$

# Beispiel

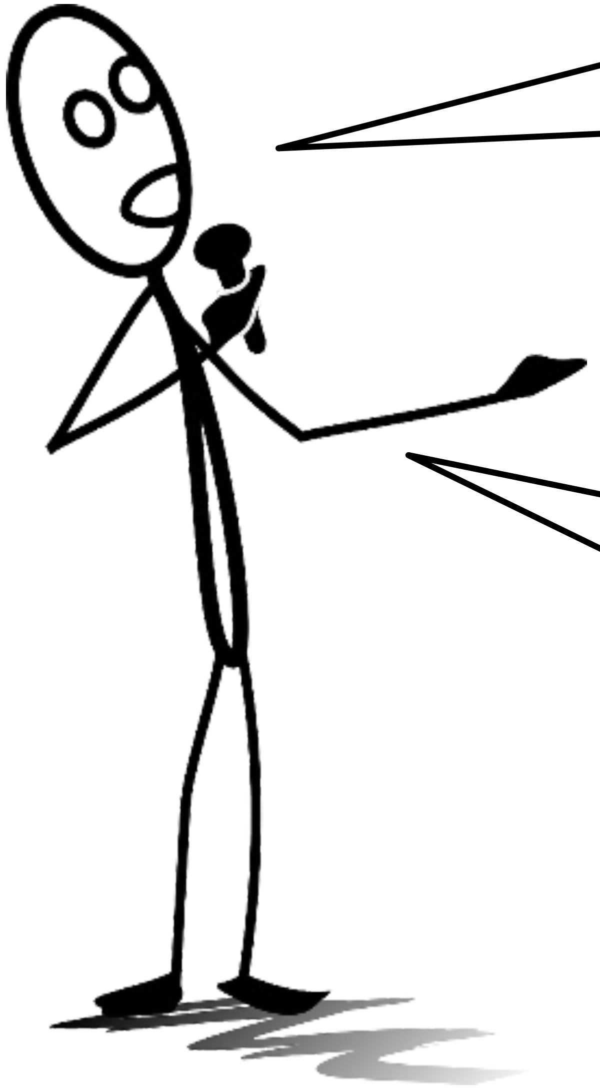
Mit $\beta_2 = 98, \beta_3 = 9800$ sieht der Lösungsraum so aus:

$$\begin{aligned} 1x_1 & & & \leq 1 \\ 4x_1 + & \quad 1x_2 & & \leq 100 \\ 8x_1 + & \quad 4x_2 + & \quad 1x_3 & \leq 10000 \\ x_1, & \quad x_2, & \quad x_3 & \geq 0 \end{aligned}$$




**Lemma:**
Mit der Größte-Pivot-Regel werden $2^n - 1$ Iterationen benötigt.

# Simplex in der Praxis



Auch wenn Simplex **theoretisch** exponentielle Zeit besitzt, läuft der Algorithmus in der **Praxis** deutlich besser!

Außerdem hängt das Worst-Case-Beispiel sehr von der Pivot-Regel ab!

# Nächste Woche

Wenn wir Simplex durchführen, erhalten wir immer untere Schranken für den opt. Lösungswert

Können wir auch obere Schranken bestimmen?!