Technische Universität Braunschweig

# Mathematische Methoden der Algorithmik – Vorlesung #03

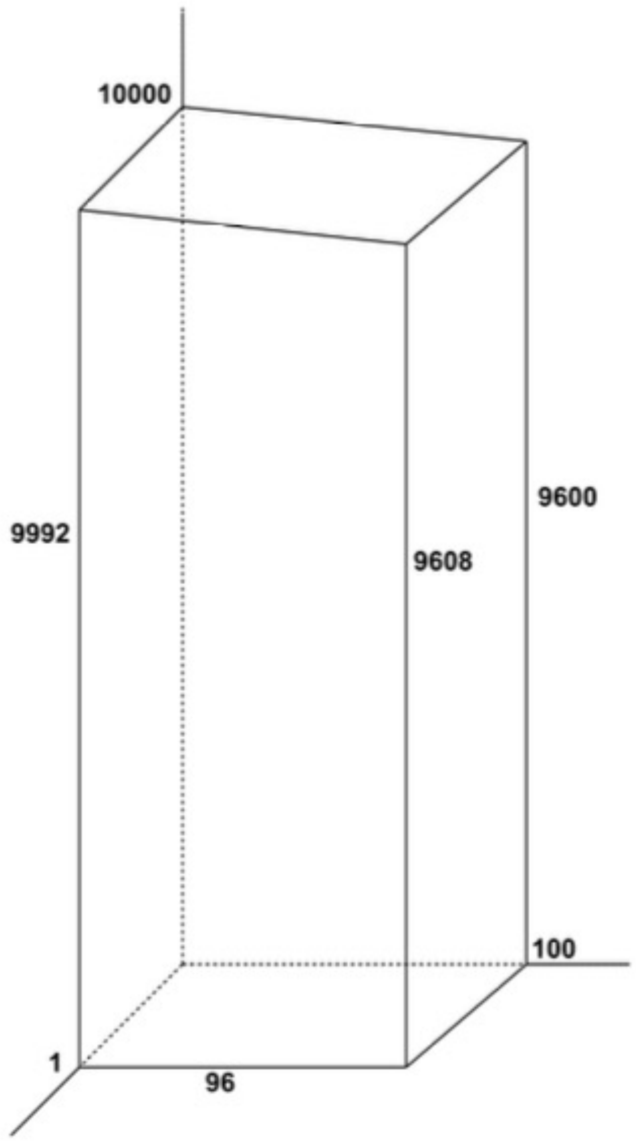
Arne Schmidt

# Letzte Woche

# Fundamentalsatz, Pivotregeln und Komplexität

**Theorem (Fundamentalsatz):**
Für jedes LP in Standardform, die folgenden Aussagen gelten:

- Wenn es keine Lösung gibt, ist das LP infeasible oder unbeschränkt.
- Wenn es eine Lösung gibt, dann existiert es eine Basislösung.
- Wenn es eine optimale Lösung gibt, dann existiert eine optimale Basislösung.



# Heute

# Schranken

Wenn wir Simplex durchführen, erhalten wir immer untere Schranken für den opt. Lösungswert

Können wir auch obere Schranken bestimmen?!

# Beispiel

$$
\begin{array}{lrrrl}
max & 4x_1 + & x_2 + & 3x_3 & \\
\text{s.t.} & x_1 + & 4x_2 & & \leq 1 \\
 & 3x_1 - & x_2 + & x_3 & \leq 3 \\
 & & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Sei $\zeta^*$ der Wert einer optimalen Lösung.

- Die Lösung (1, 0, 0) zeigt, dass $\zeta^* \geq 4$.
- Die Lösung (0, 0, 3) zeigt, dass $\zeta^* \geq 9$.

Frage: Wie gut ist diese Lösung im Vergleich zum Optimum?!

Betrachte nun

$$
\begin{array}{l}
2\times(x_1 + 4x_2 \qquad \leq 1) \\
+3\times(3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3)
\end{array}
$$

--------------------------------

$$(11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 11)$$

Was sagt uns die linke Berechnung?
Das Resultat ist mindestens so groß wie unsere Zielfunktion!

→ $\zeta^* \leq 11$

# Beispiel

$$
\begin{array}{llllll}
max & 4x_1 + & x_2 + & 3x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + & 4x_2 & & \leq 1 \\
 & 3x_1 - & x_2 + & x_3 & \leq 3 \\
 & & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Können wir bessere obere Schranken finden?
Versuchen wir das zu verallgemeinern!

Betrachte nun

$$
\begin{array}{r}
y_1 \times (x_1 + 4x_2 \qquad \leq 1) \\
+y_2 \times (3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3)
\end{array}
$$

---

$$\boxed{(y_1 + 3y_2)}x_1 + \boxed{(4y_1 - y_2)}x_2 + \boxed{y_2}x_3 \leq \boxed{y_1 + 3y_2}$$

$$\boxed{\geq 4} \qquad \boxed{\geq 1} \qquad \boxed{\geq 3} \qquad \text{Minimiere!}$$

Jetzt müssen wir $y_1, y_2$ noch so wählen, dass die Koeffizienten der $x_i$ mindestens so groß sind, wie die in der Zielfunktion.

Das schreiben wir einmal vernünftig auf!

# Beispiel

$$
\begin{array}{llllll}
max & 4x_1 + & x_2 + & 3x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + & 4x_2 & & \leq 1 \\
 & 3x_1 - & x_2 + & x_3 & \leq 3 \\
 & & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
min & y_1 + & 3y_2 & \\
\text{s.t.} & y_1 + & 3y_2 & \geq 4 \\
 & 4y_1 - & y_2 & \geq 1 \\
 & & y_2 & \geq 3 \\
 & & y_1, y_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Betrachte nun

$$
\begin{array}{l}
y_1 \times (x_1 + 4x_2 \qquad \leq 1) \\
+y_2 \times (3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3)
\end{array}
$$

---

$$
\underbrace{\boxed{(y_1 + 3y_2)}}_{\geq 4} x_1 + \underbrace{\boxed{(4y_1 - y_2)}}_{\geq 1} x_2 + \underbrace{\boxed{y_2}}_{\geq 3} x_3 \leq \boxed{y_1 + 3y_2}
$$

Minimiere!

# Resource Allocation Problem

$$
\begin{aligned}
&\max c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{s.t.} \\
&\quad a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\quad a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\
&\qquad\qquad x_1, \dots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

Dabei ist:

- $c_i$ der Profit für Produkt $j$
- $b_j$ die Anzahl an Rohmateriall $i$
- $a_{ij}$ die benötigte Anzahl von Rohmaterial $i$, um Produkt $j$ herzustellen

- Angenommen, wir produzieren Produkt $j$ um eine Einheit weniger. Dann erhalten wir $a_{ij}$ von Rohmaterial $i$ zurück.
- Wenn wir Rohmaterial $i$ für $y_i$ Euro verkaufen können, dann erhielten wir $a_{1j}y_1 + \cdots + a_{mj}y_m$ Euro.
- Das lohnt sich natürlich nur, wenn es den verlorenen Profit übersteigt, d.h.
$$a_{1j}y_1 + \cdots + a_{mj}y_m \ge c_j$$
- Ein Käufer, der alle Rohmaterialien abkaufen will, möchte natürlich so wenig wie möglich bezahlen.

# Resource Allocation Problem

Damit erhalten wir folgendes LP.

$$\begin{aligned} &\min b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m \\ &\text{s.t.} \\ &\quad a_{11} y_1 + \cdots + a_{m1} y_m \geq c_1 \\ &\quad \vdots \\ &\quad a_{1n} y_1 + \cdots + a_{mn} y_m \geq c_n \\ &\quad y_1, \ldots, y_m \geq 0 \end{aligned}$$

Ursprüngliches LP

$$\begin{aligned} &\max c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\ &\text{s.t.} \\ &\quad a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ &\quad \vdots \\ &\quad a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \leq b_m \\ &\quad x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Das halten wir mal allgemein fest!

# Duales LP

Zu jedem LP existiert ein **duales** LP. Das duale LP eines dualen LPs wird auch **primales** LP genannt. Ist das LP in Standardform, ist die Dualisierung ganz einfach.

| Primal | Dual |
|---|---|
| Maximiere $c^T x$ | Minimiere $b^T y$ |
| Unter Bedingungen | Unter Bedingungen |
| $Ax \leq b$ | $A^T y \geq c$ |
| $x \geq 0$ | $y \geq 0$ |

# Schwache Dualität

**Theorem (Schwache Dualität)**
Sind x bzw. y zulässige Lösungen eines primalen bzw. dualen LPs, dann gilt
$$c^T x \leq b^T y$$

Beweis:

$$c^T x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = b^T y$$

| Primal | Dual |
| --- | --- |
| Maximiere $c^T x$ | Minimiere $b^T y$ |
| Unter Bedingungen | Unter Bedingungen |
| $Ax \leq b$ | $A^T y \geq c$ |
| $x \geq 0$ | $y \geq 0$ |

# Duale Dictionaries

| Primal | Dual | |
|---|---|---|
| Maximiere $c^T x$ | Minimiere $b^T y$ | -Maximiere $-b^T y$ |
| Unter Bedingungen | Unter Bedingungen | Unter Bedingungen |
| $Ax \leq b$ | $A^T y \geq c$ | $-A^T y \leq -c$ |
| $x \geq 0$ | $y \geq 0$ | $y \geq 0$ |

Wir können uns das Dictionary zum primalen und zum dualen anzeigen lassen.

# Duale Dictionaries – Beispiel I

Primal

$$\begin{array}{rrrrr} \zeta = & 0 - & 3x_1 + & 2x_2 + & 1x_3 \\ w_1 = & 0 + & 0x_1 + & 1x_2 - & 2x_3 \\ w_2 = & 3 + & 3x_1 - & 4x_2 - & 1x_3 \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{rrrr} -\xi = & 0 - & 0y_1 - & 3y_2 \\ z_1 = & 3 - & 0y_1 - & 3y_2 \\ z_2 = & -2 - & 1y_1 + & 4y_2 \\ z_3 = & -1 + & 2y_1 + & 1y_2 \end{array}$$

**Beobachtung:**
Primales Dictionary ist feasible, das duale nicht! Wir können aber primal einen Pivotschritt durchführen: $x_2$ tauscht gegen $w_2$

Damit wird $x_2$ über Constraint 2 pivotisiert.
$\Rightarrow$ Pivotisiere im Dualen $z_2$ mit $y_2$

# Duale Dictionaries – Beispiel II

Primal

$$
\begin{array}{rcccc}
\zeta = & \frac{3}{2} - & \frac{3}{2}x_1 - & \frac{1}{2}w_2 + & \frac{1}{2}x_3 \\
w_1 = & \frac{3}{4} + & \frac{3}{4}x_1 - & \frac{1}{4}w_2 - & \frac{9}{4}x_3 \\
x_2 = & \frac{3}{4} + & \frac{3}{4}x_1 - & \frac{1}{4}w_2 - & \frac{1}{4}x_3
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{rcccc}
-\xi = & -\frac{3}{2} - & \frac{3}{4}y_1 - & \frac{3}{4}z_2 \\
z_1 = & \frac{3}{2} - & \frac{3}{4}y_1 - & \frac{3}{4}y_2 \\
y_2 = & \frac{1}{2} + & \frac{1}{4}y_1 + & \frac{1}{4}y_2 \\
z_3 = & -\frac{1}{2} + & \frac{9}{4}y_1 + & \frac{1}{4}y_2
\end{array}
$$

**Beobachtung:**
Matrix ist immer noch negativ transponiert!
Primal feasible, dual nicht.
Pivotisiere primal über $x_3$ und $w_1$

Es wird $x_3$ über Constraint 1 pivotisiert.
$\Rightarrow$ Pivotisiere im Dualen $z_3$ mit $y_1$

# Duale Dictionaries – Beispiel III

Primal

$$
\begin{array}{rcl}
\zeta &=& \frac{5}{3} - \frac{4}{3}x_1 - \frac{5}{9}w_2 - \frac{2}{9}w_3 \\
x_3 &=& \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{9}w_2 - \frac{4}{9}x_3 \\
x_2 &=& \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{9}w_2 + \frac{1}{9}x_3
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{rcl}
-\xi &=& -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}z_3 - \frac{2}{3}z_2 \\
z_1 &=& \frac{4}{3} - \frac{1}{3}z_3 - \frac{2}{3}y_2 \\
y_2 &=& \frac{5}{9} + \frac{1}{9}z_3 + \frac{2}{9}y_2 \\
y_1 &=& \frac{2}{9} + \frac{4}{9}z_3 - \frac{1}{9}y_2
\end{array}
$$

**Beobachtung:**
Matrix ist immer noch negativ transponiert!
Primal feasible, **dual auch**!

$\Rightarrow$ Simplex auf dem Primalen löst auch das Duale.
$\Rightarrow$ Der Wert scheint identisch zu sein?

# Starke Dualität

**Theorem (Starke Dualität)**
Besitzt das primale LP eine optimale Lösung $x^*$, dann besitzt auch das duale LP eine optimale Lösung $y^*$ und es gilt

$$c^T x^* = b^T y^*$$

Beweis: Tafel!

# Lösungen von LPs

Mit der starken Dualität können nur folgende vier Fälle auftreten:

1. Ist das primale LP unbeschränkt, dann ist das duale LP infeasible.
2. Ist das duale LP unbeschränkt, dann ist das primale LP infeasible.
3. Das primale und duale LP sind infeasible.
4. Das primale und duale LP sind feasible und besitzen eine gleichwertige optimale Lösung.

Diese Fälle werden vom Simplex-Algorithmus abgedeckt!

# Komplementärer Schlupf

**Theorem (Komplementärer Schlupf)**
Angenommen, $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_m)$ sind gültige Lösungen für das primale bzw. duale LP. Dann sind diese genau dann optimal, wenn:

1. $\forall j = 1, \dots, n{:}\;\; x_j z_j = 0$
2. $\forall i = 1, \dots, m{:}\;\; y_i w_i = 0$

Wobei $w = (w_1, \dots, w_m)$ und $z = (z_1, \dots, z_n)$ die zugehörigen primalen bzw. dualen Schlupfvariablen sind.

Beweis: Tafel!

# Beispiel

Primal

$$\begin{array}{lrrrl} max & 4x_1 + & x_2 + & 3x_3 & \\ \text{s.t.} & x_1 + & 4x_2 & & \leq 1 \\ & 3x_1 - & x_2 + & x_3 & \leq 3 \\ & & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Lösung: $\left(0, \frac{1}{4}, \frac{13}{4}\right)$, Wert: 10

$x_2 > 0 \Rightarrow z_2 = 0$

$x_3 > 0 \Rightarrow z_3 = 0$

$$\begin{array}{lrrl} min & y_1 + & 3y_2 & \\ \text{s.t.} & y_1 + & 3y_2 & \geq 4 \\ & 4y_1 - & y_2 & \geq 1 \\ & & y_2 & \geq 3 \\ & & y_1, y_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrl} min & y_1 + & 3y_2 & \\ \text{s.t.} & y_1 + & 3y_2 & \geq 4 \\ & 4y_1 - & y_2 & = 1 \\ & & y_2 & = 3 \\ & & y_1, y_2 & \geq 0 \end{array}$$

$y_2 = 3, y_1 = 1$
Wert: 10

# Allgemeiner

- Wir haben eine nicht-degenerierte, optimale Lösung $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ zu einem LP.
- Damit haben wir auch Schlupfwerte $w^* = (w_1^*, \ldots, w_m^*)$.

- Duale Constraints haben folgende Form:

$$\sum_i a_{ij} y_i - z_j = c_j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

- Also n Gleichungen mit n+m Unbekannten. Allerdings müssen davon m durch komplementären Schlupf sein! (Warum?)
- Es bleibt ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten!

# Dualer Simplex-Algorithmus

Können wir den Simplex-Algorithmus auch direkt auf dem dualen LP durchführen?

Wie viel Arbeit macht das?